

## Lista2 - Limites

### Exercícios sobre limites de seqüências

- Nas sucessões abaixo, escreva a função definidora de cada uma:
  - $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$
  - $(-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots)$
  - $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$
  - $(0, 5, 10, 15, 20, \dots)$
  - $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots)$
  - $(0,1; 0,01; 0,001; \dots)$

- Das sucessões abaixo, quais são convergentes (e para quais números convergem) e quais são divergentes?

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(n) = \frac{2}{n} & \text{f) } f(n) = \frac{n^2 + 1}{n} & \text{k) } f(n) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \\
 \text{b) } f(n) = \frac{n+1}{2} & \text{g) } f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 & \text{l) } f(n) = \begin{cases} \frac{5n+1}{n}, & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{5n-1}{n}, & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} \\
 \text{c) } f(n) = \frac{n+1}{n^2+1} & \text{h) } f(n) = \frac{n-1}{n^2-1} & \text{m) } f(n) = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}} \\
 \text{d) } f(n) = \frac{2n^2+1}{n^2+1} & \text{i) } f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \\
 \text{e) } f(n) = \frac{n^2}{3^n} & \text{j) } f(n) = (-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) & 
 \end{array}$$

(Lembre-se de que o numerador e o denominador são somas de  $n$  termos de progressão geométrica no item m.)

Dadas as sucessões:  $f(n) = \frac{1}{n}$  e  $g(n) = \frac{n+1}{2n}$ :

- Para que valores convergem?
- Qual a função definidora de  $h(n) = f(n) + g(n)$ ?  $h(n)$  é convergente?
- Idem ao exercício anterior para a sucessão  $h_1(n) = f(n) \cdot g(n)$ .
- Idem ao exercício anterior para a sucessão  $h_2(n) = f(n) - g(n)$ .
- Idem ao exercício anterior para a sucessão  $h_3(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$ .

### Respostas:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li><math>f(n) = n^2</math> (divergente)</li> <li><math>f(n) = (-1)^n \cdot n</math> (divergente)</li> <li><math>f(n) = 2^{n-1}</math> (divergente)</li> <li><math>f(n) = 5(n-1)</math> (divergente)</li> </ol> | } | <ol style="list-style-type: none"> <li><math>f(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}</math> (converge para 0)</li> <li><math>f(n) = (0,1)^n</math> (converge para 0)</li> </ol> |
|--|---|---|



9. Obtenha os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$	e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^2 - x}$	i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$	l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}$
b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{49 - x^2}{7 + x}$	f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$	j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$	m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1}$
c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - x}{25 - x^2}$	g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$	k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$	n) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x}$	h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$		

Respostas:

9. a) 6	h) -1
b) 14	i) 0
c) 1/10	j) 1/4
d) -1/3	k) 12
e) 0	l) 27
f) -2	m) -2/3
g) 1	n) 1

10. Para cada função  $f(x)$  abaixo, calcule  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , quando

a) $f(x) = \frac{4}{x - 6}, a = 6$	i) $f(x) = \frac{-1}{x^2}, a = 0$
b) $f(x) = \frac{3}{1 - x}, a = 1$	j) $f(x) = \frac{1}{x^3}, a = 0$
c) $f(x) = \frac{2}{ x - 5 }, a = 5$	k) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, a = 0$
d) $f(x) = \frac{x + 5}{x}, a = 0$	l) $f(x) = 5x + \frac{3}{x - 2}, a = 2$
e) $f(x) = \frac{x}{2 - x}, a = 2$	m) $f(x) = \frac{5x}{(x - 1)^2}, a = 1$
f) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}, a = 1$	n) $f(x) = \frac{1}{5x(x - 1)^2}, a = 1$
g) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 0$	o) $f(x) = \frac{4x}{(x - 3)^2}, a = 3$
h) $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 0$	p) $f(x) = \frac{1}{4x(x - 3)^2}, a = 3$

Respostas:

10. a) $\infty$ e $-\infty$	i) $-\infty$ e $-\infty$
b) $-\infty$ e $\infty$	j) $\infty$ e $-\infty$
c) $\infty$ e $\infty$	k) $\infty$ e $\infty$
d) $\infty$ e $-\infty$	l) $\infty$ e $-\infty$
e) $-\infty$ e $\infty$	m) $\infty$ e $\infty$
f) $\infty$ e $-\infty$	n) $\infty$ e $\infty$
g) $\infty$ e $-\infty$	o) $\infty$ e $\infty$
h) $\infty$ e $\infty$	p) $\infty$ e $\infty$

Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5$

g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - 3x^2 + 6)$

l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - 3x^2 + 6)$

m)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 2x - 1}$

n)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 2x - 1}$

o)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 5}{x + 1}$

p)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x - 3}$

q)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x - 3}$

r)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{25x - 2}{16x - 3}$

s)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 - 5x}$

t)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{x^2 + 3}$

u)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

v)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{2x^2 + 5x - 1}$

w)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x^2}{3 - 4x}$

x)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x}{3 - 4x}$

Respostas:

11. a) 0      i)  $\infty$       q) 2  
 b) 0      j)  $\infty$       r) 25/16  
 c)  $\infty$       k)  $\infty$       s) 1/2  
 d)  $\infty$       l)  $-\infty$       t) 0  
 e)  $\infty$       m)  $\infty$       u) 0  
 f)  $-\infty$       n)  $\infty$       v) 0  
 g)  $\infty$       o)  $-\infty$       w)  $\infty$   
 h) 0      p) 2      x) 1/2

12. A função  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \leq 3 \\ 3x - 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$  é contínua no ponto  $x = 3$ ?

13. A função  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \neq 2 \\ 10, & \text{se } x = 2 \end{cases}$  é contínua para  $x = 2$ ?

14. Verifique se a função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  é contínua para  $x = 1$ .

15. Determine  $k$ , de modo que a função  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x \neq 2 \\ k, & \text{se } x = 2 \end{cases}$  seja contínua.

Respostas:

12. Sim    14. Não

13. Não    15.  $k = 7$

20. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^x & \end{array}$$

### Aplicação:

#### Juros capitalizados continuamente

De um modo geral, se um capital C é capitalizado continuamente a uma taxa proporcional a uma taxa i anual, pelo prazo de n anos, o montante é dado por:

$$M = C \cdot e^{i \cdot n}.$$

21. Calcule o montante de uma aplicação de \$ 2.000,00 a juros compostos c continuamente a uma taxa proporcional a 15% ao ano, durante 4 anos.
22. Calcule o montante de uma aplicação de \$ 5.000,00 a juros compostos c continuamente a uma taxa proporcional a 20% ao ano, durante 6 meses.
23. Calcule o montante de uma aplicação de \$ 6.000,00 a juros compostos c continuamente a uma taxa proporcional a 22% ao ano, durante 15 meses

#### Respostas:

20. a)  $e^2$       c)  $e^2$       e) 1  
 b)  $e^{1/3}$       d)  $e^{3/2}$
21. \$ 3.644,24      23. \$ 7.899,18
22. \$ 5.525,85      24. 6,42 anos

Calcule os seguintes limites:

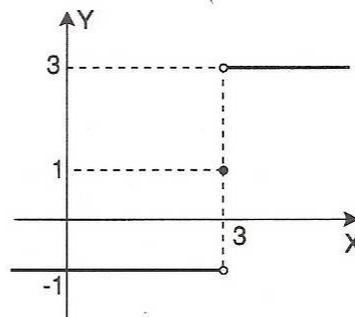
$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(-x)}{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } kx}{x} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x}{x} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } kx}{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} & \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } ax}{\text{tg } bx} & \end{array}$$

#### Respostas:

25. a) -1      d) k      f) alb  
 b) k      e) alb      g) 0  
 c) 0

Exercícios sobre limites.

1. Seja  $f(x)$  a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ .

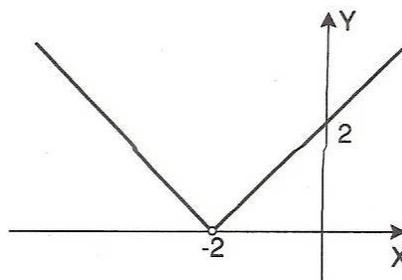
(c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(f)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

2. Seja  $f(x)$  a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

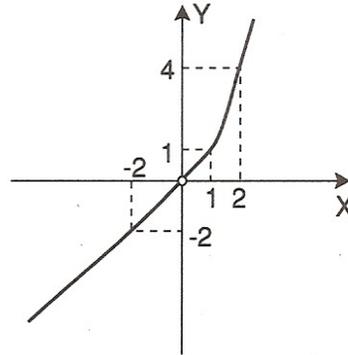
(a)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. Seja  $f(x)$  a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

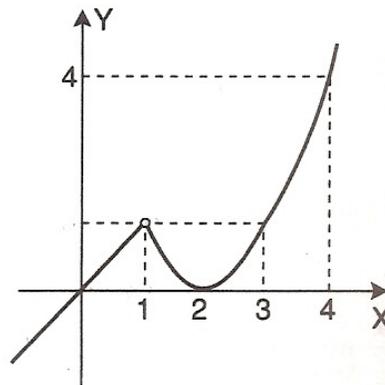
(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(f)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

4. Seja  $f(x)$  a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .

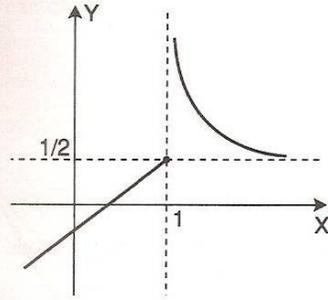
(b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

5. Seja  $f(x)$  a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

9. Mostrar que existe o limite de  $f(x) = 4x - 5$  em  $x = 3$  e que é igual a 7.

10. Mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ .

Calcular os limites nos exercícios 18 a 37 usando as propriedades de Limites.

18.  $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 7x - 5x^2)$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 7x + 2)$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^5 + 6x^4 + 2)$ .

\* 21.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} (2x + 7)$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow -1} [(x + 4)^3 \cdot (x + 2)^{-1}]$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} [(x - 2)^{10} \cdot (x -$

24.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{3x - 1}$ .

25.  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t + 3}{t + 2}$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

27.  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 5t + 6}{t + 2}$ .

28.  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 2}$ .

29.  $\lim_{s \rightarrow 1/2} \frac{s + 4}{2s}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{2x + 3}$ .

31.  $\lim_{x \rightarrow 7} (3x + 2)^{2/3}$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2x^2 - x}{3x}$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x - 4}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [2 \operatorname{sen} x - \cos x]$ .      35.  $\lim_{x \rightarrow 4} (e^x + 4x)$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow -1/3} (2x + 3)^{1/4}$ .

Respostas:

1. a) -1      b) 3      c)  $\neq$       d) -1      e) 3      f) 3

2. a) 0      b) 0      c) 0      d)  $+\infty$

3. a) 0      b) 0      c) 0      d)  $+\infty$       e)  $-\infty$       f) 4

4. a) 0      b) 0      c)  $+\infty$       d)  $-\infty$       e) 1

5. a)  $+\infty$       b) 1/2      c)  $\neq$       d) 1/2      e)  $-\infty$

16. (a)  $\neq$       (b) 0      (c) 0      (d) 0

18. 3      19. 8      20. 9      21. 8      22. 27

23. 4.096      24. 6/5      25. 5/4      26. 2      27. 5

28. -1      29. 9/2      30.  $\sqrt[3]{11}$       31.  $\sqrt[3]{23^3}$       32.  $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

33.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       34. 2      35.  $e^4 + 16$       36.  $\sqrt[4]{7/3}$

1. Seja  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ 3x - 7, & x > 3. \end{cases}$

Calcule:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ .

(f)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ .

Esboçar o gráfico de  $f(x)$ .

2. Seja  $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3. \end{cases}$

Calcule  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ . Esboce o gráfico de  $h(x)$ .

3. Seja  $F(x) = |x - 4|$ . Calcule os limites indicados se existirem:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} F(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} F(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 4} F(x)$ .

Esboce o gráfico de  $F(x)$ .

4. Seja  $f(x) = 2 + |5x - 1|$ . Calcule se existir:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1/5^-} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1/5^+} f(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1/5} f(x)$ .

Esboce o gráfico de  $f(x)$ .

5. Seja  $g(x) = \begin{cases} \frac{|x - 3|}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3. \end{cases}$

(a) Esboce o gráfico de  $g(x)$ .

(b) Achar, se existirem  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ .

6. Seja  $h(x) = \begin{cases} x/|x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Mostrar que  $h(x)$  não tem limite no ponto 0.

8. Verifique se  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$  existe.

9. Seja  $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1. \end{cases}$

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados se existirem:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .

(g)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ .

(h)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

10. Seja  $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$ .

Calcule os limites indicados se existirem:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$ .

(d)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ .

(e)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ .

**Respostas:**

1. a) 2      b) 2      c) 2      d) 8      e) 8      f) 8

2. 4      3. a) 0      b) 0      c) 0

4. a) 2      b) 2      c) 2      5. b) 1, -1 e  $\neq$

9. a) -1      b) 1      c) 0      d)  $-\infty$       e)  $\neq$   
 f) 0      g) 0      h) 0

10. a) 5      b) 10      c) 0      d) 10      e) 0

1. Para cada uma das seguintes funções ache

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

(a)  $f(x) = 3x^2$ .

(b)  $f(x) = 1/x, x \neq 0$ .

(c)  $f(x) = 2/3x^2$ .

(d)  $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ .

(e)  $f(x) = \frac{1}{x+1}, x \neq -1$ .

(f)  $f(x) = x^3$ .

2. Calcular os limites

(a)  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ;       $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(b)  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ ;       $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(c)  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ ;       $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Dica: tome  $x=t^6$

(d)  $f(x) = \frac{x - 1}{x^3 - 1}$ ;       $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2t^2 - 3t - 5}{2t - 5}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$12. \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h} - 1}{h - 1}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{Dica: tome } x=t^{12}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{-x}$$

Respostas:

1. a) 12      b) -1/4      c) 8/3  
d) 17      e) -1/9      f) 12

2. a) 6      b) -9/4      c) 2/3      d) 1/3

3. -3/2    4. 1      5. 0      6. a + 1    7. 7/2    8. 1  
9. 1/8    10. 4      11. -2    12. 1/2    13. 4/3

14. 1/2

1. Se  $f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$ , calcule:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2. Se  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ , calcule:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1)$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$ .

$$5. \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{t^2+1}$$

$$6. \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t+1}{t^2+1}$$

$$7. \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 2}{-x^2 + 7}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$13. \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 1}{t - 4}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 - x + 1}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x - 3}$$

$$22. \lim_{y \rightarrow 6^-} \frac{y + 6}{y^2 - 36}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3 - x}{x^2 - 2x - 8}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{|x - 3|}$$

$$27. \lim_{y \rightarrow 6} \frac{y + 6}{y^2 - 36}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x - 3}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - x}{x^2 - 2x - 8}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{|x - 3|}$$

Respostas:

1. a) 2

b) 1/6

2. a)  $+\infty$

b) 0

3.  $+\infty$     4. 2    5. 0    6. 0    7. 1/2  
 8.  $-\infty$     9.  $+\infty$     10. -5/7    11.  $+\infty$     12. 1  
 13.  $+\infty$     14. -1    15. 0    16. 10/3    17. -1/2  
 18.  $-\infty$     19. 0    20.  $+\infty$     21.  $+\infty$     22.  $+\infty$   
 23.  $-\infty$     24.  $+\infty$     25.  $-\infty$     26.  $-\infty$     27.  $-\infty$   
 28.  $+\infty$     29.  $+\infty$

calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 9x}{x}$ .    6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{3x}$ .  
 7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 7x}$ .    8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$ .

Respostas:

5. 9    6. 4/3    7. 10/7    8.  $e^{10}$

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0.$$

$$(b) f(x) = x - |x| \quad \text{em } x = 0.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases} \quad \text{em } x = 2.$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ 1 - |x|, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{em } x = 1.$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases} \quad \text{em } x = 2.$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq -1 \\ 1 - |x|, & x < -1 \end{cases} \quad \text{em } x = -1.$$

$$(g) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}, \quad \text{em } x = 2.$$

2 analise a continuidade das seguintes funções:

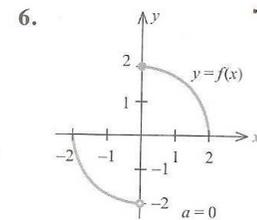
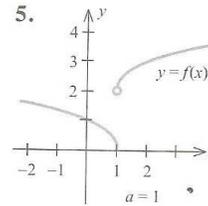
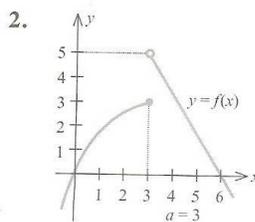
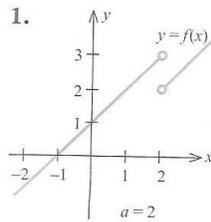
$$(a) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

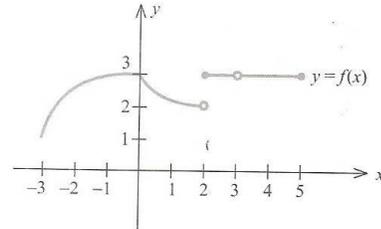
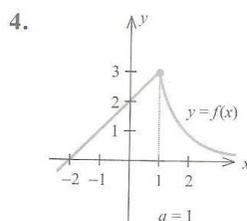
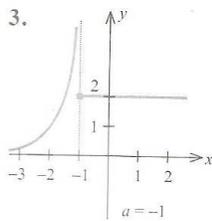
Respostas:

1) São contínuas: (b),(c) e (g). Não são contínuas: (a),(d),(e) e (f)

Nos exercícios 1-6, use o gráfico da função  $f$  para determinar  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no valor indicado de  $a$ , se tais limites existirem.



Nos exercícios 7-10, observe o gráfico da função  $f$  a seguir e determine se cada afirmação é verdadeira ou falsa.



7.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$

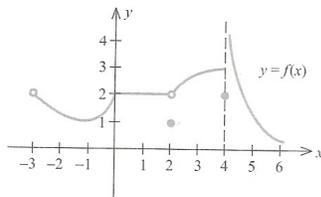
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

9.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  não existe.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{se } x \geq 1 \\ 2 + \sqrt{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Nos exercícios 11-14, observe o gráfico da função  $f$  a seguir e determine se cada afirmação é verdadeira ou falsa.



11.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

13.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

14.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$

Nos exercícios 15-30, calcule o limite unilateral indicado, quando existir.

15.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 4)$       16.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 4)$

17.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x+2}$       18.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$       20.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2+1}$

21.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$       22.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2\sqrt{x-2}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + \sqrt{2+x})$       24.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x}{1-x}$

25.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x}{1-x}$       26.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}$

27.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}$       28.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{x+3}$

29.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

30.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , onde

Nos exercícios 37-47, determine os valores de  $x$  para os quais a função dada é contínua.

37.  $f(x) = 2x^2 + x - 1$       38.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

39.  $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$       40.  $f(x) = \frac{2}{2x-1}$

41.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$       42.  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

43.  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

44.  $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x \leq -1 \\ x+1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

45.  $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se } x < 0 \\ x^2+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

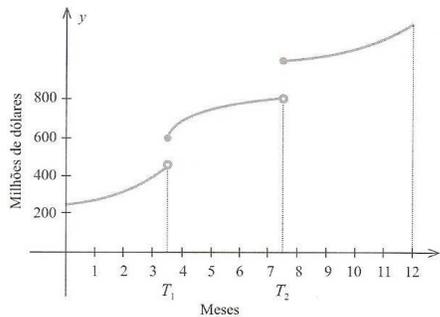
46.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

47.  $f(x) = |x+1|$

Nos exercícios 48-51, determine todos os valores de  $x$  nos quais a função dada é descontínua.

48.  $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$       49.  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

**53. Instituições com Problemas Financeiros** A Companhia Franklin Savings and Loan comprou duas instituições com problemas financeiros em 1992. Uma delas foi adquirida no instante  $t = T_1$ , e a outra foi adquirida no instante  $t = T_2$  ( $t = 0$  corresponde ao início de 1992). O gráfico a seguir mostra a quantia total de dinheiro em depósito na Franklin. Explique o significado das descontinuidades da função em  $T_1$  e  $T_2$ .



$$50. f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} \quad 51. f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}$$

**55. Comissões** O salário base de um vendedor trabalhando por comissão é de \$ 12.000. Para cada \$ 50.000 de vendas acima de \$ 100.000 ele recebe uma comissão de \$ 1000. Esboce um gráfico mostrando os vencimentos do vendedor como função do nível  $x$  de suas vendas. Determine os valores de  $x$  para os quais essa função  $f$  é descontínua.

**56. Taxas de Estacionamento** A taxa cobrada por carro num estacionamento no centro da cidade é de \$ 1 pela primeira meia hora e de \$ 0,50 para cada meia hora adicional completa ou parcial, sujeita a um máximo de \$ 5. Obtenha uma função  $f$  que relaciona a taxa cobrada pelo estacionamento ao tempo durante o qual o carro lá permanece.

Respostas:

1) 3;2; o limite não existe.

2) 3;5; o limite não existe.

3)  $+\infty$ ; 2, o limite não existe.

7. Verdadeiro

10. Falso

13. Falso

17.  $-\frac{1}{4}$

20. -1

23. -4

26. 4

29. 0; 0

37.  $(-\infty, \infty)$

40.  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

42.  $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

43.  $(-\infty, \infty)$

46.  $(-\infty, \infty)$

48. -1 e 1

9. Verdadeiro

11. Verdadeiro

15. 6

18. O limite não existe.

21. 0

24. O limite não existe.

28. 0

30. 2; 3

39.  $(-\infty, \infty)$

45.  $(-\infty, \infty)$

47.  $(-\infty, \infty)$

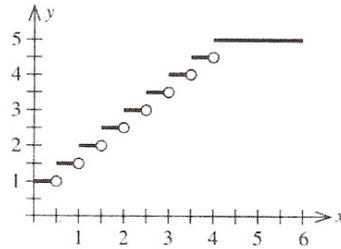
50. 1 e 2

4) 3,3,3

5) 0;2; o limite não existe.

6) -2,2, o limite não existe.

56.



$f$  é descontínua em  $x = \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \dots, 4$ .

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Avaliar os limites indicados e determinar, em cada caso, se a função é contínua no ponto dado.

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$   | 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+2}$                |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1)$   | 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3x+1}{5} \right)$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 - 3x^2)$  | 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$          |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$   | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x}$              |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$  | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$                 |
| 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{1 + x + x^2}$   | 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2}$                |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$  | 14) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2}$                      |
| 15) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ |  |
| 16) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$  |  |

### RESPOSTAS

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) 3. Contínua                      | 2) $\frac{4}{5}$ . Contínua         |
| 3) 0. Contínua                      | 4) -1. Contínua                     |
| 5) 0. Contínua                      | 6) 2. Não é contínua                |
| 7) -6. Não é contínua               | 8) -1. Não é contínua               |
| 9) -1. Não é contínua               | 10) Não tem limite. Não é contínua  |
| 11) $\frac{2}{3}$ . Contínua        | 12) Não tem limite. Não é contínua. |
| 13) 1. Contínua                     | 14) 1. Contínua                     |
| 15) Não tem limite. Não é contínua. | 16) 4. Não é contínua.              |

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Avaliar os limites, em cada caso.

$$1) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2-x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{2-x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-x}{x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3-x}{x^2}$$

## RESPOSTAS

$$1) +\infty$$

$$2) -\infty$$

$$3) +\infty$$

$$4) +\infty$$

$$5) -\infty$$

$$6) +\infty$$

$$7) +\infty$$

$$8) +\infty$$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Avaliar os limites indicados:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x+2} \right)$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + 2 \right)$$

$$③ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)$$

$$④ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2-1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2-1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+2x-1}{3x-4}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x-1}{3x-4}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{3x+2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{3x+2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-3}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-3}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3+3x^2}{x^3-1}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3+3x^2}{x^3-1}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - e^x)$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - e^x)$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x^2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x^2}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$23) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow +\infty} (10 + e^{-x})$$

$$26) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$$

### RESPOSTAS

- |                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) 0              | 2) 2              | 3) $-\infty$      | 4) 0              |
| 5) $-\infty$      | 6) $+\infty$      | 7) 0              | 8) 0              |
| 9) $+\infty$      | 10) $+\infty$     | 11) $\frac{4}{3}$ | 12) $\frac{4}{3}$ |
| 13) $\frac{1}{2}$ | 14) $\frac{1}{2}$ | 15) -1            | 16) -1            |
| 17) $+\infty$     | 18) $-\infty$     | 19) 2             | 20) 0             |
| 21) -0            | 22) $-\infty$     | 23) 1             | 24) 1             |
| 25) 10            | 26) 0             | 27) 0             |                   |

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Calcular os limites seguintes:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x + 4$                       | 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 1}{x + 3}$                          |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) e^{2x}$                   | 4) $\lim_{x \rightarrow e} x^2 \cdot \ln x$                                 |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}}{1-x^2}$           | 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} + 5}{\sqrt{x^2 + 5}}$          |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 2} (4-x)^2$                            | 8) $\lim_{x \rightarrow -3} -x^2 + 5x$                                      |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{1-x^2})$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 64} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$                      |
| 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1 + e^x}$      | 12) $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2+x}{x+1} \right)$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x-x^2)]$                    | 14) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{2x^2-2}}$                        |

### RESPOSTAS

- |                    |                   |       |                    |
|--------------------|-------------------|-------|--------------------|
| 1) 0               | 2) $\frac{11}{5}$ | 3) 1  | 4) $e^2$           |
| 5) $-\frac{3}{35}$ | 6) $\frac{11}{6}$ | 7) 4  | 8) -24             |
| 9) 1               | 10) 4             | 11) 1 | 12) $-\frac{1}{3}$ |
| 13) 0              | 14) $\frac{1}{4}$ |       |                    |