2. Função polinomial do 2º grau

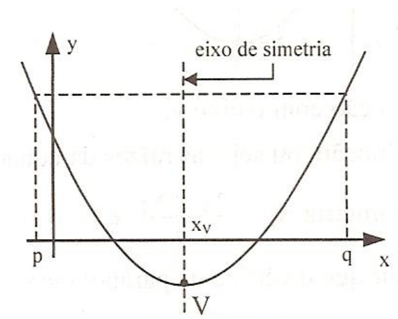
Uma função f: IR $\rightarrow$ IR que associa a cada x $\in$ IR o número

$$\boxed{y=f(x)=ax^2+bx+c}$$

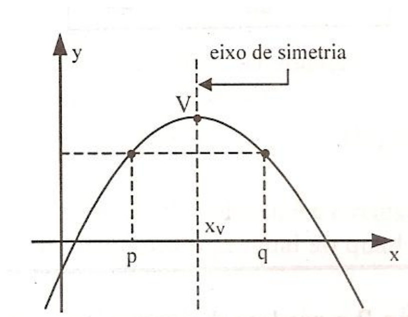
com a,b,c $\in$ IR e a$\neq$0 é denominada função polinomial do 2º grau ou função quadrática.

<u>Forma fatorada</u>: $a(x-r_1)(x-r_2)$, onde r_1 e r_2 são as raízes da função.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.



a>0: concavidade voltada para cima

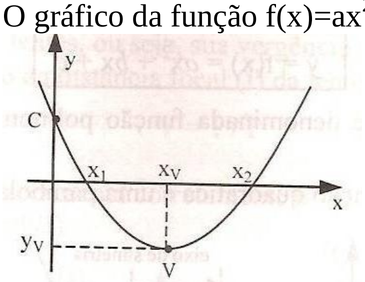


a<0: concavidade voltada para baixo

$$\boxed{\text{Simetria: } f(p)=f(q) \rightarrow x_v = \frac{p+q}{2}}$$

<u>Elementos de uma parábola</u>

O gráfico da função $f(x)=ax^2+bx+c$ possui os seguintes elementos:



- <u>Concavidade</u>: a>0: concavidade voltada para cima
  a<0: concavidade voltada para baixo
- (0,c): ponto de interseção com o eixo y.
- <u>zeros da função</u>, ou seja, as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$.
  Para obter essas raízes, calculamos inicialmente o número $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos 3 casos a considerar:

  1. Se $\Delta>0$, a equação apresentará duas raízes distintas que são:

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Se Δ=0, a equação apresentará duas raízes iguais que são: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

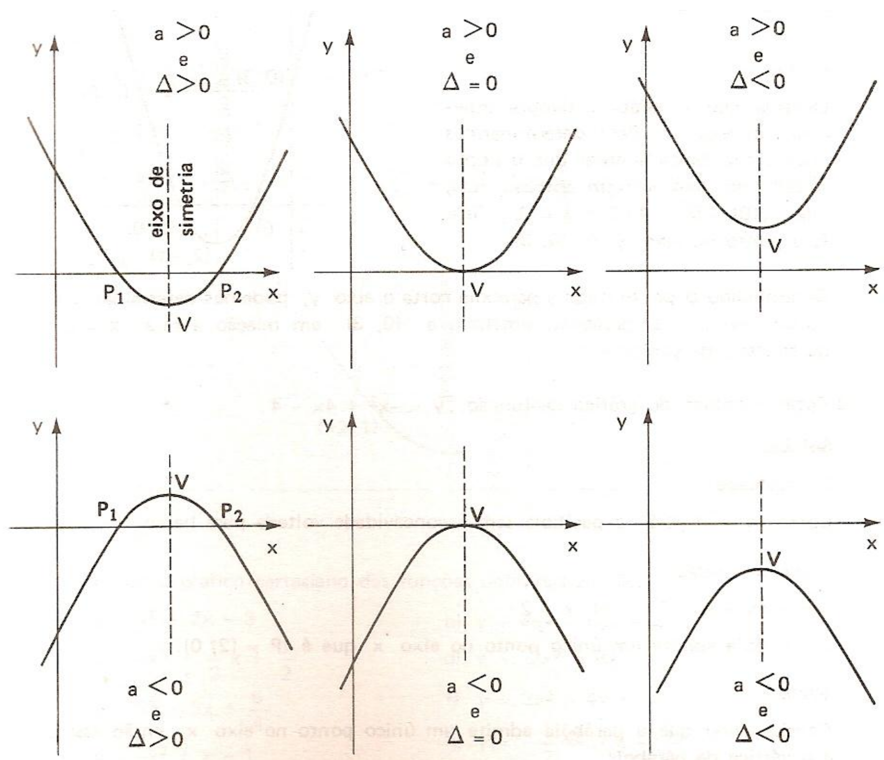
3. Se Δ<0, considerando que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin IR$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

- Pela propriedade da simetria: $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\quad e \quad$ $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Pode-se então concluir que o vértice da parábola V(x_v,y_v), tem coordenadas:

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2a} \quad e \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

Seguem-se os tipos de gráfico que podemos obter:



Domínio e imagem da função quadrática

D=IR

Para definir a imagem da função quadrática, precisamos definir dois casos:

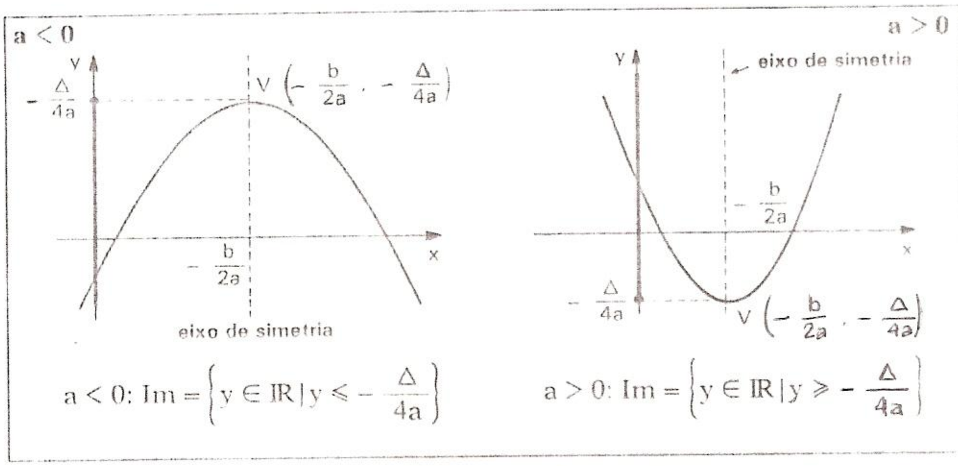
1. a>0 $\rightarrow$ y $\geq \frac{-\Delta}{4a}$, $\forall$ x$\in$ IR. Nesse caso, Im(f)={y$\in$ IR / y $\geq \frac{-\Delta}{4a}$ }

2. $a<0 \rightarrow y \leq \frac{-\Delta}{4a}$, $\forall\ x \in$ IR. Nesse caso, Imf={ $y \in$ IR / $y \leq \frac{-\Delta}{4a}$ }

OBS: Dada a equação do 2ºgrau $ax^2+bx+c=0$ e sejam x_1 e x_2 suas raízes. Temos que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad e \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Resumindo,



Máximo e mínimo da função do 2ºgrau

Definição: Dizemos que o número $y_M \in$ Im(f) ($y_m \in$ Im(f)) é o valor máximo (mínimo) da função y=f(x) se, e somente se, $y_M \geq y$ ($y_m \leq y$) para qualquer $y \in$ Im(f) e o valor de $x_M \in$ D(f) ($x_m \in$ D(f)) tal que $y_M = f(x_M)$ ($y_m = f(x_m)$) é chamado de ponto de máximo (mínimo) da função.

Teorema: A função quadrática $y= ax^2+bx+c$ admite um valor máximo (mínimo) $y=\frac{-\Delta}{4a}$ em $x=\frac{-b}{2a}$ se, se somente se, $a<0$ ($a>0$).

Aplicação: Funções receita e custo quadrática

Seja q a quantidade vendida de um produto. Chamamos de função receita R ao produto de q pelo preço de venda. A função lucro L é definida como a diferença entre a função receita R e a função custo.

Suponha que o preço de um produto é constante e igual a 15, então a receita será: R=15q. Vejamos como obter a receita quando o preço pode ser modificado (com conseguinte alteração da demanda, de acordo com a função de demanda).

Exemplo: A função de demanda de um produto é p=10-q e a função custo é C=20+q. Vamos obter:

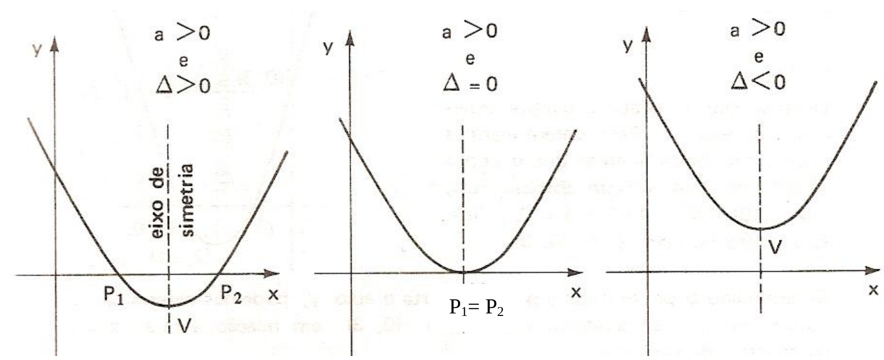
a) função receita, seu gráfico e o preço que a maximiza e a receita máxima.
b) Função lucro, o preço que a maximiza e o lucro máximo.

2.1 Inequação do 2º grau

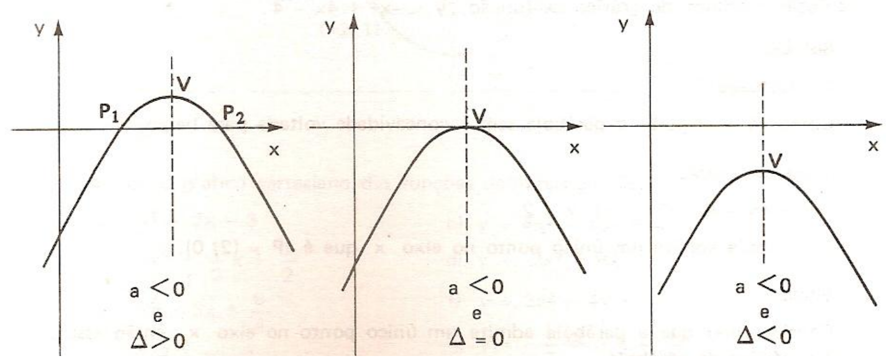
Se $a \neq 0$ as inequações $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \geq 0$ e $ax^2+bx+c \leq 0$ são denominadas inequações do 2º grau. Para resolver cada uma dessas inequações é necessário estudar o sinal de f(x), que pode inclusive ser feito através do gráfico da função.

Vamos resolver, por exemplo, a inequação: $ax^2+bx+c>0$, ou seja, determinar se existe x real tal que $f(x)= ax^2+bx+c$ seja positiva.

O resultado desse exemplo dependerá do valor de a e Δ.



$S=\{x \in IR / x<P_1$ ou $x>P_2\}$ $S=\{x \in IR / x \neq P_1\}$ $S=IR$



$S=\{x \in IR/ P_1<x<P_2\}$ $S=\varnothing$ $S=\varnothing$

Exemplo:

1) Determine os conjuntos soluções das inequações:

a) $2x^2-5x+2<0$
b) $x^2-2x+2>0$

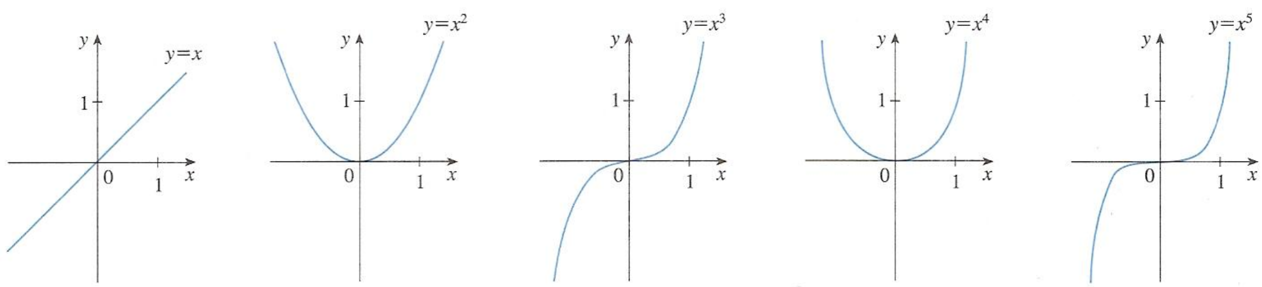
Exercícios propostos:

1) Resolva cada uma das seguintes inequações:
   a) $-2x^2+5x+3>0$
   b) $x^2+3x+4\geq 0$

3. Funções potência

Uma função da forma $f(x)=x^n$, onde n é uma constante, é chamada **função potência.**

Os gráficos de $f(x)=x^n$ para n=1,2,3,4 e 5 são dados a seguir.

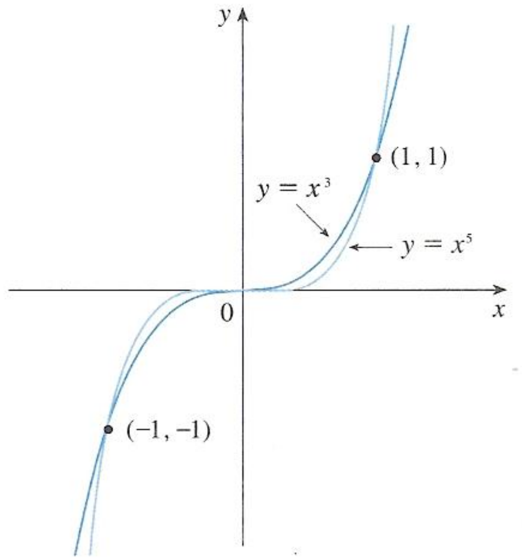


A forma geral do gráfico de $f(x)=x^n$ depende de a ser par ou ímpar. Vamos considerar vários casos.

Exemplo1: Faça o esboço do gráfico de $f(x)=x^3$.

a) Domínio: IR

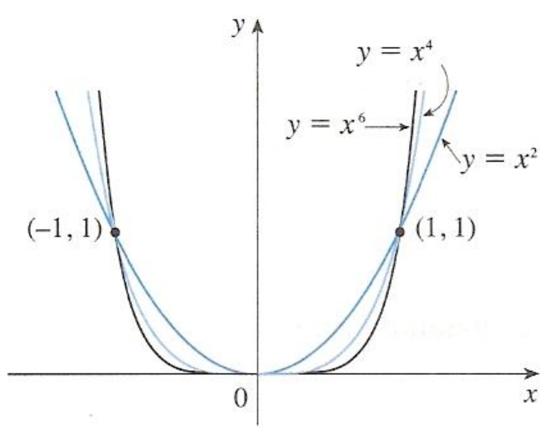
OBS: Se n for ímpar, então $f(x)=x^n$ será uma função ímpar e seu gráfico é similar ao de $y=x^3$.



Exemplo 2: Faça o esboço do gráfico de $f(x)=x^2$.

a) Domínio: IR
b) Imagem: conjunto dos reais não negativos: IR^+.

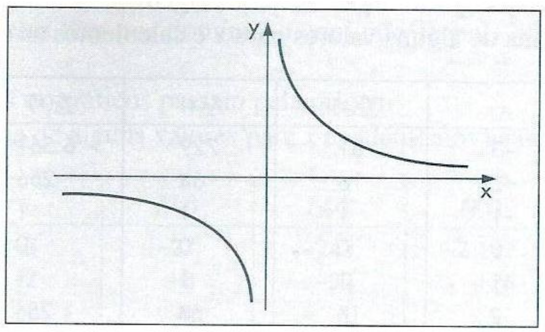
OBS: Se n for par, então $f(x)=x^n$ será uma função par e seu gráfico é similar ao da parábola $y=x^2$.



Exemplo 3: Faça o esboço do gráfico de $f(x)=x^{-1} = 1/x$.

a) Domínio: IR-{0}
b) Interceptos (interseção com o eixo 0x ou 0y): não há.
Tomemos alguns valores para c e calculemos as respectivas imagens

x	-2	-1	-1/2	-1/3	-1/4	¼	1/3	½	1	2	3
y	-1/2	-1	-2	-3	-4	4	3	2	1	½	1/3



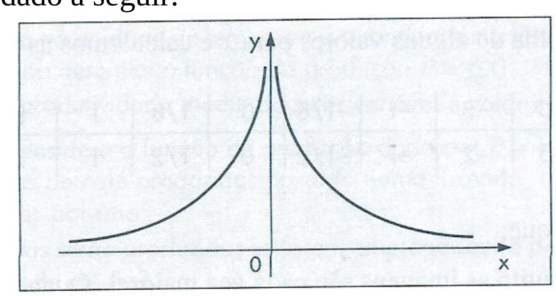
OBS: Pode-se verificar (construindo-se tabelas de valores) que as demais funções desse tipo, por exemplo, $f(x)=x^{-3} = 1/x^{3}$ ou $f(x)=x^{-5} = 1/x^{5}$) possuem um padrão gráfico semelhante ao da função 1/x.

Exemplo 4: Faça o esboço do gráfico de $f(x)=x^{-2} = 1/x^2$

a) Domínio: IR-{0}
b) Interceptos: não há.
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculamos as respectivas imagens:

x	−3	−2	−1	−1/2	−1/4	1/4	1/2	1	2	3
$f(x)$	1/9	1/4	1	4	16	16	4	1	1/4	1/9

O gráfico dessa função é dado a seguir.



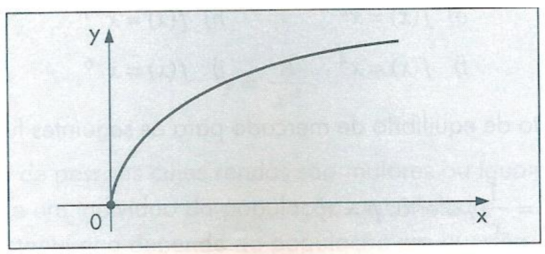
d) Imagem(f)=IR_+^* (conjunto dos reais positivos)

OBS: Pode-se verificar (construindo-se tabelas de valores) que as demais funções desse tipo (por exemplo, $f(x)=x^{-4} = 1/x^{4}$ ou $f(x)=x^{-6} = 1/x^{6}$) possuem um padrão gráfico semelhante ao da figura anterior. O conjunto imagem dessas funções é o conjunto dos números reais positivos.

Exemplo 5: Faça o esboço do gráfico da função raiz quadrada, isto é $f(x)=x^{1/2}=\sqrt{x}$.

a) Domínio: IR^+ (conjunto dos reais não negativos)=$[0, \infty)$
b) Interceptos: (0,0)
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

x	0	1/4	1	2,25	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1/2	1	1,5	2	3	4	5	6



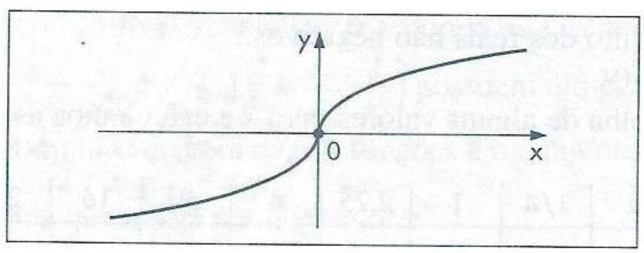
d) Imagem(f)=IR_+ (conjunto dos reais não negativos)

OBS: Para outros valores pares de n, o gráfico de $y=\sqrt[n]{x}$ é similar ao de $y=\sqrt{x}$.

Exemplo 6: Faça o esboço do gráfico da função raiz cúbica $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

a) Domínio: IR (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica).
b) Interceptos: (0,0).
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

x	−27	−8	−1	−1/8	0	1/8	1	8	27
$f(x)$	−3	−2	−1	−1/2	0	1/2	1	2	3



d) Imagem(f)= IR

OBS: O gráfico de $y=\sqrt[n]{x}$ para n ímpar (n>3) é similar ao de $y=\sqrt[3]{x}$.

4. Função modular

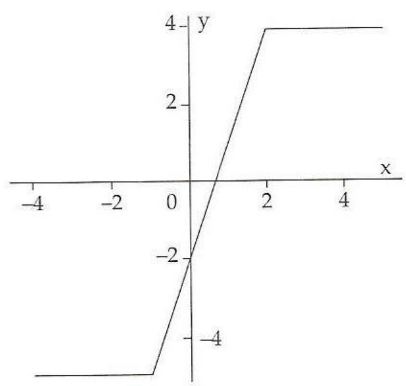
4.1. **Função definida por várias sentenças**

Uma função pode ser dividida em várias sentenças, onde o domínio dela é a união dos domínios das sentenças.

Exemplo:

$$f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$$

1) $$f(x) = \begin{cases} -5 & \text{se} \quad x < -1 \\ 3x - 2 & \text{se} \quad -1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$



Observando o gráfico, temos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-5; 4]$.

4.2 Função modular

Uma função f recebe o nome de função modular ou função módulo se:

f: IR $\rightarrow$ IR
x | x |

f(x)=| x |= $\begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$

D(f)=IR
Im(f)=IR $_{+}$

Exemplo 1:

Dadas as funções $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$ definidas a seguir, construir seus gráficos, determinar seus domínios e imagens:

1) $f(x) = y = |3x + 4|$

Solução:

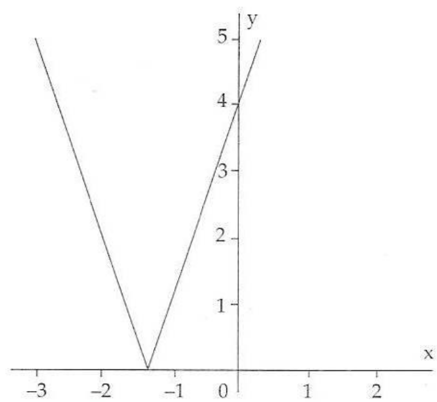
Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |3x+4| = \begin{cases} 3x+4 & \text{se} \quad 3x+4 \geq 0 \\ -(3x+4) & \text{se} \quad 3x+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+4 & \text{se} \quad x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -3x-4 & \text{se} \quad x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

Para $x < -\frac{4}{3}$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -3x - 4$ e para $x \geq -\frac{4}{3}$, traça-se o gráfico da função $f(x) = 3x + 4$.

O gráfico é apresentado a seguir:



5. Função exponencial

Definição: A função f: IR →IR dada por $f(x)=a^x$ ($a \neq 1$; $a>0$) é denominada função exponencial de base a e definida para todo x real.

Exemplos:

$f(x) = 3^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$, $f(x) = 5^x$, $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

Domínio: IR

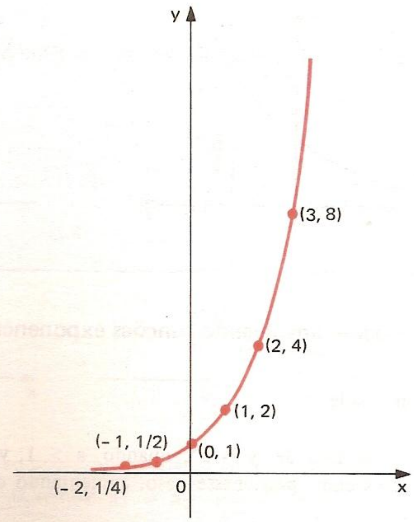
Imagem: IR_+^*

Gráfico: Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais e observar algumas de suas propriedades. O gráfico da função exponencial apresenta dois tipos de comportamento: um, quando a>1, e outro quando 0<a<1.

Exemplo1: $f(x)=2^{x}$, a>1

x aumenta — y aumenta

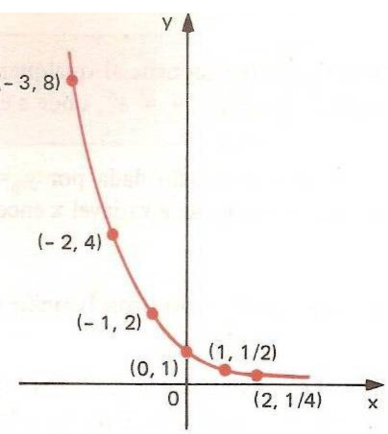
x	y
- 2	1/4
- 1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



Exemplo 2: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, onde 0<a<1

x aumenta — y diminui

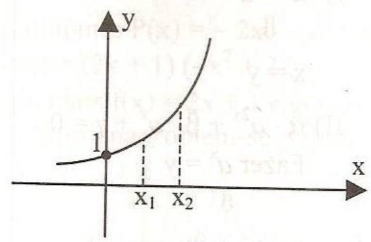
x	y
- 3	8
- 2	4
- 1	2
0	1
1	1/2
2	1/4



Caso geral:

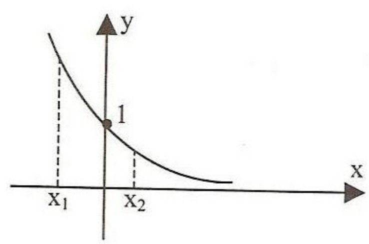
A função exponencial pode ser crescente ou decrescente:

f(x) = a^x é crescente se $a > 1$



$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (mantém a desigualdade).

f(x) = a^x é decrescente se $0 < a < 1$



$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (troca a desigualdade)

Note que se $a > 0$, então $a^x > 0$ para todo $x \in R$, isto é o conjunto imagem d função $y = a^x$ é R_+^*

6. Função logarítmica

Definição (logaritmo): Sendo a e b números reais positivos, com a≠1, chama-se logaritmo de b na base a o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Na expressão $\log_a b = x, temos$:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.

Exemplos:

$\log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$

$\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\log_7 7 = 1$, pois $7^1 = 7$

$\log_5 1 = 0$, pois $5^0 = 1$

$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, pois $2^{1/2} = \sqrt{2}$

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

<u>Propriedades do logaritmo:</u>

$$\boxed{\begin{gathered}\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B \\ \log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B \\ \log_a A^m = m \cdot \log_a A\end{gathered}}$$

Exemplo: log 6=log(2.3)=log2+log3
log 5/3=log5-log3
$\log\sqrt{7} = \log 7^{1/2} = (1/2)\log 7$

Função logarítmica

A função f: $R_+^* \to R$ dada por **f(x)= $\mathbf{\log_a x}$** ($a \neq 1$; $a > 0$) é denominada função logarítmica na base ***a*** e definida para todo **x** real positivo e não nulo.

OBS:

1. y= $\log_a 1$=0, isto é, o gráfico de y= $\log_a x$ intercepta o eixo OX no ponto de abscissa x=1.

2. Em particular, temos que:
Se a=10, a funçao dada por y= $\log_{10} x$ é chamada função logaritmo decimal e será indicada por y=logx.

Se a=e(≈2,7) escrevemos y=lnx para indicar a funçao logaritmo na base e, ou seja, para indicar a função logaritmo natural.

Gráfico

Como $a>0$ e $a\neq1$, temos duas possibilidades: $a>1$ ou $0<a<1$.

Exemplo1: $y=\log_2 x$ (base 2)

x	1/4	1/2	1	2	8
y	-2	-1	0	1	3

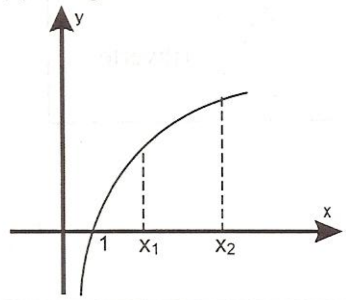
l) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (base 1/2)

Caso geral:

a) Seja $a>1$

$x_1<x_2 \rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Daí, f é crescente.

$f(x) = \log_a x$ é crescente se $a > 1$

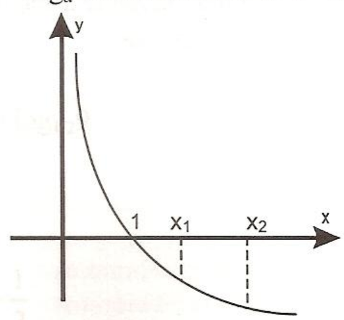


$$\boxed{\begin{array}{c}\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ \text{(mantém a desigualdade)}\end{array}}$$

b) Seja $0<a<1$

$x_1<x_2 \rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Daí, f é decrescente.

$f(x) = \log_a x$ é decrescente se $0 < a < 1$

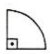
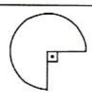
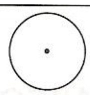


$$\boxed{\begin{array}{c}\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ \text{(troca a desigualdade)}\end{array}}$$

O conjunto imagem da função logaritmo é igual ao domínio da função exponencial que é sua inversa; portanto, $I_m = R$.

7. Funções trigonométricas

São funções periódicas, isto é, após um certo ponto, os seus gráficos se repetem. Essas funções ampliam nossa capacidade de descrever processos físicos uma vez que vários fenômenos naturais são repetitivos ou cíclicos, por exemplo, o movimento dos planetas em nosso sistema solar, as vibrações de um terremoto e o ritmo habitual do batimento cardíaco. Temos ainda que no estudo dos ciclos de negócio, as variações sazonais, ou outras variações cíclicas são descritas por funções seno e cosseno.

ARCO	GRAU	RADIANO
	90º	$\frac{\pi}{2}$ rad
	180º	π rad
	270º	$\frac{3\pi}{2}$ rad
	360º	2π rad

Relações importantes: $360^0 = 2\pi$ radianos

$180^0 = \pi$ radianos

$90^0 = \pi/2$ radianos

OBS: π é um número irracional cujo valor é 3,14159...

Exemplos:

1) Exprimir 160º em radianos

180º ------- π rad

160º ------- x rad   Daí, $x = 8\pi/9$ rad

2) Exprimir $5\pi/6$ rad em graus

180º -------- π rad

x -------- $5\pi/6$ rad

Daí, x= 150º

O ciclo trigonométrico

O conceito expresso pela palavra ciclo foi introduzido pelo matemático francês Laguerre. Significa uma circunferência com uma direção predefinida, isto é, orientada. Pode-se trabalhar nos sentidos horário ou anti-horário.

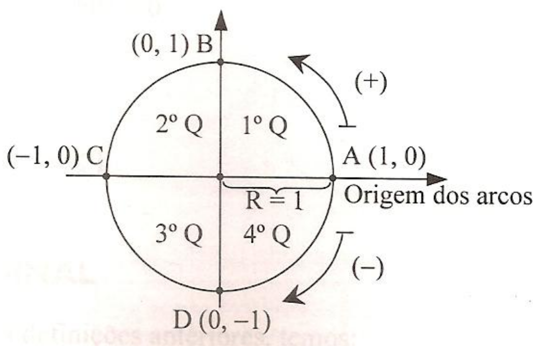
Chama-se ciclo trigonométrico a circunferência de raio 1 (R=1), associada a um sistema de eixos cartesianos ortogonais, para a qual valem as seguintes convenções:

I) A origem do sistema coincide com o centro da circunferência.

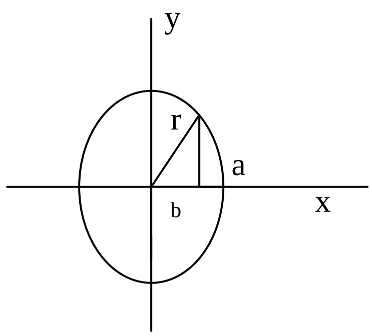
II) O ponto A de coordenadas (1,0) é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.

III) O sentido positivo do percurso é o anti-horário e o negativo é o horário.

IV) Os pontos A(1,0), B(0,1), C(-1,0) e D(0,-1) dividem a circunferência em quatro partes denominadas quadrantes que são contados a partir de A no sentido anti-horário.



As funções trigonométricas de um ângulo θ são o seno (senθ), o cosseno (cosθ), a tangente (tgθ), a cossecante (cosecθ), a secante(secθ) e a cotangente(cotgθ). Quando o ângulo θ está no centro de um círculo de raio r e é medido no sentido oposto ao dos ponteiros do relógio, as funções trigonométricas são definidas pelas equações:



senθ= a/r   cosθ=b/r   tgθ=a/b

7.1 Função seno

Chama-se função seno a toda função f:IR → IR definida por $\boxed{y=f(x)=\text{sen } x}$

- Domínio: IR.
- Imagem: [-1,1], isto é, -1 ≤ sen(α) ≤ 1 (significa que essa função é limitada).

<u>Valores notáveis</u>

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
sen x	0	½	√2/2	√3/2	1	0	-1	0

Sinais

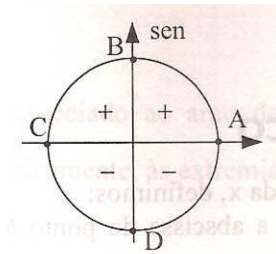
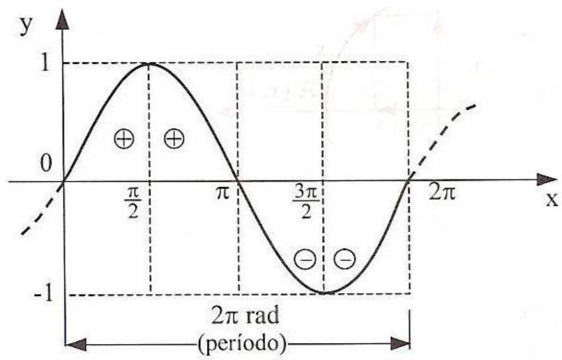


Gráfico: (senóide)



7.2 Função cosseno

Chama-se função cosseno a toda função f:IR → IR definida por $\boxed{y=f(x)=\cos(x)}$

- Domínio: IR.
- Imagem: [-1,1], isto é, $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ (significa que essa função é limitada).

Valores notáveis

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
cos x	1	√3/2	√2/2	½	0	-1	0	1

Sinais

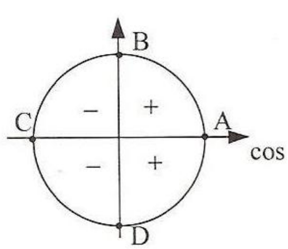
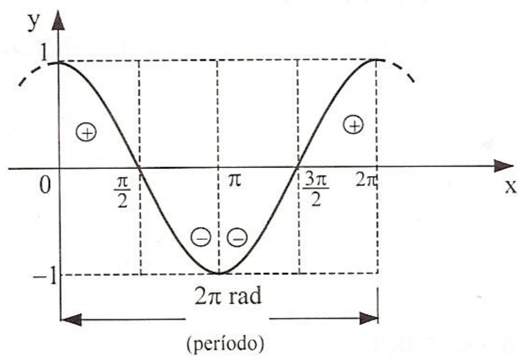


Gráfico (cossenóide)



<u>Identidades trigonométricas:</u>

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$

7.3 Função tangente

Chama-se função tangente a toda função

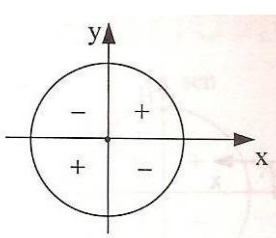
f: $\{x \in IR \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow IR$ definida por $\boxed{y = f(x) = \text{tg } x}$

- Domínio={x ∈ IR/ x ≠ π/2 + kπ, k ∈ Z}
- Imagem: IR

<u>Valores notáveis</u>

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
tg x	0	√3/3	1	√3	∄	0	∄	0

<u>Sinais</u>



<u>Gráfico</u> (tangentóide)