4.2 Função polinomial do 2º grau

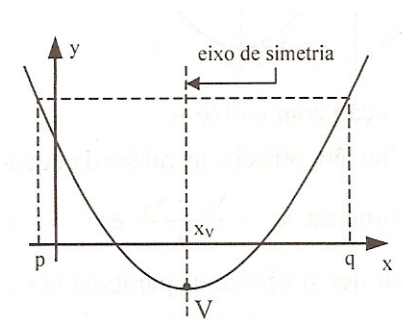
Uma função f: IR → IR que associa a cada x ∈ IR o número

$$\boxed{y=f(x)=ax^2+bx+c}$$

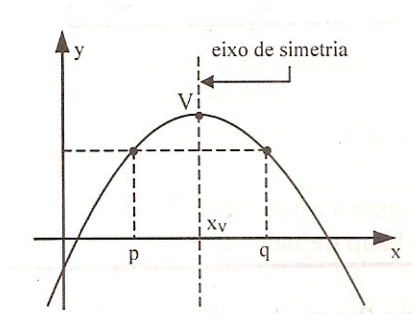
com a,b,c ∈ IR e a≠0 é denominada função polinomial do 2º grau ou função quadrática.

<u>Forma fatorada</u>: $a(x-r_1)(x-r_2)$, onde r_1 e r_2 são as raízes da função.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.



a>0: concavidade voltada para cima

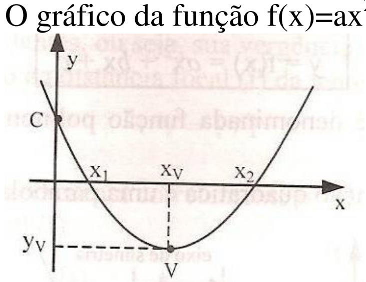


a<0: concavidade voltada para baixo

$$\boxed{\text{Simetria: } f(p)=f(q) \rightarrow x_v = \frac{p+q}{2}}$$

<u>Elementos de uma parábola</u>

O gráfico da função $f(x)=ax^2+bx+c$ possui os seguintes elementos:



- <u>Concavidade</u>: a>0: concavidade voltada para cima
  a<0: concavidade voltada para baixo
- (0,c): ponto de interseção com o eixo y.
- <u>zeros da função</u>, ou seja, as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$.
  Para obter essas raízes, calculamos inicialmente o número $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos 3 casos a considerar:

  1. Se Δ>0, a equação apresentará duas raízes distintas que são:

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Se $\Delta=0$, a equação apresentará duas raízes iguais que são: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

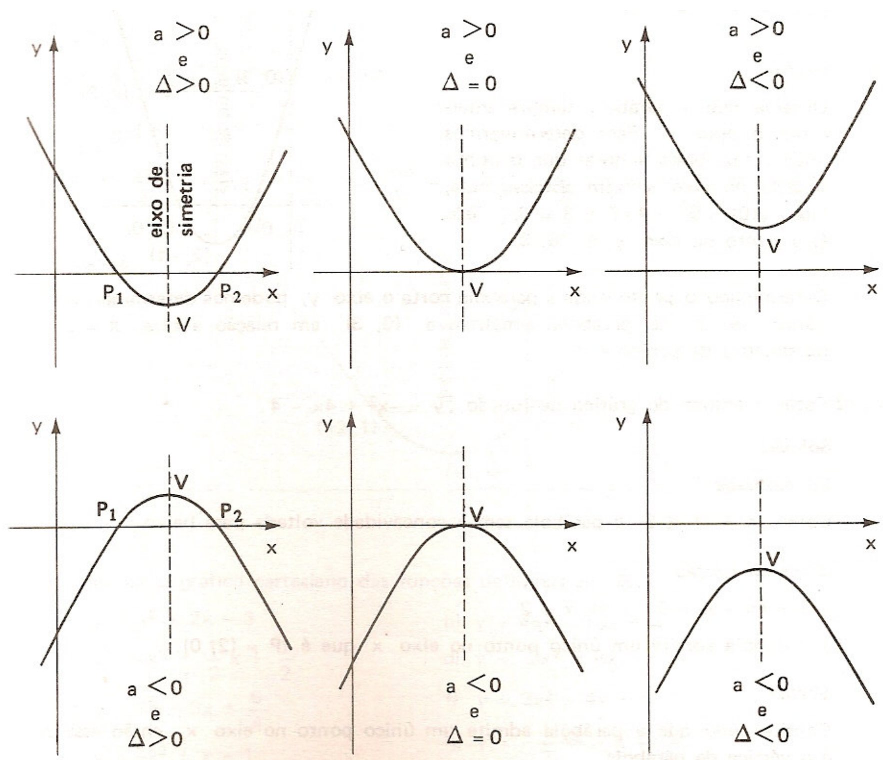
3. Se $\Delta<0$, considerando que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin IR$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

- Pela propriedade da simetria: $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Pode-se então concluir que o vértice da parábola $V(x_v,y_v)$, tem coordenadas:

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2a} \quad e \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

Seguem-se os tipos de gráfico que podemos obter:



Domínio e imagem da função quadrática

D=IR

Para definir a imagem da função quadrática, precisamos definir dois casos:

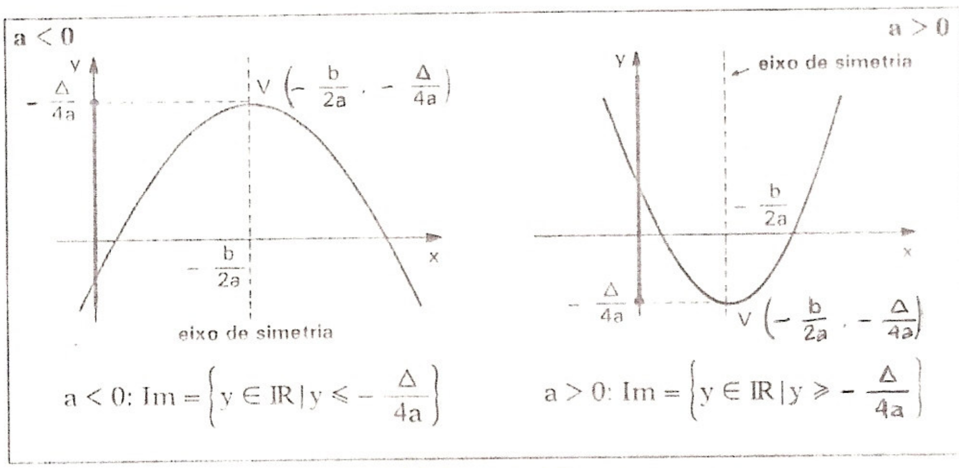
1. $a>0 \rightarrow y \geq \frac{-\Delta}{4a}$, $\forall$ $x \in$ IR. Nesse caso, Im(f)={$y \in$ IR / $y \geq \frac{-\Delta}{4a}$ }

2. $a<0 \rightarrow y \leq \frac{-\Delta}{4a}$, $\forall\, x \in$ IR. Nesse caso, Imf={ $y \in$ IR / $y \leq \frac{-\Delta}{4a}$ }

OBS: Dada a equação do 2ºgrau $ax^2+bx+c=0$ e sejam x_1 e x_2 suas raízes. Temos que:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Resumindo,



<u>Máximo e mínimo da função do 2ºgrau</u>

<u>Definição</u>: Dizemos que o número $y_M \in$ Im(f) ($y_m \in$ Im(f)) é o valor máximo (mínimo) da função y=f(x) se, e somente se, $y_M \geq y$ ($y_m \leq y$) para qualquer $y \in$ Im(f) e o valor de $x_M \in$ D(f) ($x_m \in$ D(f)) tal que $y_M = f(x_M)$ ($y_m = f(x_m)$) é chamado de ponto de máximo (mínimo) da função.

<u>Teorema</u>: A função quadrática $y= ax^2+bx+c$ admite um valor máximo (mínimo) $y=\frac{-\Delta}{4a}$ em $x=\frac{-b}{2a}$ se, se somente se, $a<0$ ($a>0$).

Exercícios

1) Dada a função $y= x^2-4x+3$, forneça:

   a) o vértice V;
   b) o esboço do gráfico;
   c) o domínio e o conjunto imagem.

2) Determine m de modo que o valor máximo da função do 2º grau $f(x)=mx^2+(m-1)x+(m+2)$ seja 2

3) Determine m de modo que a função quadrática $f(x)=(m+1)x^2+mx+-1$ tenha o valor máximo para $x=-3$.

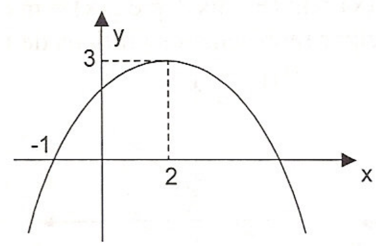
4) (PUC) Sejam S a soma e P o produto das raízes do polinômio do segundo grau $x^2 + ax + b = 0$, com b negativo. Então $\frac{S}{P}$ é:

(A) $\frac{b}{a}$ (B) $\frac{a}{b}$ (C) $\left(-\frac{a}{b}\right)$ (D) $\left(-\frac{b}{a}\right)$ (E) $\frac{a+b}{ab}$

5) Resolva em R a equação:
$(x - 1)(1 + x)x = x(x - 1)^2$

6) (PUC) Quando o polinômio $x^2 + x - a$ tem raízes iguais?

7) (UFRJ) A figura abaixo é o gráfico do trinômio do 2º grau. Determine o trinômio.



8) (IBMEC) A função f: [0, 5] → **R** é definida por $f(x) = x_2 - 6x + 8$. A diferença entre o valor máximo e o valor mínimo desta função é:

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) 9

Exercícios propostos

1) Dada as funções: $f_1(x)= x^2-2x-3$, $f_2(x)= x^2-2x+1$ e $f_3(x)=x^2-2x+2$:

a) Obtenha os valores reais de x tais que $f_1(x)=0$, $f_2(x)= 0$ e $f_3(x)=0$;
b) Dê o vértice de cada uma das parábolas;
c) Esboce no mesmo sistema cartesiano os gráficos de f_1, f_2 e f_3.

2) Qual é o conjunto imagem de cada uma das funções?
a) $y=-2x^2+4x-3$ b) $y= 3x^2-5x+1$

3) Determine m de modo que a função do 2º grau $f(x)= (1-3m)x^2-x+m$ admita valor mínimo.

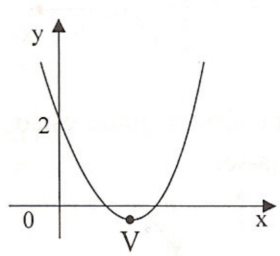
4) Determine m de modo que o valor máximo da função do 2º grau $f(x)=(m+2)x^2+(m+5)x+3$ seja 4.

5) (CESGRANRIO) Sobre a equação $1983x^2 - 1984x - 1985 = 0$
A alternativa correta é:
(A) não tem raiz real
(B) tem duas raízes simétricas
(C) tem duas raízes reais e distintas
(D) tem duas raízes positivas
(E) tem duas raízes negativas

6) Dada a equação $x^2 - x + 2 = 0$, determine:
I) A soma dos quadrados das raízes.
II) A soma dos cubos das raízes.

7) UFF) Para que a curva representativa da equação $y = px^2 - 4x + 2$ tangencie o eixo dos x, o valor da constante p deve ser:
(A) –6 (B) –2 (C) 0 (D) 2 (E) 6

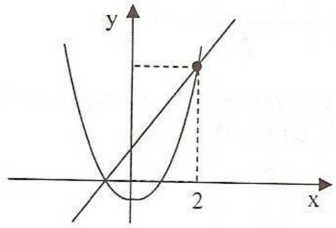
8) UNIRIO)



Considere o gráfico acima, que representa a função definida por $y = 2x^2 - 5x + c$.
As coordenadas do vértice V da parábola são:
(A) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ (B) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{5}\right)$ (C) $\left(-\frac{5}{4}, -2\right)$
(D) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ (E) $(2, -1)$

9) (UNIFICADO) O ponto de maior ordenada, pertencente ao gráfico da função real definida por $f(x) = (2x - 1)(3 - x)$, é o par ordenado (a, b).
Então a – b é igual a:
(A) $\frac{-39}{8}$ (B) $\frac{-11}{8}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{11}{8}$ (E) $\frac{39}{8}$

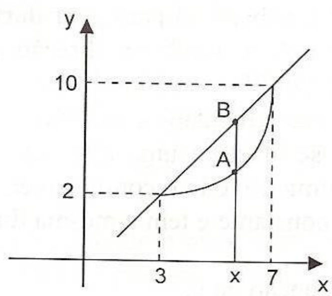
10) (UNIRIO) Observe a figura abaixo, onde estão representadas uma reta e a parábola $y = x^2 - 1$. Pergunta-se:



A) Quais os pontos de intersecção da reta com a parábola?
B) Qual a equação da reta?

11) Uma bola é lançada ao ar. Suponha que sua altura **h**, em metros, **t** segundos após o lançamento, seja $h = -t^2 + 4t + 6$. Determine:
a) o instante em que a bola atinge a sua altura máxima;
b) a altura máxima atingida pela bola;
c) quantos segundos depois do lançamento ela toca o solo.

12) (UFRJ) Dois corpos A e B deslocam-se do ponto (7,10) para o ponto (3,2) mantendo-se sempre, a cada instante, em uma mesma vertical. O corpo A desloca-se sobre a parábola de equação $y = x^2 - 8x + 17$; a trajetória de B é uma reta.



a) Mostre que a equação da trajetória de B é $y = 2x - 4$.
b) Seja f(x) a função que determina a distância entre os corpos A e B para cada x, $3 < x < 7$. Determine x para que a distância seja máxima.

13)
Com relação à função f dada, determine as raízes (caso existam), o maior ou o menor valor e esboce o gráfico.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 4$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
d) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
e) $f(x) = 2x^2 + 3$
f) $f(x) = 2x^2 - 3x$
g) $f(x) = -x^2 + 2x$
h) $f(x) = -x^2 + 4$
i) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$
j) $f(x) = -x^2 - 4x - 5$

14)

. Coloque na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

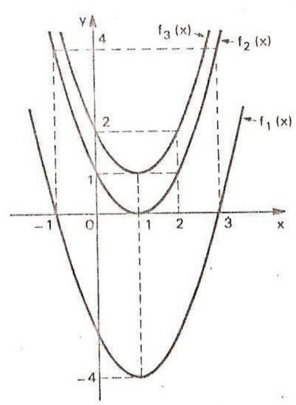
$a)\ x^2 + y^2 - 2x = 0$ $\qquad$ $b)\ x^2 + y^2 - x - y = 0$

$c)\ 2x^2 + 2y^2 + x = 1$ $\qquad$ $d)\ x^2 + y^2 + 3x - y = 2$

Respostas:

1) a) $f_1(x)=0 \leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$; $f_2(x)=0 \leftrightarrow x=1$; não existe $x \in \mathbb{R}/\ f_3(x)=0$.
   b) $f_1: V=(1,-4)$; $f_2: V=(1,0)$; $f_3: V=(1,1)$

c)



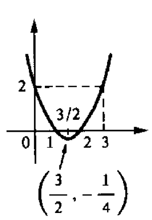
2) a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1\}$
   b) $\left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{13}{12} \right\}$

3) $\left\{ m \in \mathbb{R} \mid m < \frac{1}{3} \right\}$

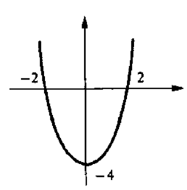
4) m= -11 ou m= -3 $\qquad$ 5) C $\quad$ 6) -3 e -5 $\quad$ 7) D $\quad$ 8) A $\quad$ 9) B $\quad$ 10) a) A=(-1,0) e (2,3)
   b) x-y+1 $\qquad$ 11) a) 2seg b) 10m c) ≅5,1seg $\qquad$ 12) $f(x)= -x^2+10x-21$, x=5

13)

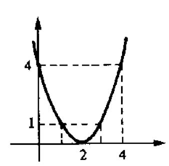
a)



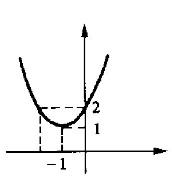
b)



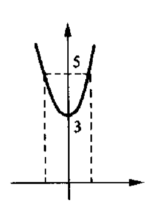
c)



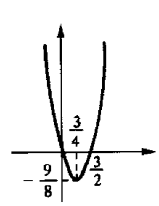
d)



e)



f)



14)

$a)\ (x-1)^2 + y^2 = 1^2$ $\qquad$ $b)\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

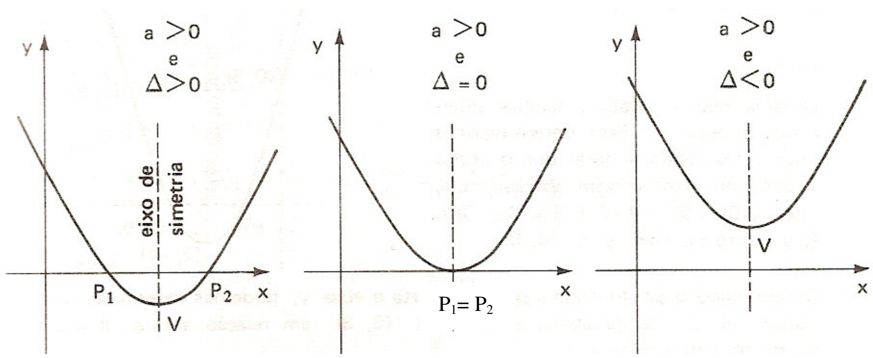
$c)\ \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\qquad$ $d)\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

4.2.1 Inequação do 2º grau

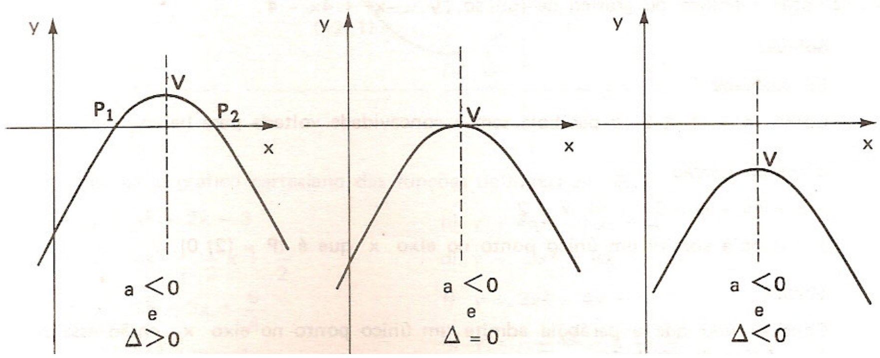
Se $a \neq 0$ as inequações $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \geq 0$ e $ax^2+bx+c \leq 0$ são denominadas inequações do 2º grau. Para resolver cada uma dessas inequações é necessário estudar o sinal de f(x), que pode inclusive ser feito através do gráfico da função.

Vamos resolver, por exemplo, a inequação: $ax^2+bx+c>0$, ou seja, determinar se existe x real tal que $f(x)= ax^2+bx+c$ seja positiva.

O resultado desse exemplo dependerá do valor de a e Δ.



$S=\{x \in IR / x<P_1 \text{ ou } x>P_2\}$ $\qquad$ $S=\{x \in IR / x \neq P_1\}$ $\qquad$ $S=IR$



$S=\{x \in IR / P_1<x<P_2\}$ $\qquad$ $S=\varnothing$ $\qquad$ $S=\varnothing$

Exemplos:

1) Determine os conjuntos soluções das inequações:

a) $2x^2-5x+2<0$
b) $x^2-2x+2>0$
c) $(x-1)(x+2)\geq(x+1)(x^2+4x+4)$

2) Determinar m de modo que a função quadrática $f(x)=mx^2+(2m-1)x+(m+1)$ seja positiva para todo x real.

Exercícios propostos:

1) Resolva cada uma das seguintes inequações:
   a) $-2x^2+5x+3>0$
   b) $x^2+3x+4\geq0$
   c) $0< x^2+2x \leq3$
   d) $(1-3x)(2x^2-7x+3)>0$

2) Resolva:

   a) $\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x^2-x-2 \end{cases}$

   b) $1< x^2-3 \leq -x^2+15$

3) Qual é o domínio da função $f(x)=\sqrt{(2x^2-x-6)(-x^2+2x-1)}$?

4) Determine os valores reais de x para os quais $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{9-x^2}}$ é real.

5) Determine o conjunto de valores de m para os quais $f(x)=mx^2+2(m-2)x+m^2$ é negativo quando x=1.

6) Determine m de modo que a equação do 2º grau $mx^2+(m+1)x+(m+1)=0$ admita raízes reais e distintas.

7) (PUC) Resolva a inequação $\dfrac{2x+3}{x-1}\geq 1$.

8) (UFF) Determine o domínio da função real f de variável real definida po

$f(x) = \sqrt{x - \frac{900}{x}}$

9) (CESGRANRIO) A solução da inequação $x > \frac{1}{x}$ é:

(A) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$
(B) $x < -1$ ou $x > 1$
(C) $x > 1$
(D) $x > 0$
(E) $x > -1$

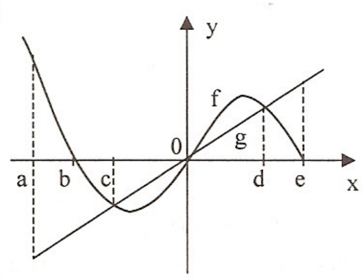
10) (RURAL) O conjunto solução da inequação $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-1} < 1$ é

(A) $-3 < x < 1$.
(B) $-3 < x < 0$ ou $x > 1$.
(C) $-3 < x < -\sqrt{3}$ ou $1 < x < \sqrt{3}$.
(D) $-\sqrt{3} < x < 1$ ou $x > \sqrt{3}$.
(E) $-1 < x < 1$ ou $x > 3$.

11) Olhando para o gráfico, estude a variação do sinal de $f(x)$.

a) $f(x) = x^2 - 1$
b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$
d) $f(x) = -x^2 + 3x$
e) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$
f) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
g) $f(x) = -x^2 + 9$
h) $f(x) = x^2 + 2x - 6$
i) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$
j) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

12) (PUC) A figura abaixo fornece os gráficos de uma função f definida em [a, e] e da função $g(x) = \frac{x}{2}$



O conjunto de todos os números reais que satisfazem a inequação $f(x) \leq \frac{x}{2}$ é:

(A) $[a, b] \cup [0, e]$
(B) $[a, c] \cup [0, d]$
(C) $[a, 0] \cup [d, e]$
(D) $[c, 0] \cup [d, e]$
(E) nenhuma das respostas acima.

13) (PUC) Um número positivo y é maior que o seu inverso $\frac{1}{y}$:

(A) só se $y > 1$; (B) nunca; (C) sempre;
(D) só se $y > 1,1$; (E) se $0 < y < 1$.

14) (UNIRIO) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 5 - x$ e $h(x) = x^2 - 4x + 3$, definimos a função $\varphi(x) = \dfrac{g(x) \cdot h(x)}{f(x)}$. Analisando os valores de x, para os quais $\varphi(x) \geq 0$, temos:

(A) $x < 1$ ou $3 < x < 5$
(B) $x < 1$ ou $3 \leq x \leq 5$
(C) $x \leq 1$ ou $3 \leq x \leq 5$
(D) $x \geq 5$ ou $1 \leq x \leq 3$
(E) $x > 5$ ou $1 < x < 3$

Respostas:

1) a) $\{x \in IR / -1/2 < x < 3\}$ b) IR c) $\{x \in IR / -3 \leq x < -2$ ou $0 < x \leq 1\}$
d) $\{x \in IR / x < 1/3$ ou $½ < x < 3\}$
2) a) [1/2,2) b) [-3,-2) U (2,3] 3) [-3/2,2] 4) (-∞,-3) U [1,3) 5) (-4,1)
6)(-1,1/3) e m≠0
7) $\{x \in IR / x \leq -4$ ou $x > 1\}$ 8) $D = \{x \in IR / x \geq 30\}$ ou $-30 \leq x < 0$ 9) A 10) B 12) D
13) A 14) B

11) ***a)*** $f(x) \geqslant 0$ se $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$; $f(x) < 0$ se $-1 < x < 1$

b) $f(x) \geqslant 0$ se $x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 3$; $f(x) < 0$ se $2 < x < 3$

c) $f(x) > 0$ para todo x

d) $f(x) \geqslant 0$ se $0 \leqslant x \leqslant 3$; $f(x) < 0$ se $x < 0$ ou $x > 3$

e) $f(x) < 0$ para $x \neq -1$; $f(x) = 0$ para $x = -1$

f) $f(x) > 0$ para $x \neq -3$; $f(x) = 0$ para $x = -3$

g) $f(x) \geqslant 0$ para $-3 \leqslant x \leqslant 3$; $f(x) < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$

h) $f(x) \geqslant 0$ para $x \leqslant -1 - \sqrt{7}$ ou $x \geqslant -1 + \sqrt{7}$; $f(x) < 0$ se
$-1 - \sqrt{7} < x < -1 + \sqrt{7}$

i) $f(x) \geqslant 0$ se $x \leqslant \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ ou $x \geqslant \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$; $f(x) < 0$ se $\frac{3 - \sqrt{7}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$

j) $f(x) < 0$ para todo x