Outras funções: Função composta. Função injetora, sobrejetora e bijetora. Função inversa e Função simétrica.

Função composta

Sejam f e g duas funções tais que Imf $\subset D_g$. A função dada por

$$y=g(f(x)),\ x \in D_f,$$

denomina-se função composta de g e f. É usual a notação gof para indicar a composta de g e f.

OBS:

1. A expressão (gof)(x)=g(f(x)) se lê: “g composta com f”.
2. Em geral, gof≠fog, isto é, a composição de funções não é comutativa.
3. O domínio de gof é o conjunto de todos os valores de x no domínio de f tais que f(x) está no domínio de g. Em outras palavras, (gof)(x) está definida sempre que tanto f(x) quanto g(f(x)) estiverem definidas.

Exemplos:

1. Sejam $f(x)=2x-3$ e $g(x)=x^2+4$. Determine:

a) gof(x) b) fog(x)

2. Sejam $f(x)=x^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$. Determine:

a) gof(x) b) fog(x)

Exercícios

1) (PUC) Considere a função $f(x) = e^{sen^2(x)}$. Entre os pares de funções h e g abaixo, aquele que satisfaz $f = h \circ g$ é:

(A) $h(x) = e^{x^2}$ $g(x) = sen\ x$
(B) $h(x) = e^{sen\ x}$ $g(x) = x^2$
(C) $h(x) = e^{sen\ x}$ $g(x) = senx$
(D) $h(x) = sen^2x$ $g(x) = e^x$
(E) nenhuma das respostas acima.

2) Sejam $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x)=y_1}{B \subset \mathbb{R}}$ e $g : \underset{x}{C \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{g(x)=y_2}{D \subset \mathbb{R}}$. Determine o domínio, a imagem e a expressão que representa $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = 4x - 2$.

b) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ e $g(x) = x - 4$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$

Exercícios propostos:

1) (PUC) Para $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 1 - x$ temos que $g \circ f \circ g \circ f(x)$ é

(A) $g \circ f(x)$
(B) $f \circ g(x)$
(C) $f(x)$
(D) $g(x)$
(E) $f \circ f(x)$

2) Sejam $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x)=y_1}{B \subset \mathbb{R}}$ e $g : \underset{x}{C \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{g(x)=y_2}{D \subset \mathbb{R}}$. Determine o domínio, a imagem e a expressão que representa $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = |x+3| - 3$ e $g(x) = \frac{x}{2}$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 4$.

c) $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x - 1$.

3) Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$. Pede-se:

a) obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$
b) calcular $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$
c) determinar os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 10.

4) Sejam as funções $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ definida para todo x real e $x \neq 2$ e $g(x) = 2x + 3$ definida para todo x real. Pedem-se:

a) o domínio e a lei que define $f \circ g$
b) o domínio e a lei que define $g \circ f$.

5) Sejam as funções reais $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 2x + 3$. Obter a lei que define $h \circ (g \circ f)$.

6) Sejam as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 3x - 4$. Determinar os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Respostas:

1) B
2) a)

$$f(x) = |x+3| - 3 \text{ e } g(x) = \frac{x}{2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \left|\frac{x}{2} + 3\right| - 3$$

$D(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $Im(f \circ g) = [-3; +\infty)$, pois $\left|\frac{x}{2}+3\right| \geq 0$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\,|x+3|-3) = \frac{|x+3|-3}{2}$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}$ e $Im(g \circ f) = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, pois $|x+3| \geq 0$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 4$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$

$D(f \circ g)$ é formado pelos valores de x que satisfazem a inequação $x^2 - 4 \geq 0$.

Como foi visto no capítulo anterior, $x^2 - 4 \geq 0$ quando $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

Daí, $D(f \circ g) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ e $Im(f \circ g) = \mathbb{R}_+$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 4 = x - 4; x \geq 0$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}_+$ e $Im(g \circ f) = [-4; +\infty)$.

c) $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x - 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1) + 4 = x + 3$

$D(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $Im(f \circ g) = \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+4) = (x+4) - 1 = x + 3$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}$ e $Im(g \circ f) = \mathbb{R}$.

3) a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x - 2$

$(g \circ f)(x) = 5 + 2x - 2x^2$

b) $(f \circ g)(-2) = 18$, $(g \circ f)(-2) = -7$

c) $x = 2$ ou $x = -\frac{3}{2}$

4) a) $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

$(f \circ g)(x) = \frac{2x+4}{2x+1}$

b) $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{5x-4}{x-2}$

5) $[h \circ (g \circ f)](x) = 2x^2 - 2x + 7$

6) a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.

Para que exista $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$, isto é: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 4$. Então

$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [g(x)]^2 - 3 \cdot g(x) - 4 = |x| - 3\sqrt{x} - 4$.

Para que exista $(g \circ f)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x \geqslant 0$. Então

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

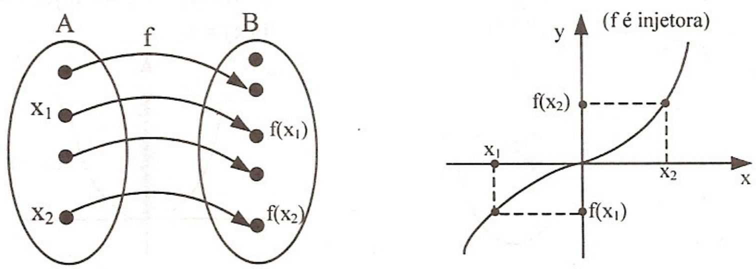
Função injetora

Uma função f: A → B é denominada de função injetora quando quaisquer elementos distintos em A, correspondem a imagens distintas em B.

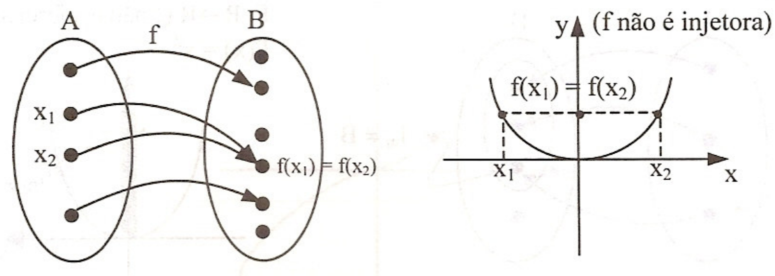
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ ou } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Graficamente:

(I)



(II)



Condição para que um gráfico cartesiano represente uma função injetora: a interseção do gráfico com a reta horizontal ($y = c$) é, no máximo, um ponto.

Exemplo: Verifique se as funções dadas a seguir são injetoras.

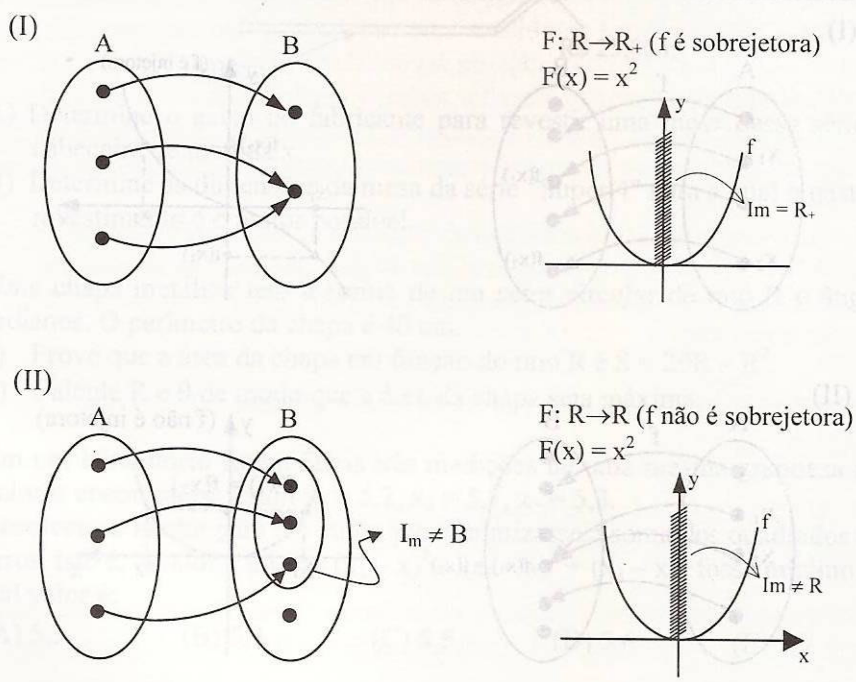
a) $f(x)=3x$
b) $f(x)= 1/2x$
c) $f(x)=x^2$

Função sobrejetora

Uma função f: A $\rightarrow$ B é denominada de função sobrejetora se o contradomínio B é igual ao conjunto imagem, ou seja, todo elemento de B está relacionado através de f, com algum elemento de A.

$$\boxed{\begin{array}{c} B = Im \\ \forall\, y \in B, \exists\, x \in A \mid y = f(x) \end{array}}$$

Graficamente



> Condição para que um gráfico cartesiano represente uma função sobrejetora: a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo 0y é o conjunto de todos os pontos (0,y) onde y pertence ao contradomínio da função.

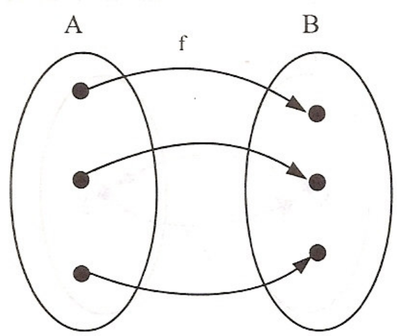
Exemplo: Verifique se as funções dadas a seguir são sobrejetoras.

a) $f(x)=3x$
b) $f(x)=x$

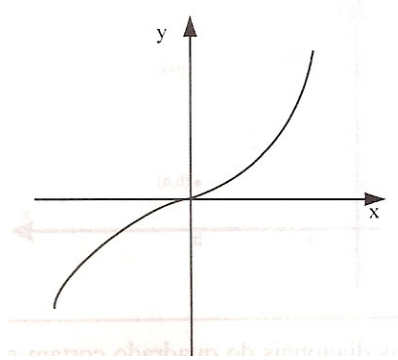
Função bijetora

Uma função f: A → B é denominada de função bijetora se, e somente se, é simultaneamente injetora e sobrejetora.
Diz-se que uma função é bijetora se ela tem uma relação um a um.

Ilustração:

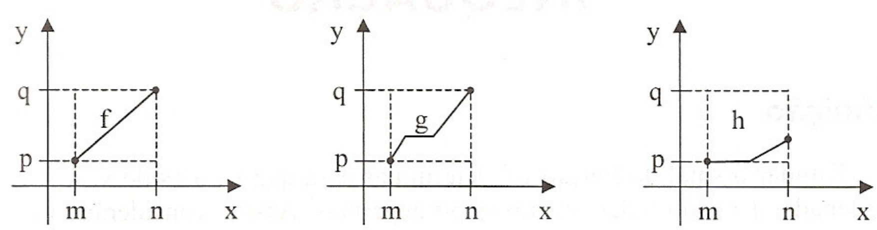


f: R→R (f é bijetora)
$f(x) = x^3$



Exercícios

1) (UFF) Considere as funções f, g e h, todas definidas em [m, n] com imagens em [p, q] representadas através dos gráficos abaixo:



Pode-se afirmar que
(A) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.
(B) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
(C) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.
(D) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva
(E) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

2) Nas funções seguintes classifique em

I) injetora II) sobrejetora III) bijetora

IV) não é injetora e nem sobrejetora.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

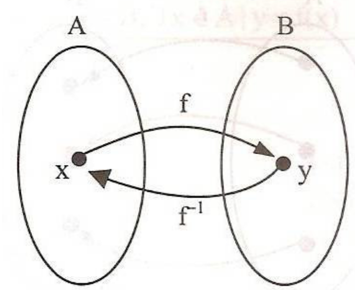
$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

d) $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$m(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Função inversa

Uma função $f: A \to B$ admite $f^{-1}: B \to A$ como sendo a sua inversa se, e somente se for bijetora. A função f leva o elemento x de A no elemento y de B. A sua inversa f^{-1} leva o elemento y de B no elemento x de A.



Exemplo: $f(x)=x^3-4$ é bijetora. Determine sua inversa.

Exercícios propostos

1) Considere a função f de domínio $[a, +\infty[$ e contradomínio $\mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
A) Qual o menor valor de a de modo que f seja injetora?
B) Determine a sentença que define $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to [a, +\infty[$.

2) Nas funções abaixo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, obter a lei de correspondência que define a função inversa.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{4x - 1}{3}$

c) $h(x) = x^3 + 2$

d) $p(x) = (x - 1)^3 + 2$

e) $q(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

f) $r(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

3) A função f em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, admite função inversa? Justificar.

4) Dadas as funções f e g, determinar a função inversa de $g \circ f$:

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 1$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 5$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$

c) $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ e $g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$, $g(x) = 4 - x$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{9}{4}\}$

$f: A \longrightarrow B$, $f(x) = x^2 - 3x$ e $g: B \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = 4x + 9$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 - 1$ e $g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow C$, $g(x) = \sqrt{x + 4}$

Respostas:

1) a)1 b) $1+\sqrt{y}$
2) a) $(y-3)/2$ b) $(3y+1)/4$ c) $\sqrt[3]{y-2}$ d) $1+\sqrt[3]{y-2}$ e) y^3-2 f) $(y+1)^3$ g) $\sqrt[3]{1-y^3}$
3) Não, pois f não é injetora, por exemplo: f(-1)=f(1)=1, e portanto f não é bijetora.
4) a) $(y+2)/12$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{y-3}{2}}$ c) $\sqrt{4-y}$ d) $\dfrac{3+\sqrt{y}}{2}$ e) $\sqrt{y^2-3}$

Função simétrica

Definição: Seja f^{-1}: B →A a função inversa de uma função f. Se trocarmos, nessa função, a variável x por y e a variável y por x, teremos uma nova função, que chamaremos função simétrica.

Exemplos:

1) Seja $f^{-1} : \underset{y}{B \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f^{-1}(y) = x = \frac{y-2}{3}}{A \subset \mathbb{R}}$. A simétrica dessa função é a fun-ção $g : \underset{x}{B \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{g(x) = y = \frac{x-2}{3}}{A \subset \mathbb{R}}$.

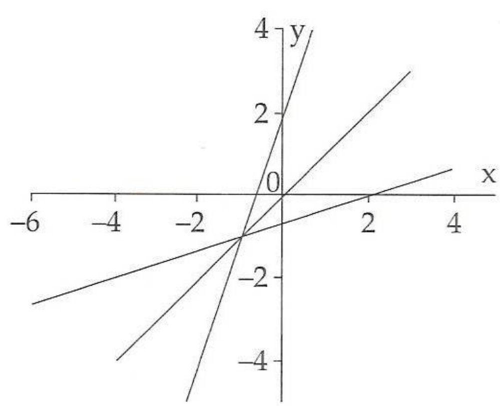
2) Seja $f^{-1} : \underset{y}{\mathbb{R}_+} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f^{-1}(y) = x = \sqrt{y}+1}{[1; +\infty)}$. A simétrica dessa função é a função $g : \underset{x}{\mathbb{R}_+} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{g(x) = y = \sqrt{x}+1}{[1; +\infty)}$.

3) Seja $f^{-1} : \underset{y}{B \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f^{-1}(y) = x = \frac{3y}{y+1}}{A \subset \mathbb{R}}$. A simétrica dessa função é a fun-ção $g : \underset{x}{B \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{g(x) = y = \frac{3x}{x+1}}{A \subset \mathbb{R}}$.

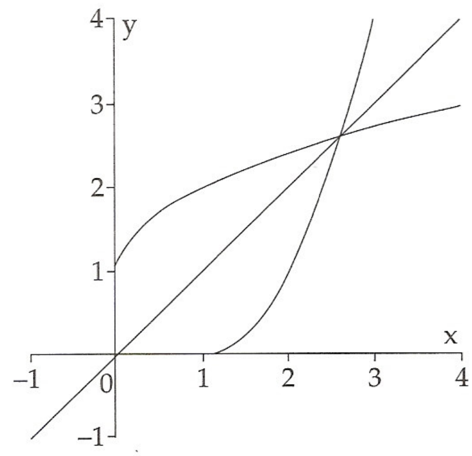
OBS: Grande parte da literatura chama essa função g de função inversa da função f. Geometricamente, os gráficos da função f e da função simétrica g são simétricos em relação à reta f(x)=x.

Exemplos:

1) $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x) = y = 3x+2}{B \subset \mathbb{R}}$ e $g : \underset{x}{B \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{g(x) = y = \frac{x-2}{3}}{A \subset \mathbb{R}}$.



2) $f \;:\; \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \;\underset{\mapsto}{\to}\; \underset{f(x)=y=(x-1)^2}{B \subset \mathbb{R}}$ e $g \;:\; \underset{x}{\mathbb{R}_+} \;\underset{\mapsto}{\to}\; \underset{g(x)=y=\sqrt{x}+1}{[1;+\infty)}$.



Exercícios

1) Dada a função $f \;:\; \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \;\underset{\mapsto}{\to}\; \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$, determine o domínio e a imagem da função e sua função simétrica:

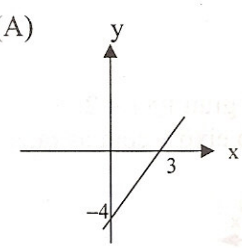
a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = 4x - 1$

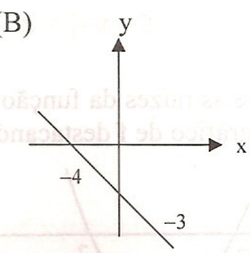
c) $f(x) = 3x + \dfrac{2}{3}$

2) Assinale o gráfico que representa a função simétrica da função f(x)=3-(3/4)x

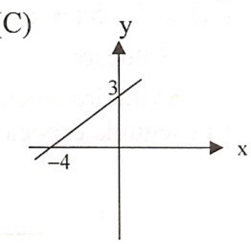
(A)



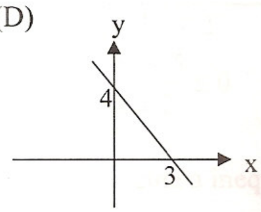
(B)



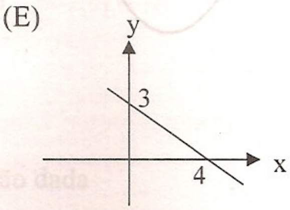
(C)



(D)



(E)



Exercícios propostos:

1) Dada a função $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$, determine o domínio e a imagem da função e sua função simétrica:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

b) $f(x) = 2x+5$

2) Sejam $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x)=y_1}{B \subset \mathbb{R}}$ e $g : \underset{x}{C \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{g(x)=y_2}{D \subset \mathbb{R}}$. Determinar $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e suas funções inversa e simétrica:

a) $f(x) = x+2$ e $g(x) = x-1$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x} - 4$ e $g(x) = x-3$

c) $f(x) = x+7$ e $g(x) = -\dfrac{x}{2} - 8$

Respostas

1) a) D= IR-{2} e Im(f)=IR . Função simétrica é: y=(2x+1)/(1-x)
b)D=IR e Im(f)=IR . Função simétrica: y=x/2 – 5/2.

2) a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)+2 = x+1 = y$.

Isolando o x, temos:

$x+1 = y \Rightarrow x = y-1 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = x = y-1$ (inversa)

$s(x) = y = x-1$ (simétrica)

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)-1 = x+1 = y$

Isolando o x, temos:

$x+1 = y \Rightarrow x = y-1 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(y) = x = y-1$ (inversa)

$s(x) = y = x-1$ (simétrica)

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = \dfrac{3}{x-3} - 4 = y$

Isolando o x, temos:

$$\frac{3}{x-3} - 4 = y \Rightarrow \frac{3}{x-3} = y+4 \Rightarrow 3 = (x-3)(y+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3 = \frac{3}{y+4} \Rightarrow x = \frac{3}{y+4} + 3$$

$\Rightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = x = \dfrac{3}{y+4} + 3$ (inversa)

$s(x) = y = \dfrac{3}{x+4} + 3$. Para isolarmos o x, primeiro faremos o m.m.c.:

$y = \dfrac{3}{x+4} + 3 = \dfrac{3+3x+12}{x+4} = \dfrac{3x+15}{x+4}$ (simétrica)

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{3}{x} - 4\right) = \left(\dfrac{3}{x} - 4\right) - 3 = \dfrac{3}{x} - 7 = y$

Isolando o x, temos:

$$\frac{3}{x}-7=y \Rightarrow \frac{3}{x}=y+7 \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{1}{y+7} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(y)=x=\frac{3}{y+7} \text{ (inversa)}$$

$$s(x)=y=\frac{3}{x+7} \text{ (simétrica)}$$

c) $$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f\left(-\frac{x}{2}-8\right)=-\frac{x}{2}-8+7=-\frac{x}{2}-1=y$$

Isolando o x, temos:

$-\frac{x}{2}-1=y$. Multiplicando essa equação por (–1), temos:

$$\frac{x}{2}+1=-y \Rightarrow \frac{x}{2}=-y-1 \Rightarrow x=-2y-2$$

$$(f \circ g)^{-1}(y)=x=-2y-2 \text{ (inversa)}$$

$$s(x)=y=-2x-2 \text{ (simétrica)}$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+7)=-\frac{x+7}{2}-8=\frac{-x-7-16}{2}=\frac{-x-23}{2}=y$$

Isolando o x, temos:

$$\frac{-x-23}{2}=y \Rightarrow -x-23=2y \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(y)=x=-2y-23 \text{ (inversa)}$$

$$s(x)=y=-2x-23 \text{ (simétrica)}$$