4. Função

O objeto fundamental do cálculo são as funções. Assim, num curso de Pré-Cálculo é importante estudar as idéias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los.

Ao estudar algum fenômeno de qualquer natureza, sempre se procura estabelecer relações entre as grandezas envolvidas. Se duas grandezas x e y estão relacionadas de tal maneira que a cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor associado a y, então se diz que y é uma função de x. Por exemplo, a distância percorrida por um carro em um determinado período de tempo é uma função de sua velocidade, a área de uma circunferência é uma função de seu raio, a área de um quadrado é uma função de seu lado, a população de um determinado país é uma função do tempo, dentre muitos outros exemplos.

Definição: Uma função f é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto A um único elemento de um conjunto B. $f: A \to B$

$$x \quad f(x)$$

Se $x \in A$ então o elemento de B que f associa a x é denotado f(x).

O conjunto A é chamado domínio da função.
O conjunto B é chamado de contradomínio da função.
O conjunto que compreende todos os valores assumidos por y=f(x) quando x toma todos os possíveis valores em seu domínio é chamado de imagem da função f.

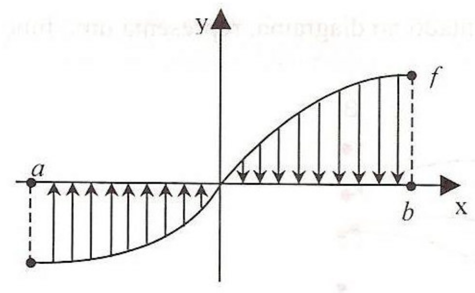
OBS:

1. x é denominada variável independente da função (varia sem depender de nenhuma outra variável).
2. y é chamada variável dependente da função (como y=f(x), temos que y depende da variação da variável x) .

Uma função de uma variável real a valores reais é uma função $f: A \to B$, onde A e B são subconjuntos de IR.
Seja $f: A \to B$ uma função. O conjunto $G_f=\{ (x, f(x)) \,/\, x \in A \}$ denomina-se gráfico de f. Assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x,y) de números reias. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto (x,f(x)) quando x percorre o domínio de f.

Domínio

Para determinarmos o domínio (leia "o maior domínio") de uma função, estaremos procurando qual o maior conjunto possível $A \subset$ IR que satisfaça a lei de correspondência definida (lembremo-nos de que, para termos uma função, todos os elementos do conjunto A têm que estar associados a um elemento em B).
Graficamente, o domínio da função é a projeção do gráfico de f, sobre o eixo das abscissas.



Domínio: [a,b]

Problemas de domínio

$$f(x)=\frac{n(x)}{d(x)} \Rightarrow d(x)\neq 0;$$

$$f(x)=\sqrt[\text{par}]{r(x)} \Rightarrow r(x)\geq 0$$

$$f(x)=\frac{n(x)}{\sqrt[\text{par}]{d(x)}} \Rightarrow d(x)>0$$

É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por $y=f(x),\ x\in A$

Exemplo 1: Seja $y=f(x)=x^2$. Tem-se:

a) $D_f = \mathbb{R}$
b) $f(2)=2^2=4$ (o valor que f assume em 2 é 4)
c) $f(-1)=(-1)^2=1$
d) $f(0)=0^2=0$
e) $f(t)=t^2$
f) $f(x+1)=(x+1)^2$
g) Gráfico de $f = \{(x,y) / \ y=x^2,\ x\in \mathbb{R}\}$

Exemplo 2:

Seja $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ uma função. Vamos determinar o (maior) domínio das seguintes leis de correspondência:

a) $f(x)=7x$

b) $f(x)=y=\dfrac{1}{2x+4}$

c) $f(x)=\sqrt{x-8}$

d) f(x)= $\dfrac{2}{x^2+x}$

e) f(x)= $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

f) f(x)= $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$

Exemplo 3: Dada a função f(x)=-x^2+2x , simplifique:

a) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

b) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Exercícios:

1) Calcule:

a) g(0), g(2) e g($\sqrt{2}$) sendo g(x)= $\frac{x}{x^2-1}$

b) $\frac{f(a+b)-f(a-b)}{ab}$, sendo $f(x)=x^2$ e $ab \neq 0$

2) Simplifique $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} (x \neq p)$ sendo dados:

a) $f(x)=x^2$ e p=1
b) $f(x)=x^3$ e p=2
c) $f(x)=x^3$ e p qualquer
d) f(x)=5 e p=2
e) $f(x)=\frac{1}{x}$ e p=1
f) $f(x)=x^2-3x$ e p=-2

Exercícios propostos:

1) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $y=\sqrt[3]{x+1}$
b) $y=\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{3x+1}$
c) $y=\frac{x}{x^2-x-6}+\frac{1}{x+4}$
d) $y=\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x-1}}$
e) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2) Determinar o domínio das seguintes funções $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$:

a) $f(x)=x^2+2x$
b) $f(x)=\frac{x}{2x-7}$
c) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{4-x}}$
d) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-9}$
e) $f(x)=\sqrt[7]{x^2-9}$
f) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$
g) $f(x)=\sqrt{x-2}-\frac{x+1}{x-3}$
h) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

3) Simplifique $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $(h \neq 0)$ sendo $f(x)$ igual a

$a)$ $2x+1$
$b)$ $3x-8$
$c)$ $-2x+4$
$d)$ x^2
$e)$ x^2+3x
$f)$ $-x^2+5$
$g)$ x^2-2x
$h)$ x^2-2x+3
$i)$ $-2x^2+3$
$j)$ $2x^2+x+1$
$l)$ x^3
$m)$ x^3+2x
$n)$ x^3+x^2-x
$o)$ 5
$p)$ $\dfrac{1}{x}$
$q)$ $2x^3-x$
$r)$ $\dfrac{1}{x^2}$
$s)$ $\dfrac{1}{x+2}$

Respostas:

1) a) IR b) {x∈IR/x≥-1/3}ou [-1/3, +∞[

c){ x∈IR /x≠-4 e x≠-2 e x≠-3}ou]- ∞,-4[U]-4,-3[U]-3,-2[U]-2,+ ∞[

d) { x∈IR /x>1/3} e){ x∈IR /x≠0}

2)

a) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

f) $[2,+\infty)$

c) $[2,4)\cup(4,+\infty)$

g) $[2,3)\cup(3,+\infty)$

d) $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

h) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty$

3. $a)$ 2 $b)$ 3 $c)$ -2 $d)$ $2x+h$ $e)$ $2x+3+h$ $f)$ $-2x-h$

$g)$ $2x-2+h$ $h)$ $2x-2+h$ $i)$ $-4x-2h$ $j)$ $4x+1+2h$

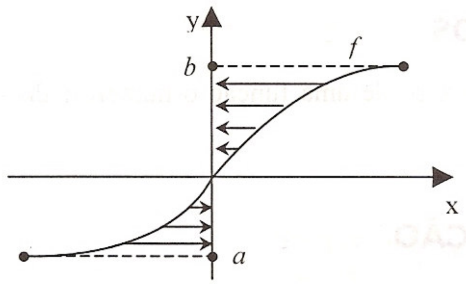
$l)$ $3x^2+3xh+h^2$ $m)$ $3x^2+2+3xh+h^2$

$n)$ $3x^2+2x-1+3xh+h+h^2$ $o)$ 0 $p)$ $-\dfrac{1}{x(x+h)}$

$q)$ $6x^2-1+6xh+2h^2$ $r)$ $-\dfrac{2x+h}{x^2\,(x+h)^2}$ $s)$ $-\dfrac{1}{(x+2)(x+2+h)}$

<u>Imagem e contradomínio</u>

O conjunto que compreende todos os valores assumidos por y=f(x) quando x toma todos os possíveis valores em seu domínio é chamado de <u>imagem</u> da função f.
Graficamente, o conjunto imagem da função é a projeção do gráfico de f sobre o eixo das ordenadas.



Im(f) = [a,b]

Raízes ou zeros

Chama-se raiz ou zero de uma função o número r do seu domínio tal que f(r)=0.

Taxa de variação

Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos do domínio de uma função f. Chama-se taxa de variação média de f entre x_1 e x_2 a razão:

$$\boxed{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}, x_1 \neq x_2}$$

Exercício

1) Dada a função f(x)=$\sqrt{2x-1}$, responda:

a) Qual o seu domínio?
b) Qual a imagem de x=5?
c) Qual o valor de x que possui imagem 5?

OBS: Uma função f com valores em IR só está bem definida quando sabemos seu (maior) domínio e sua lei de correspondência.

Igualdade de funções

Sejam f e g duas funções definidas, respectivamente em D1 e D2. Dizemos que f e g são iguais quando D1=D2 e f(x)=g(x), para todo x $\in$D1.

Exemplos:

1) f: IR $\to$ IR e g: IR $\to$ IR são iguais, pois $|x|=\sqrt{x^2}$, $\forall$x $\in$ IR.
x $|x|$ x $\sqrt{x^2}$

2)) f: $IR^+ \to$ IR e g: $IR^+ \to$ IR são iguais, pois |x|=x, $\forall$x $\in$ IR^+.
x $|x|$ x x

3) f: IR $\rightarrow$ IR e g: IR $\rightarrow$ IR são diferentes para valores de x negativos.
x |x| x x

Exemplo: se x = -5, f(-5) = | 5 | = 5 e g(-5) = -5.

Função polinômio

Definição: Um polinômio ou função polinomial P, na variável x, é toda expressão do tipo:

P(x)=$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde n$\in$IN, $a_i, i = 0,1,...,n$ são números reais chamados coeficientes e as parcelas $a_i x^i, i = 1,...,n$, termos do polinômio. Cada termo é denominado monômio.

Gráfico: A representação gráfica de um polinômio pode ser feita por pontos. No entanto, para a representação gráfica de uma função polinômio de grau n>2, num intervalo dado, devemos tomar o cuidado de considerar um número suficientemente grande de pontos do referido intervalo a fim de evitar erros grosseiros de representação.

Os polinômios são usados comumente para modelar diversas quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais. Por exemplo, os economistas frequentemente usam uma função polinomial para representar o custo da produção de x unidades de um produto.

4.1 Função afim ou função polinomial do 1º grau

Denomina-se função afim ou função polinomial do 1º grau a função que associa a todo número real x, outro número real y, tal que:

$$\boxed{y=f(x)=ax+b},$$

onde a e b são constantes reais (a$\neq$0).

Domínio: O domínio da função afim é IR.
Imagem: IR
Gráfico: Reta não paralela aos eixos x e y.
Interseção da reta com o eixo 0y: (0,b). Assim, o número b chama-se coeficiente linear.
Interseção da reta com o eixo 0x: (-b/a,0). Graficamente, a interseção da reta com o eixo 0x é o zero de uma função do 1º grau.

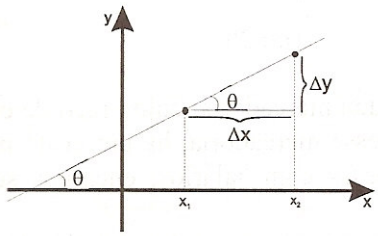
O valor –b/a é a raiz dessa função. A taxa de variação de uma função do 1º grau é constante e igual ao coeficiente a.

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} = \frac{ax_1-ax_2}{x_1-x_2} = \frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = a \ ,$$

$\forall\ x_1, x_2 \in$ IR, $x_1 \neq x_2$.

O número real a é denominado <u>coeficiente angular</u> ou <u>declividade da reta</u>.

Graficamente:



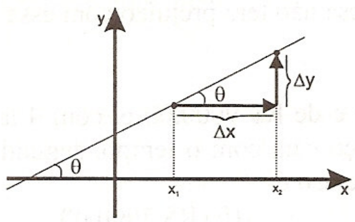
Sempre que x e y são tomados na mesma escala tem-se

$$\boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\theta;}$$

Por isso o coeficiente a é denominado coeficiente angular da reta.

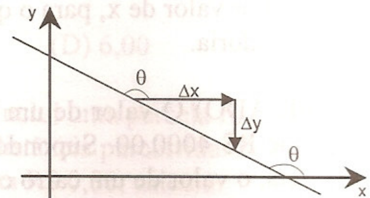
<u>Funções crescentes e decrescentes:</u>

Função crescente: $(a > 0)$



$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

Função decrescente: $(a < 0)$



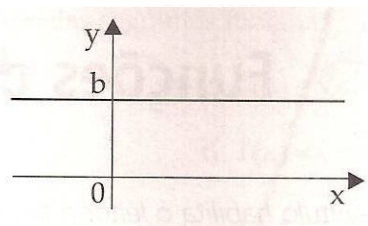
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

A função afim é crescente se, e somente se, o coeficiente angular for positivo, isto é, se, e somente se, a>0.
A função afim é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular for negativo, isto é, se, e somente se, a<0.

4.1.1 Função constante:

Seja f(x)=ax+b. Se a=0, a função polinomial do 1º grau se torna de grau zero e é chamada de função constante. Assim, teremos $\boxed{f(x)=b}$

Domínio: IR.
Imagem: {b}
Gráfico: reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto (0,b).

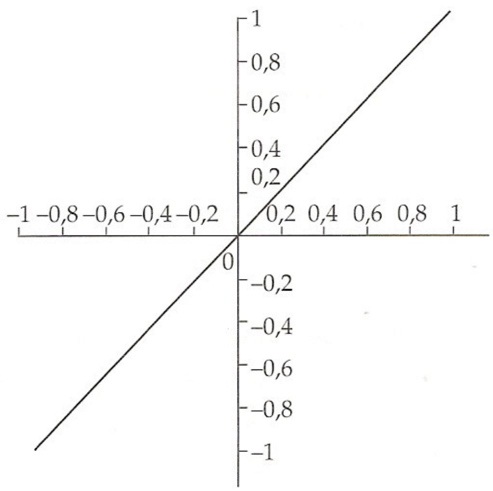


$f(x) = y = b$

4.1.2 Função identidade

Seja f(x)=ax+b. Se a=1 e b=0 , teremos $\boxed{f(x)=x}$ e f é chamada função identidade.

<u>Domínio</u>: IR
<u>Imagem</u>: IR
Gráfico: reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.



4.1.3 Função linear

Seja f(x)=ax+b. Se a≠0 e b=0, a função polinomial do 1º grau se torna $\boxed{f(x)=ax}$ e é chamada função linear.

<u>Domínio</u>: IR.
<u>Imagem</u>: IR.
<u>Gráfico</u>: reta que passa pela origem. Para esboçarmos seu gráfico, basta determinar outro ponto além de (0,0).

OBS: A função identidade é um caso particular da função linear, onde a=1.

Sinais de uma função

Seja f: $A \subset IR \rightarrow B \subset IR$.
Para que valores de x temos f(x)>0, f(x)=0 e f(x)<0?

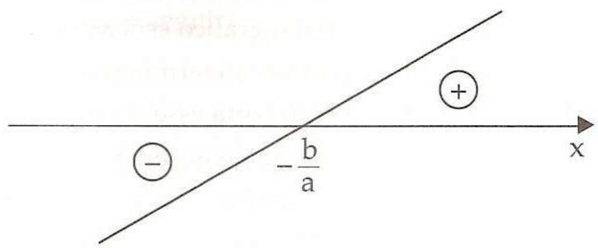
Resolver esta questão é estudar o sinal da função.

- Para saber quando f(x)>0, temos que determinar os valores de x, onde y>0, ou seja, os valores de x em que o gráfico está acima do eixo x.
- Para saber quando f(x)=0, devemos determinar as raízes da função, ou seja, os valores de x onde o gráfico corta esse eixo.
- Para saber quando f(x)<0, temos de determinar os valores de x onde y<0, ou seja, os valores de x onde o gráfico está abaixo do eixo x.

No caso da função afim, como o zero da função (f(x)=0) é x=-b/a, podemos verificar que:

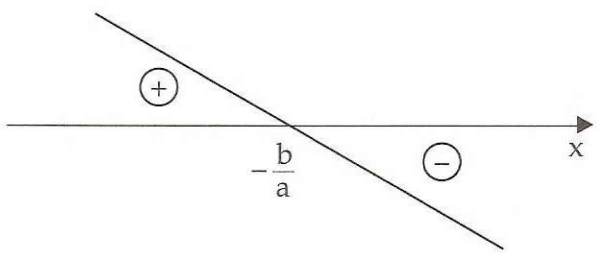
a) Se a função for crescente, isto é, se $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\dfrac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$



b) Se a função for decrescente, isto é, se $a < 0$:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\dfrac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x > -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$



Exercícios

1) Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico de cada uma das funções seguintes:

a) f(x)=y= -8
b) f(x)=y=-3x
c) f(x)=y=3x-6

2) Dada a função f(x)=3x-1, calcule:

a) f(4)
b) f(2x+1)

3) Seja f(2x+7)=-4x+9. Determinar f(-5).

4) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto (2;1) e tem coeficiente angular igual a 3.

5) Determine p para que a função f(x)=(2p+3)x+2 seja decrescente.

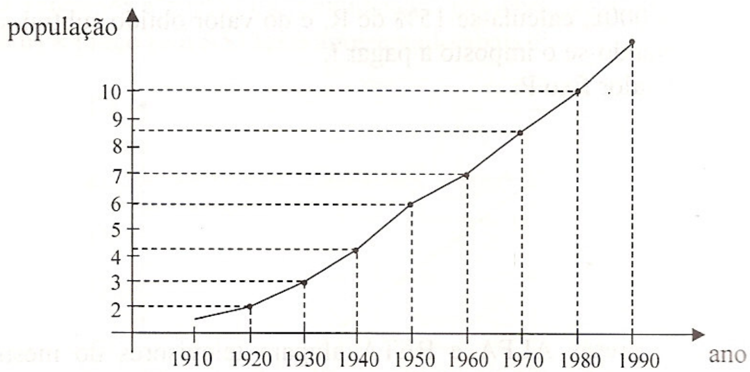
6) Estudar o sinal da função f(x)=y=4x-5

7) Estudar o sinal da função f(x)=y=-4x+5

8) (UNIFICADO) O valor de um carro novo é de R$ 9000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$ 4000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é:

(A) R$ 8250,00 (B) R$ 8000,00 (C) R$ 7750,00 (D) R$ 7500,00 (E) R$ 7000,00

9) (UFRJ) O gráfico a seguir descreve o crescimento populacional de certo vilarejo desde 1910 até 1990. No eixo das ordenadas, a população é dada em milhares de habitantes.



A) Determine em que década a população atingiu a marca de 5.000 habitantes.

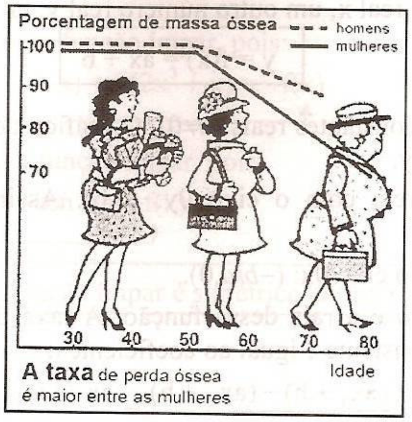
B) Observe que a partir de 1960 o crescimento da população em cada década tem se mantido constante. Suponha que esta taxa se mantenha inalterada no futuro.
Determine em que década o vilarejo terá 20.000 habitantes.

10) (UNIRIO) O gráfico da função y=mx+n, onde me n são constantes, passa pelos pontos A(1,6) e B(3,2). A taxa de variação média da função é:

(A) -2 (B) -1/2 (C)1/2 (D)2 (E) 4

Exercícios propostos

1. (UERJ) Admita que, a partir dos cinquenta anos, a perda da massa óssea ocorre de forma linear, conforme mostra o gráfico abaixo.



(Adaptado de Galileu, janeiro de 1999)

Aos 60 anos e aos 80 anos, as mulheres têm, respectivamente, 90% e 70% da massa óssea que tinham aos 30 anos.
O percentual de massa óssea que as mulheres já perderam aos 76 anos, em relação à massa aos 30 anos, é igual a:

(A) 14 (B) 18 (C) 22 (D) 26

2. (IBMEC) Uma empresa fabrica determinada mercadoria, cujo preço de custo é de R$ 1,35, por unidade. Na produção dessa mercadoria, há um custo mensal fixo de R$ 22.500,00, referente a despesas com salários, encargos sociais, manutenção das máquinas, etc...
Seja x o número de unidades fabricadas por mês e y o lucro total, devido à venda de toda a produção.
Sabendo que cada unidade será vendida por R$ 2,60, determinar:
A) uma expressão que forneça o valor de y, em função do valor de x;
B) o menor valor de x, para o qual a empresa não terá prejuízo com essa mercadoria.

3) Dada a função $f \;:\; \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \;\underset{\mapsto}{\to}\; \underset{f(x)=y=5x-6}{B \subset \mathbb{R}}$, determine:

$f(0)$

$f\left(-\frac{3}{5}\right)$

$f\left(\sqrt{2}\right)$

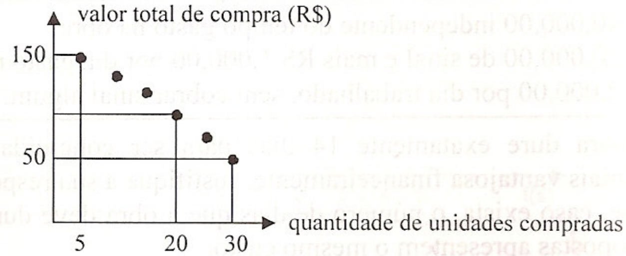
$f(x+7)$

e) $f(3x-4)$

f) O ponto $(x\,;0)$

g) O ponto $(x\,;1)$

4) (UERJ) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.



Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, o equivalente a:

(A) 4,50 (B) 5,00 (C) 5,50 (D) 6,00

5) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:

A) o preço de uma corrida de 11 km;

B) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.

6) (UERJ) Uma pessoa deseja fazer uma reforma em seu apartamento. Para isso, verificou os preços em três firmas especializadas e obteve os seguintes orçamentos:

Firma 1: R$ 40.000,00 independente do tempo gasto na obra;
Firma 2: R$ 20.000,00 de sinal e mais R$ 1.000,00 por dia gasto na obra;
Firma 3: R$ 2.000,00 por dia trabalhado, sem cobrar sinal algum.

A) Caso a obra dure exatamente 14 dias para ser concluída, indique a proposta mais vantajosa financeiramente. Justifique a sua resposta.

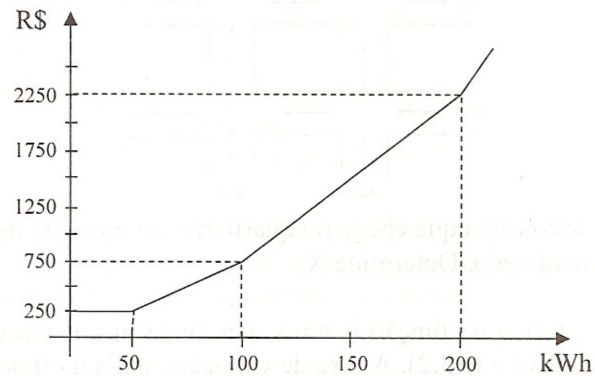
B) Determine, caso exista, o número de dias que a obra deve durar para que as três propostas apresentem o mesmo custo.

7) (UNIRIO) Sejam f e g funções tais que f(x)= 5x+2 e g(x)=-6x+7. Determine a lei que define a função afim h, sabendo que h(-5)=1 e que o gráfico de h passa pelo ponto de interseção dos gráficos de f com g.

8) Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x)=y=\pi$
b) $f(x)=y=x/3$
c) $f(x)=y=-3x+1$

9) (UFRJ) A cada usuário de energia elétrica é cobrada uma taxa mensal de acordo com o seu consumo no período, desde que esse consumo ultrapasse um determinado nível. Caso contrário, o consumidor deve pagar uma taxa mínima referente a custos de manutenção. Em certo mês, o gráfico consumo (em kWh) × preço (em R$) foi o apresentado abaixo:



A) Determine entre que valores de consumo em kWh é cobrada a taxa mínima.
B) Determine o consumo correspondente à taxa de R$1.950,00.

10) Seja $f(3x-4)=2x+7$. Determine:

a) $f(0)$
b) $f(-16)$
c) $f(x)$
d) $f(5x+1)$

11) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(-1;3)$ e tem
c) coeficiente angular igual a (-5).

12) Determine se as funções $f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(x)=y=ax+b}{B \subset \mathbb{R}}$ a seguir são crescentes ou decrescentes:

a) $f(x)=3x-1$
b) $f(x)=1-3x$
c) $f(x)=-7x$
d) $f(x)=\dfrac{3x}{5}$

13) Determine *p* para que a função $f(x)=(5p-7)x+2p$ seja crescente.

14) Determine a equação da reta que passa por dois pontos $(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$ dados, o coeficiente angular (ou declividade) da reta, esboce o gráfico, determine o domínio e a imagem:

a) $(x_1;y_1)=(-3;1)$; $(x_2;y_2)=(4;0)$

b) $(x_1;y_1)=(-2;0)$; $(x_2;y_2)=(-1;-3)$

c) $(x_1;y_1)=(2;1)$; $(x_2;y_2)=(-2;0)$

15) Determine a equação da reta, dado o coeficiente angular (ou declividade) m, que passa pelo ponto $(x_1 ; y_1)$, trace o gráfico, determine o domínio e a imagem:

a) $m = -3;\ (x_1 ; y_1) = (3 ; 2)$

b) $m = -4;\ (x_1 ; y_1) = (-5 ; 0)$

c) $m = 0;\ (x_1 ; y_1) = (2; -4)$

Respostas:

1) D 2)a)y=1,25x-22500 b)x=18000 unidades 3) a)-6 b)-9 c)5 $\sqrt{2}$ -6 d)5x+29 e)15x-26 f)(6/5;0) g) (7/5;1) 4)A 5) a)\$12,90 b)21km 6) a) firma 3 b) 20 dias 7)h(x)=(3/5)x+4 8) a) D=IR, Im={π} b)D=IR, Im=IR c) D=Im=IR 9) a)[0,50] b) 180 kwh 10)a)57/8 b)-1 c) (2x+29)/3 d) (10x+89)/3 11)y=-5x-2 12) a e d são crescentes e b e c são decrescentes 13)p>7/5 14) a) y=-x/7 + 4/7 D(f)=Im(f)=IR c) y=-3x-6; D(f)=Im(f)=IR c) y=1; D(f)=IR, Im(f)={1} 15)a) y=-3x+11;D(f)=Im(f)=IR b) y=-4x-20; D(f)=Im(f)=IR c) y=-4; D(f)=IR, Im(f)={-4}

Inequações simultâneas

A dupla desigualdade $f(x)<g(x)<h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x.

$$f(x) < g(x) < h(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{(I)} \\ \quad\text{e} & \\ g(x) < h(x) & \text{(II)} \end{cases}$$

Indicando por S_1 o conjunto solução de (I) e S_2 o conjunto solução de (II), o conjunto solução da dupla desigualdade é $S= S_1 \cap S_2$.

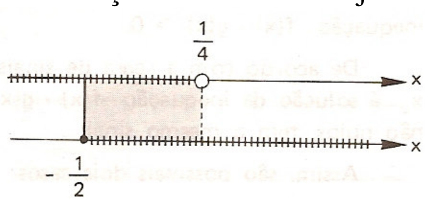
Exemplo: Resolver $3x+2 < -x+3 \leq x+4$

Temos que resolver duas inequações:

(I) $3x+2<-x+3 \rightarrow 4x<1 \rightarrow x<1/4$

(II) $-x+3 \leq x+4 \rightarrow -2x\leq 1 \rightarrow x\geq -1/2$

A interseção desses dois conjuntos é:



$S=\{x \in IR / -1/2\leq x<1/4\}$

Exercícios

1 Resolver as inequações em IR:

a) $-2 < 3x - 1 < 4$

b) $-4 < 4 - 2x \leqslant 3$

c) $-3 < 3x - 2 < x$

Exercícios propostos:

1) Resolva as inequações em IR:

a) $x + 1 \leqslant 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$

b) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$

c) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

2) Resolver os sistemas de inequações em IR:

a) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leqslant 2x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geqslant 4x - 5 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2 \geqslant 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2x - 5}{1 - x} \leqslant -2 \\ \dfrac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \end{cases}$

Inequações produto

Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações
$f(x).g(x)>0$, $f(x).g(x)<0$, $f(x).g(x) \geq 0$ e $f(x).g(x) \leq 0$ são denominadas inequações produto.

Exemplo: Resolva a inequação $(2x-1)(x+4)>0$

1º.) Faremos inicialmente o estudo dos sinais das funções $f(x) = 2x-1$ e $g(x)=x+4$

2º.) Faremos um quadro-produto, no qual figuram os sinais dos fatores e sinal do produto.

Dentre as inequações produto, são importantes as inequações: $[f(x)]^n > 0$, $[f(x)]^n < 0$, $[f(x)]^n \geq 0$ e $[f(x)]^n \leq 0$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Para resolver estas inequações, vamos lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:

1) Toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base.
2) Toda potência de base real e expoente par é um número real não negativo.

Assim, temos as seguintes equivalências:

$$[f(x)]^n > 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) \neq 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n < 0 \iff \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \nexists\, x \in \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \geqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \geqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \forall\, x \in D(f) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \leqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplo:

Resolva as inequações:

1) $(2x-1)^2 > 0$

2) $(3x+1)^3 \geq 0$

Exercício:

1) Determine os valores de x que verificam cada uma das seguintes desigualdades :

   a) $(-3x+2)(x+1) < 0$
   b) $-2x(x-1)(3x+4) < 0$

2) Obtenha o domínio da função f(x)= $\sqrt{(3x+5)(x+4)(1-2x)}$.

3) Resolva as inequações:

a) $(x-2)^2 \geq 0$

b) $(3x+1)^5 \leqslant 0$

c) $(1-2x)^3 > 0$

Exercícios propostos

1) Resolva cada uma das seguintes inequações:

a) $(x-\sqrt{2})(2x+3)(x-1) \geqslant 0$

b) $(2x^2-x)(-4x+1) \leqslant 0$

2) Obtenha o domínio da função $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{(-x-1)(x+3)(1-3x)}}$.

3) Resolva as inequações:

$(x+1)^2 \leqslant 0$

$(x+3)^4 > 0$

$(2x-1)^3(x+2) > 0$

Inequação quociente

Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações:

$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \dfrac{f(x)}{g(x)} < 0, \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \quad e \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ são denominadas inequações quociente.

As regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas. Na resolução de inequaçoes quociente, podemos, portanto, usar o quadro de sinais.

Exemplo:

Resolva a inequação $\dfrac{(x+3)(1-x)}{(x-2)} \geq 0.$

Exercícios:

1) Resolva a inequação

a) $\dfrac{(2-5x)(x+1)}{(-x+3)} \leq 0$ b) $\dfrac{x+2}{2x-1} < 2$

2) Obtenha o domínio da função f(x)= $\sqrt{\dfrac{(2-x)}{(1-x)(3-x)}}$

Exercícios propostos

1) Resolva as seguintes inequações

a) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \geq 0$ b) $\dfrac{2x}{x+2} > 2$ c) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{3}{x}$

2) Obtenha o domínio da função f(x)= $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$.