Parte1: Exercícios de derivadas

1) Para cada função $f(x)$, determine a derivada $f'(x_0)$ no ponto x_0 indicado:

a) $f(x) = x^2$ $x_0 = 4$

b) $f(x) = 2x + 3$ $x_0 = 3$

c) $f(x) = -3x$ $x_0 = 1$

d) $f(x) = x^2 - 3x$ $x_0 = 2$

e) $f(x) = x^2 - 4$ $x_0 = 0$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 2$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 5$

h) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ $x_0 = 6$

2) Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

Mostre que não existe $f'(1)$.

3) Considere a função $f(x) = 2|x|$. Mostre que não existe $f'(0)$.

4) Obtenha a derivada de cada função a seguir:

a) $f(x) = 10$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = 10x^5$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

e) $f(x) = x^2 + x^3$

f) $f(x) = 10x^3 + 5x^2$

g) $f(x) = 2x + 1$

h) $f(t) = 3t^2 - 6t - 10$

i) $f(u) = 5u^3 - 2u^2 + 6u + 7$

j) $f(x) = 3 \ln x + 5$

k) $f(x) = 10 \ln x - 3x + 6$

l) $f(x) = 5 \text{ sen } x + 2 \cos x - 4$

m) $f(x) = x \cdot \text{sen } x$

n) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

o) $f(x) = (2x^2 - 3x + 5)(2x - 1)$

p) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x^2}$

q) $f(x) = \text{tg} x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

r) $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$

s) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^2}$

t) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

u) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$

v) $f(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + 10$

w) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \text{sen } x$

x) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Respostas:

1) a)8 b)2 c)-3 d)1 e)0 f)-1/4 g)-1/25 h)9

4)

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 5x^4$

c) $f'(x) = 50x^4$

d) $f'(x) = x$

e) $f'(x) = 2x + 3x^2$

f) $f'(x) = 30x^2 + 10x$

g) $f'(x) = 2$

h) $f'(t) = 6t - 6$

i) $f'(u) = 15u^2 - 4u + 6$

j) $f'(x) = \frac{3}{x}$

k) $f'(x) = \frac{10}{x} - 3$

l) $f'(x) = 5 \cos x - 2 \text{ sen } x$

m) $f'(x) = \text{sen } x + x \cdot \cos x$

n) $f'(x) = 2x \ln x + x$

o) $f'(x) = (4x - 3)(2x - 1) + (2x^2 - 3x + 5) \cdot 2$

p) $f'(x) = \frac{x^2 \cdot \cos x - 2x \cdot \text{sen } x}{x^4}$

q) $f'(x) = 1/\cos^2 x$

r) $f'(x) = \frac{-1}{(x - 2)^2}$

s) $f'(x) = -6x^{-4} - 10x^{-3}$

t) $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$

u) $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{1}{4} x^{-3/4}$

v) $f'(x) = \frac{3}{2} x^{-1/2} + \frac{5}{3} x^{-2/3}$

w) $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \text{ sen } x + x^{1/2} \cdot \cos x$

x) $f'(x) = x^{-3/2} - \frac{1}{2} x^{-3/2} \cdot \ln x$

5) Obtenha a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = (2x-1)^3$

b) $f(x) = (2x-1)^4$

c) $f(x) = (5x^2 - 3x + 5)^6$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)^3$

e) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3x - 2)^5}$

f) $f(x) = \ln(3x^2 - 2x)$

g) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 6)$

h) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 3x)$

i) $f(x) = 2^x$

j) $f(x) = 5^x$

k) $f(x) = e^x + 3^x$

l) $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$

m) $f(x) = 3^{x^2 - 4}$

n) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

o) $f(x) = e^x + e^{-x}$

p) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

q) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

r) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

s) $f(x) = (6x^2 + 2x + 1)^{\frac{3}{2}}$

t) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$

u) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + 1}$

v) $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{e^x}}$

w) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{3x - 2}}$

x) $f(x) = \ln\sqrt{3x^2 + 1}$

Respostas:

5)

a) $f'(x) = 6(2x-1)^2$

b) $f'(x) = 8(2x-1)^3$

c) $f'(x) = 6(5x^2 - 3x + 5)^5 \cdot (10x - 3)$

d) $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$

e) $f'(x) = -5(x^2 - 3x - 2)^{-6} \cdot (2x - 3)$

f) $f'(x) = \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x}$

g) $f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 6}$

h) $f'(x) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x)$

i) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$

j) $f'(x) = 5^x \cdot \ln 5$

k) $f'(x) = e^x + 3^x \cdot \ln 3$

l) $f'(x) = (2x - 2)\, e^{x^2 - 2x + 1}$

m) $f'(x) = 2x \cdot 3^{x^2 - 4} \cdot \ln 3$

n) $f'(x) = \frac{2}{(x + 1)^2}\, e^{x - 1/x + 1}$

o) $f'(x) = e^x - e^{-x}$

p) $f'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

q) $f'(x) = (2x + 1)^{-1/2}$

r) $f'(x) = \frac{2}{3}(2x + 1)^{-2/3}$

s) $f'(x) = \frac{3}{2}(6x^2 + 2x + 1)^{1/2} \cdot (12x + 2)$

t) $f'(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2} + (x^2 - 3x + 1)^{-2/3} \cdot (2x - 3) \cdot \frac{1}{3}$

u) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} + \frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2}$

v) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{e^x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x}$

w) $f'(x) = -\frac{5}{2}\left(\frac{x + 1}{3x - 2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{(3x - 2)^2}$

x) $f'(x) = 3x \cdot (3x^2 + 1)^{-1}$

6) Mostrar que cada uma das funções abaixo não tem derivada no ponto indicado:

a) $y = \sqrt{x}\,; \qquad x_0 = 0$

b) $y = |x - 1|\,; \qquad x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{x}\,; \qquad x_0 = 0$

d) $y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 + x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}\,; \qquad x_0 = 0$

e) $y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}\,; \qquad x_0 = 0$

Parte2: Exercícios sobre reta tangente

1) . Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f nos pontos de abscissas indicados

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 5$

b) $f(x) = x^2 - 5x$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 3$

d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 2$

e) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, $x_0 = 3$

g) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

h) $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 1$

2)Determine o ponto de intercessão das tangentes traçadas a curva de equação $f(x)=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ nos pontos de ordenada 1.

3) A forma de uma colina pode ser descrita pela equação $y=-x^2+17x-66$ ($6 \leq x \leq 11$). Considere um asqueroso professor de Cálculo munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto (2,0). A partir de que ponto, na colina, um indefeso aluno estará 100% seguro?

Respostas:

1) a) $y - 25 = 10(x-5)$

b) $y + 4 = -3(x-1)$

c) $y = 2x + 3$

d) $y = -(x-2)$

e) $y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e)$

f) $y - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}(x-3)$

g) $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

h) $y - \dfrac{1}{e} = \dfrac{-2}{e}(x-1)$

2)(0,0) 3) A partir do ponto (8,6).

Parte 3: Aplicações – Taxas relacionadas e Funções marginais

<u>Funções Marginais</u>

Em Economia e Administração, dada uma função f(x), costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em f(x) por uma pequena variação de x.

Chamam-se função marginal de f(x) à função derivada de f(x). Assim, a função custo marginal é a derivada da função custo, a função receita marginal é a derivada da função receita, e assim por diante.

A denominação “marginal” utilizada pelos economistas indica uma variação “na margem”, significando que é considerada como um limite. Veremos a seguir algumas funções marginais e a sua interpretação.

Custo Marginal

Seja $C(x)$ a função custo de produção de x unidades de um produto. Chamamos de custo marginal à derivada de $C(x)$. Indicamos o custo marginal por $C_{mg}(x)$.

Exemplo 5.21. Consideremos a função custo $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$.
O custo marginal é dado por $C_{mg}(x) = C'(x) = 0{,}03x^2 - x + 300$.
Se quisermos o custo marginal para $x = 10$, teremos

$$C_{mg}(10) = 0{,}03 \cdot (10)^2 - 10 + 300 = 293.$$

Esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: sendo

$$C_{mg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x},$$

tem-se que

$$C_{mg}(x) \cong \frac{\Delta C}{\Delta x} \text{ (para } \Delta x \text{ pequeno).}$$

Freqüentemente esse Δx pequeno é suposto como igual a 1. Assim,

$$C_{mg}(x) \cong \Delta C = C(x + 1) - C(x).$$

Portanto, o custo marginal é aproximadamente igual à variação do custo, decorrent produção de uma unidade adicional a partir de x unidades.

No exemplo dado, $C_{mg}(10) = 293$ representa, aproximadamente, $C(11) - C(10)$, ou s o custo de produção da 11ª unidade.

Receita Marginal

Seja $R(x)$ a função receita de vendas de x unidades de um produto. Chamamos receita marginal a derivada de $R(x)$ em relação a x. Indicamos a receita marginal $R_{mg}(x)$. Assim,

$$R_{mg}(x) = R'(x).$$

Exemplo 5.22. Dada a função receita $R(x) = -2x^2 + 1.000x$, a receita marginal é

$$R_{mg}(x) = -4x + 1.000.$$

Se quisermos a receita marginal no ponto $x = 50$, teremos

$$R_{mg}(50) = -4 \cdot (50) + 1.000 = 800.$$

Esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: sendo

$$R_{mg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x},$$

tem-se que

$$R_{mg}(x) \cong \frac{\Delta R}{\Delta x} \text{ (para } \Delta x \text{ pequeno).}$$

Supondo $\Delta x = 1$, vem:

$$R_{mg}(x) \cong \Delta R = R(x+1) - R(x).$$

Portanto, a receita marginal é aproximadamente igual à variação da receita decorre da venda de uma unidade adicional, a partir de x unidades.

No exemplo dado, $R_{mg}(50) = 800$ representa aproximadamente $R(51) - R(50)$, ou sej aumento da receita decorrente da venda da 51ª unidade.

1) Dada a função custo $C(x) = 50x + 10.000$, obtenha o custo marginal e interprete o resultado.

2) Dada a função custo $C(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}5x^2 + 20x + 200$, obtenha:

a) o custo marginal C_{mg};

b) $C_{mg}(5)$ e a interpretação do resultado;

c) $C_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado.

3) Repita o exercício anterior para a seguinte função custo: $C(x) = 0{,}1x^2 + 5x + 200$.

4) Dada a função receita $R(x) = 100x$, obtenha a receita marginal e interprete o resultado.

Dada a função receita $R(x) = -4x^2 + 500x$, obtenha:

a) a receita marginal R_{mg};

b) $R_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado;

c) $R_{mg}(20)$ e a interpretação do resultado.

6) Se a função de demanda for $p = 20 - 2x$, obtenha a receita marginal.

7) Repita o exercício anterior com a seguinte função de demanda: $p = \dfrac{500}{x+30} - 10$.

8) Se $p = a - bx$ for a função de demanda, obtenha a receita e a receita marginal.

9) Em cada caso, obtenha o custo marginal e esboce os respectivos gráficos:

a) $C(x) = 2x + 100$

b) $C(x) = x + 200$

c) $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 30x + 100$

d) $C(x) = 3x^3 - 5x^2 + 20x + 100$

10) Em cada caso, obtenha a receita marginal e a receita média e esboce os respectivos gráficos:

a) $R(x) = 10x$

b) $R(x) = 6x$

c) $R(x) = -2x^2 + 600x$

d) $R(x) = -10x^2 + 1.000x$

Observação: a receita média R_{me} é dada por $R_{me}(x) = \dfrac{R(x)}{x}$.

Respostas:

1) \$ 50,00

a) $0{,}9x^2 - 5x + 20$ c) \$ 60,00

b) \$ 17,50

3) a) $0{,}2x + 5$ b) \$ 6,00 c) \$ 7,00

4) \$ 100,00

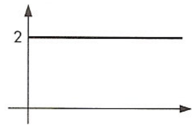
5) a) $-8x + 500$ b) \$ 420,00 c) \$ 340,00

6) $20 - 4x$

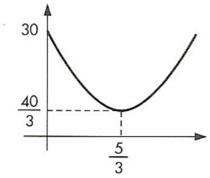
7) $\dfrac{15.000}{(x+30)^2} - 10$

8) $a - 2bx$

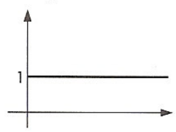
9) a) $C_{mg}(x) = 2$



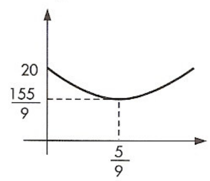
c) $C_{mg}(x) = 6x^2 - 20x + 30$



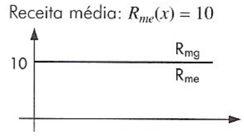
b) $C_{mg}(x) = 1$



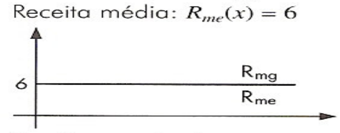
d) $C_{mg}(x) = 9x^2 - 10x + 20$



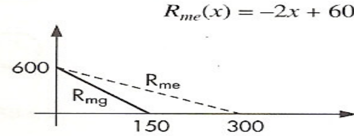
10) a) Receita marginal: $R_{mg}(x) = 10$
Receita média: $R_{me}(x) = 10$



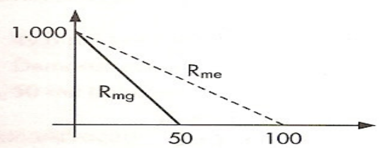
b) Receita marginal: $R_{mg}(x) = 6$
Receita média: $R_{me}(x) = 6$



c) Receita marginal:
$$R_{mg}(x) = -4x + 600$$
Receita média:
$$R_{me}(x) = -2x + 600$$



d) Receita marginal:
$$R_{mg}(x) = -20x + 1.000$$
Receita média:
$$R_{me}(x) = -10x + 1.000$$



11) Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas

$$W(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t+4)^2, & 0 \le t \le 60 \\ 24,4t + 604 & , 60 \le t \le 90 \end{cases}$$

onde t é medido em dias.

(a) Qual a razão de aumento do peso da ave quando $t = 50$?

(b) Quanto a ave aumentará no 51º dia?

(c) Qual a razão de aumento do peso quando $t = 80$?

12) Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, \quad 0 \le t \le 5.$$

Qual a velocidade de redução de sua temperatura após 2 horas?

13) O custo total $C(q)$ da produção de q unidades de um produto é dado por.

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 5q^2 + 10q + 120$$

(a) Qual é o custo fixo?

(b) Qual é o custo marginal quando o nível de produção é $q = 20$ unidades.

(c) Determinar se existem os valores de q tais que o custo marginal é nulo.

Respostas:

11) a)54gramas/dia b) 54,5g c) 24,4 gramas/dia 12)-5,444...°C/hora

13) a)120 b)410 c) 5,44 ; 1,2

Aplicações

1) Seja $C_T = 1\,000 + 3x + \frac{1}{20}x^2$ a função custo total associada à produção de um bem, e na qual x representa a quantidade produzida. Determinar:

1.1) a função custo marginal $C_M = \frac{d\,C_T}{dx}$;

1.2) o custo marginal ao nível de 20 unidades;

1.3) determinar, caso existam, os valores de x para os quais o custo marginal é zero.

2) Responder as perguntas do problema anterior para cada uma das seguintes funções de custo:

2.1) $C_T = 2x + 100$

2.2) $C_T = \sqrt{4x + 25} + 30$

2.3) $C_T = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 10x + 120$

2.4) $C_T = 100\,e^{\frac{1}{20}x}$

3) Se $x = 10 - 0{,}2\,p$ é a função de demanda de um bem, onde x é a quantidade demandada e p o preço, determinar:

3.1) A função receita total, R_T;

3.2) A função receita marginal, $R_M = \frac{d\,R_T}{dx}$;

3.3) A receita marginal no ponto $x = 8$ unidades.

3.4) Determinar caso existam, os valores de x para os quais a receita marginal é zero.

4) Responda as perguntas do exercício anterior para as equações de demanda seguintes:

4.1) $x = 12 - 0{,}3\,p$

4.2) $x = \dfrac{100 - p^2}{5}$

4.3) $x = \dfrac{20 - \sqrt{p}}{0{,}2}$

4.4) $x = 50\,e^{-0{,}5\,p}$

5) Para cada uma das funções de demanda anterior, determinar a elasticidade da demanda, $E_x = -\frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp}$.

6) Se a função de demanda de um bem é dada por $p = \sqrt{a - bx}$, onde p é o preço, x a quantidade demandada e a e b constantes positivas, demonstrar que

6.1) E_x decresce com o aumento de x

6.2) $E_x = 1$ se $x = \frac{2a}{b}$

RESPOSTAS

1.1) $C_M = 3 + \dfrac{x}{10}$

1.2) $C_M(20) = 5$

1.3) Não existe $x > 0$ tal que $C_M(x) = 0$

2.1) $\begin{cases} 1)\ C_M = 2 \\ 2)\ C_M(20) = 2 \\ 3)\ \text{Não existe } x > 0 \text{ tal que } C_M(x) = 0 \end{cases}$

2.2) $\begin{cases} 1)\ C_M = \dfrac{2}{\sqrt{4x + 25}} \\ 2)\ C_M(20) = \dfrac{2}{\sqrt{105}} \\ 3)\ \text{Não existe } x > 0 \text{ tal que } C_M(x) = 0 \end{cases}$

2.3) $\begin{cases} 1)\ C_M = \dfrac{3}{2}x^2 - 10x + 10 \\ 2)\ C_M(20) = 410 \\ 3)\ x = \dfrac{10 - 2\sqrt{10}}{3}\ ;\quad x = \dfrac{10 + 2\sqrt{10}}{3} \end{cases}$

2.4) $\begin{cases} 1)\ C_M = 5\, e^{\frac{x}{20}} \\ 2)\ C_M(20) = 5\, e \\ 3)\ \text{Não existe } x > 0 \text{ tal que } C_M(x) = 0 \end{cases}$

3.1) $R_T = \dfrac{10x - x^2}{0,2}$ 3.2) $R_M = \dfrac{10 - 2x}{0,2}$ 3.3) $R_M(10) = -30$ 3.4) $x = 5$

4.1) $\begin{cases} 1)\ R_T = \dfrac{12x - x^2}{0,3} \\ 2)\ R_M = \dfrac{12 - 2x}{0,3} \\ 3)\ R_M(10) = \dfrac{-80}{3} \\ 4)\ x = 6 \end{cases}$

4.2) $\begin{cases} 1)\ R_T = x\sqrt{100 - 5x} \\ 2)\ R_M = \dfrac{200 - 15x}{2\sqrt{100 - 5x}} \\ 3)\ R_M(10) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ 4)\ x = \dfrac{40}{3} \end{cases}$

4.3) $\begin{cases} 1)\ R_T = (20 - 0,2x)^2 x \\ 2)\ R_M = 400 - 16x + 0,12x^2 \\ 3)\ R_M(10) = 252 \\ 4)\ x = 100 \text{ e } x = \dfrac{100}{3} \end{cases}$

4.4) $\begin{cases} 1)\ R_T = 2(\ell n\, 50 - \ell n\, x)\, x \\ 2)\ R_M = -2 + 2(\ell n\, 50 - \ell n\, x) \\ 3)\ R_M(10) = -2 + \ell n\, 25 \\ 4)\ x = \dfrac{50}{e} \end{cases}$

5.1) $E_x = \dfrac{0,3\,p}{x}$

5.2) $E_x = \dfrac{0,4\,p^2}{x}$

5.3) $E_x = \dfrac{2,5\,p}{x\sqrt{p}}$

5.4) $E_x = \dfrac{25\,p\,e^{-0,5\,p}}{x}$

Parte 4: Regra de L´Hospital

Determinar os seguintes limites com auxílio das regras de L'Hospital.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+6x}{x^3+7x^2+5x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-4x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6-2x+3x^2-x^3}{x^4-3x^3-x+3}$

6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{2x^4+2x^3+3x^2+2x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-6x+7}{x^3+7x-1}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5-5x^3}{2-2x^3}$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^5-6}{4x^2-2x+4}$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5-x+x^2}{2-x-2x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

Respostas:

1)0 2)-1 3)6/5 4)∞ 5)-11/26 6)-1/6 7)0 8)5/2

9)+∞ 10)-1/2 11)+∞

Parte 5: Derivadas sucessivas

Calcular as três primeiras derivadas de cada uma das funções

1) $y = k$ (constante)

2) $y = x$

3) $y = x^6$

4) $y = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$

5) $y = \dfrac{2}{x}$

6) $y = \sqrt{5x}$

7) $y = \sqrt[3]{2x}$

8) $y = e^{-x}$

9) $y = \ell n\, x$

10) $y = 3^{2x}$

11) $y = (x+1)^4$

12) $y = x\,\ell n\, x$

13) $y = e^{-x^2}$

14) $y = 0{,}4\, x^{0{,}1}$

15) $y = (1-x)^3$

16) $y = -\dfrac{1}{2}x^{-2}$

17) $y = e^{\frac{1}{x}}$

18) $y = x\, e^{-2x}$

19) $y = 1 - x^3$

20) $y = \log(-x)$

21 Mostre que a função $y = x^3 + 9$ é solução da equação diferencial $y' = 3x^2$.

22 Mostre que a função $y = e^{-x}$ é solução da equação diferencial $y' + y = 0$.

23 Mostre que a função $y = x^2$ é solução da equação $x^2y'' - 2y = 0$.

24 Mostre que a função $y = c \cdot e^{-6x}$ é solução da equação $y' + 6y = 0$, qualquer que seja o valor real c.

25) A função $y=Axe^x$ é solução da equação diferencial $y^{(4)}+2y''' - 2y' - y = 10e^{x}$. Determine a constante A.

26) Seja $f(x)= e^{2x}$

a) Calcule as 4 primeiras derivadas de f(x).
b) Determine $f^{(n)}(x)$.

Respostas: 25) A=5/4 26) a) $f^{(n)}(x).= =2^n e^{2x}$.

Parte 6: Máximos e mínimos

Estudar, no que se refere a máximos e mínimos, as seguintes funções:

1) $y = 4x + 5$

2) $y = 10x + 5$ com $1 \leqslant x \leqslant 10$

3) $y = -5x + 4$ com $-1 < x \leqslant 2$

4) $y = 3x + 4$ com $0 < x < 10$

5) $y = x^2 + 1$

6) $y = -x^2 + 9$

7) $y = x^2 - 3x + 2$

8) $y = -x^2 + 5x - 6$

9) $y = x^2 - 5x + 6$ com $0 \leqslant x \leqslant 3$

10) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{15}{2}x^2 + 50x + 5$

11) $y = x^3 - 1$

12) $y = x^4 - \frac{x^3}{3} + 10$

13) $y = x^4 - 10$

14) $y = \frac{2}{x^4 + 1}$

15) $y = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

16) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

17) $y = \frac{x^2}{x - 1}$, $x \neq 1$

18) $y = \frac{1}{x}$ com $0 < x \leqslant 4$

19) $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$

20) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

21) $y = \sqrt{x^2 - 10x}$

22) $y = e^{-x}$

23) $y = e^{-2x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$

38. Obtenha os pontos de máximo ou de mínimo (quando existirem) das funções aba

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = 6x - x^2$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x + 5$

d) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x + 6$

e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

f) $f(x) = x \cdot \sqrt{x + 2}$

RESPOSTAS

1) Não tem P.M. nem P.m.	2) $x = 1$ P.m.; $x = 10$ P.M.
3) $x = 2$ P.m.	4) Não tem P.m. nem P.M.
5) $x = 0$ P.m.	6) $x = 0$ P.M.
7) $x = \frac{3}{2}$ P.m.	8) $x = \frac{5}{2}$ P.M.
9) $x = \frac{5}{2}$ P.m.; $x = 0$ P.M.; $x = 3$ P.M.	
10) $x = 5$ P.M.; $x = 10$ P.m.	11) Não tem P.M. nem P.m.
12) $x = \frac{1}{4}$ P.m.	13) $x = 0$ P.m.
14) $x = 0$ P.M.	15) Não tem P.M. nem P.m.
16) $x = -1$ P.m.; $x = 1$ P.M.	17) $x = 2$ P.m.; $x = 0$ P.M.
18) $x = 4$ P.m.	19) $x = 0$ P.m.
20) $x = 0$ P.m.	21) $x = 0$ P.m.; $x = 10$ P.m.
22) Não tem P.m. nem P.M.	23) $x = 0$ P.M.; $x = 4$ P.m.

38)a) ponto de mínimo: x=2

b) ponto de máximo: x=3

c) ponto de máximo: x=1 e ponto de mínimo: x=6

d) ponto de máximo: x=2 e ponto de mínimo: x=-2

e) ponto de máximo: x=-1 e ponto de mínimo: x=1

f) ponto de mínimo: x=-4/3

Parte 7: Problemas de máximos e mínimos

39. Deseja-se construir uma piscina retangular com 900 m^2 de área. Quais as dimensões para que o perímetro seja mínimo?

40. Obtenha dois números cuja soma seja 100 e cujo produto seja máximo.

41 A receita mensal de vendas de um produto é $R(x) = 30x - x^2$ e seu custo é $C(x) = 20 + 4x$.

a) Obtenha a quantidade x que maximiza o lucro.

b) Mostre, para o resultado obtido acima, que o custo marginal é igual à receita marginal.

42 Suponha que a função receita seja $R(x) = 60x$ e a função custo seja $C(x) = 2x^3 - 12x^2 + 50x + 40$.

a) Obtenha a quantidade x que deve ser vendida para maximizar o lucro.

b) Mostre que, para o resultado obtido acima, o custo marginal é igual à receita marginal.

Resolva o exercício anterior supondo que a função receita seja $R(x) = -3x^2 + 50x$.

57. O custo de uma firma é $C(x) = 0{,}1x^2 + 5x + 200$, e a equação de demanda é $p = 10 - \frac{x}{20}$

Determine x para que o lucro seja máximo.

58. O preço de venda por unidade de um produto é $p = 50$. Se o custo é $C(x) = 1.000 + 3x +$
$+ 0{,}5x^2$, determine o ponto de máximo lucro.

59. Se a função receita de um produto for $R(x) = -2x^2 + 400x$, obtenha o valor de x que maximiza a receita.

63. A equação de demanda de um produto é $p = 1.000 - x$ e seu custo mensal é $C(x) = 20x +$
$+ 4.000$.

a) Qual preço deve ser cobrado para maximizar o lucro?

b) Se, para cada unidade vendida, a empresa tiver de arcar com um imposto igual a \$ 2,00, que preço deve ser cobrado para maximizar o lucro?

65. Deseja-se construir um prédio com m andares. O custo do terreno é \$ 1.000.000,00 e o custo de cada andar é \$ 25.000 + 1.000 m ($m = 1, 2, 3...$).
Quantos andares devem ser construídos para minimizar o custo por andar?

67 A equação de demanda de um produto é $p = 30 - 5 \ln x$.

a) Ache a função receita $R(x)$.

b) Ache o valor de x que maximiza a receita.

c) Ache a receita marginal $Rmg(x)$, e mostre que ela é sempre decrescente, mas nunca se anula.

69 Uma empresa tem uma capacidade de produção de, no máximo, 200 unidades por semana. A função demanda do produto é $p = -0{,}2x + 900$, e o custo semanal é dado por $C(x) = 500 - 8x + x^2$. Qual preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro semanal?

Respostas:

39) 30m por 30m

40) 50 e 50

41)a)13

42)a)4,38

57)x=50/3

58)x=48

59)x=100

63)a)\$510,00 b)\$511,00

65)32

67)a) R=30x-5xlnx b)$x=e^5$

69)\$860,00