4. Função

O objeto fundamental do cálculo são as funções. Assim, num curso de Pré-Cálculo é importante estudar as idéias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los.

Ao estudar algum fenômeno de qualquer natureza, sempre se procura estabelecer relações entre as grandezas envolvidas. Se duas grandezas x e y estão relacionadas de tal maneira que a cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor associado a y, então se diz que y é uma função de x. Por exemplo, a distância percorrida por um carro em um determinado período de tempo é uma função de sua velocidade, a área de uma circunferência é uma função de seu raio, a área de um quadrado é uma função de seu lado, a população de um determinado país é uma função do tempo, dentre muitos outros exemplos.

Definição: Uma função f é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto A um único elemento de um conjunto B. $f: A \to B$

$$x \quad f(x)$$

Se $x \in A$ então o elemento de B que f associa a x é denotado $f(x)$.

O conjunto A é chamado domínio da função.
O conjunto B é chamado de contradomínio da função.
O conjunto que compreende todos os valores assumidos por $y=f(x)$ quando x toma todos os possíveis valores em seu domínio é chamado de imagem da função f.

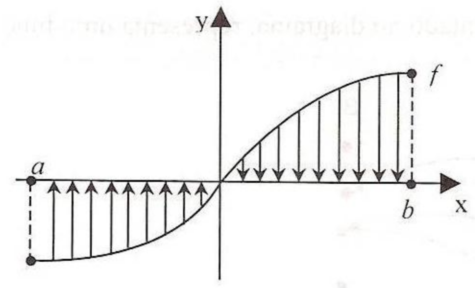
OBS:

1. x é denominada variável independente da função (varia sem depender de nenhuma outra variável).
2. y é chamada variável dependente da função (como $y=f(x)$, temos que y depende da variação da variável x) .

Uma função de uma variável real a valores reais é uma função $f: A \to B$, onde A e B são subconjuntos de IR.
Seja $f: A \to B$ uma função. O conjunto $G_f=\{ (x, f(x)) \,/\, x \in A \}$ denomina-se gráfico de f.
Assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x,y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x,f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

Domínio

Para determinarmos o domínio (leia "o maior domínio") de uma função, estaremos procurando qual o maior conjunto possível $A \subset IR$ que satisfaça a lei de correspondência definida (lembremo-nos de que, para termos uma função, todos os elementos do conjunto A têm que estar associados a um elemento em B).
Graficamente, o domínio da função é a projeção do gráfico de f, sobre o eixo das abscissas.



Domínio: [a,b]

Problemas de domínio

$$f(x)=\frac{n(x)}{d(x)} \Rightarrow d(x)\neq 0;$$

$$f(x)=\sqrt[par]{r(x)} \Rightarrow r(x)\geq 0$$

$$f(x)=\frac{n(x)}{\sqrt[par]{d(x)}} \Rightarrow d(x)>0$$

É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por $y=f(x)$, $x\in A$

Exemplo 1: Seja $y=f(x)=x^2$. Tem-se:

a) $D_f = IR$
b) $f(2)=2^2=4$ (o valor que f assume em 2 é 4)
c) $f(-1)=(-1)^2=1$
d) $f(0)=0^2=0$
e) $f(t)=t^2$
f) $f(x+1)=(x+1)^2$
g) Gráfico de f = $\{(x,y)/\ y=x^2,\ x\in IR\}$

Exemplo 2:

Seja f: $A \subset IR \rightarrow B \subset IR$ uma função. Vamos determinar o (maior) domínio das seguintes leis de correspondência:

a) $f(x)=7x$

b) $f(x)=y=\dfrac{1}{2x+4}$

c) $f(x)=\sqrt{x-8}$

d) f(x)= $\frac{2}{x^2 + x}$

e) f(x)= $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

f) f(x)= $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$

Exemplo 3: Dada a função f(x)=-x^2+2x , simplifique:

a) $\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$

b) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Exercícios:

1) Calcule:

a) g(0), g(2) e g($\sqrt{2}$) sendo g(x)= $\dfrac{x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{f(a+b)-f(a-b)}{ab}$, sendo $f(x)=x^2$ e $ab \neq 0$

2) Simplifique $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\,(x \neq p)$ sendo dados:

a) f(x)=x^2 e p=1
b) f(x)=x^3 e p=2
c) f(x)=x^3 e p qualquer
d) f(x)=5 e p=2
e) f(x)= $\dfrac{1}{x}$ e p=1
f) f(x)=x^2-3x e p=-2

Exercícios propostos:

1) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) y= $\sqrt[3]{x+1}$
b) y= $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{3x+1}$
c) y= $\dfrac{x}{x^2-x-6}+\dfrac{1}{x+4}$
d) y= $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x-1}}$
e) y= $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2) Determinar o domínio das seguintes funções f : $\begin{array}{ccc} A\subset\mathbb{R} & \rightarrow & B\subset\mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=y \end{array}$:

a) $f(x)=x^2+2x$
b) $f(x)=\dfrac{x}{2x-7}$
c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{4-x}}$
d) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-9}$
e) $f(x)=\sqrt[7]{x^2-9}$
f) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$
g) $f(x)=\sqrt{x-2}-\dfrac{x+1}{x-3}$
h) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

3) Simplifique $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $(h \neq 0)$ sendo $f(x)$ igual a

a) $2x+1$
b) $3x-8$
c) $-2x+4$
d) x^2
e) x^2+3x
f) $-x^2+5$
g) x^2-2x
h) x^2-2x+3
i) $-2x^2+3$
j) $2x^2+x+1$
l) x^3
m) x^3+2x
n) x^3+x^2-x
o) 5
p) $\dfrac{1}{x}$
q) $2x^3-x$
r) $\dfrac{1}{x^2}$
s) $\dfrac{1}{x+2}$

Respostas:

1) a) IR b) {x∈IR/x≥-1/3}ou [-1/3, +∞[

c){ x∈IR /x≠-4 e x≠-2 e x≠-3}ou]- ∞,-4[U]-4,-3[U]-3,-2[U]-2,+ ∞[

d) { x∈IR /x>1/3} e){ x∈IR /x≠0}

2)

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}-\left\{\frac{7}{2}\right\}$
c) $[2,4)\cup(4,+\infty)$
d) $\mathbb{R}-\{-3,3\}$
e) $\mathbb{R}$
f) $[2,+\infty)$
g) $[2,3)\cup(3,+\infty)$
h) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty$

3. ***a)*** 2 ***b)*** 3 ***c)*** -2 ***d)*** $2x+h$ ***e)*** $2x+3+h$ ***f)*** $-2x-h$

g) $2x-2+h$ ***h)*** $2x-2+h$ ***i)*** $-4x-2h$ ***j)*** $4x+1+2h$

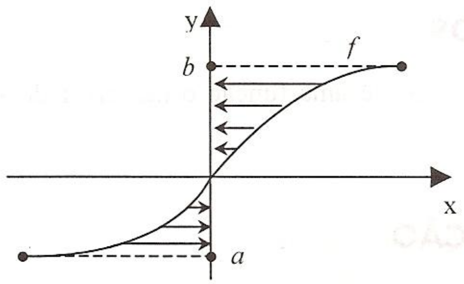
l) $3x^2+3xh+h^2$ ***m)*** $3x^2+2+3xh+h^2$

n) $3x^2+2x-1+3xh+h+h^2$ ***o)*** 0 ***p)*** $-\dfrac{1}{x(x+h)}$

q) $6x^2-1+6xh+2h^2$ ***r)*** $-\dfrac{2x+h}{x^2\,(x+h)^2}$ ***s)*** $-\dfrac{1}{(x+2)(x+2+h)}$

<u>Imagem e contradomínio</u>

O conjunto que compreende todos os valores assumidos por y=f(x) quando x toma todos os possíveis valores em seu domínio é chamado de <u>imagem</u> da função f.
Graficamente, o conjunto imagem da função é a projeção do gráfico de f sobre o eixo das ordenadas.



Im(f) = [a,b]

Raízes ou zeros

Chama-se raiz ou zero de uma função o número r do seu domínio tal que f(r)=0.

Taxa de variação

Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos do domínio de uma função f. Chama-se taxa de variação média de f entre x_1 e x_2 a razão:

$$\boxed{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}, x_1 \neq x_2}$$

Exercício

1) Dada a função f(x)= $\sqrt{2x-1}$, responda:

a) Qual o seu domínio?
b) Qual a imagem de x=5?
c) Qual o valor de x que possui imagem 5?

OBS: Uma função f com valores em IR só está bem definida quando sabemos seu (maior) domínio e sua lei de correspondência.

Função polinômio

Definição: Um polinômio ou função polinomial P, na variável x, é toda expressão do tipo:

P(x)= $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde n∈IN, $a_i, i = 0,1,...,n$ são números reais chamados coeficientes e as parcelas $a_i x^i, i = 1,...,n$, termos do polinômio. Cada termo é denominado monômio.

Gráfico: A representação gráfica de um polinômio pode ser feita por pontos. No entanto, para a representação gráfica de uma função polinômio de grau n>2, num intervalo dado, devemos tomar o cuidado de considerar um número suficientemente grande de pontos do referido intervalo a fim de evitar erros grosseiros de representação.

Os polinômios são usados comumente para modelar diversas quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais. Por exemplo, os economistas frequentemente usam uma função polinomial para representar o custo da produção de x unidades de um produto.

4.1 Função afim ou função polinomial do 1º grau

Denomina-se função afim ou função polinomial do 1º grau a função que associa a todo número real x, outro número real y, tal que:

$$\boxed{y=f(x)=ax+b},$$

onde a e b são constantes reais ($a \neq 0$).

<u>Domínio</u>: O domínio da função afim é IR.
<u>Imagem</u>: IR
<u>Gráfico</u>: Reta não paralela aos eixos x e y.
Interseção da reta com o eixo 0y: (0,b). Assim, o número b chama-se coeficiente linear.
Interseção da reta com o eixo 0x: (-b/a,0). Graficamente, a interseção da reta com o eixo 0x é o zero de uma função do 1º grau.

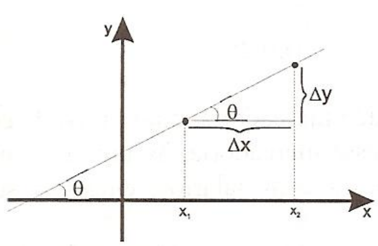
O valor –b/a é a raiz dessa função. A taxa de variação de uma função do 1º grau é constante e igual ao coeficiente a.

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2}=\frac{ax_1-ax_2}{x_1-x_2}=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=a\ ,$$

$\forall\ x_1,x_2 \in$ IR, $x_1 \neq x_2$.

O número real a é denominado <u>coeficiente angular</u> ou <u>declividade da reta</u>.

Graficamente:

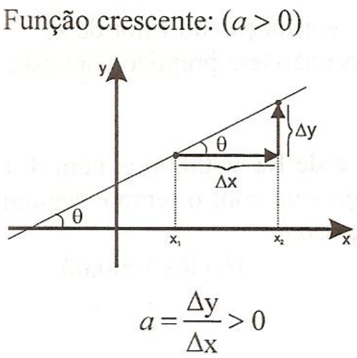


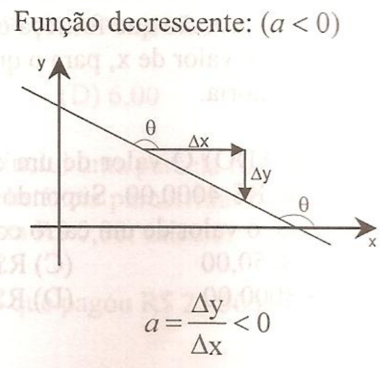
Sempre que x e y são tomados na mesma escala tem-se

$$\boxed{a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{tg}\theta;}$$

Por isso o coeficiente *a* é denominado coeficiente angular da reta.

<u>Funções crescentes e decrescentes:</u>



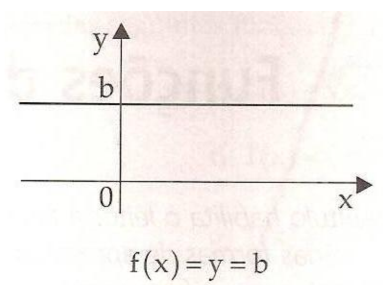


A função afim é crescente se, e somente se, o coeficiente angular for positivo, isto é, se, e somente se, a>0.
A função afim é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular for negativo, isto é, se, e somente se, a<0.

4.1.1 Função constante:

Seja f(x)=ax+b. Se a=0, a função polinomial do 1º grau se torna de grau zero e é chamada de função constante. Assim, teremos $\boxed{f(x)=b}$

Domínio: IR.
Imagem: {b}
Gráfico: reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto (0,b).



Sinais de uma função

Seja f: $A \subset IR \rightarrow B \subset IR$.
Para que valores de x temos f(x)>0, f(x)=0 e f(x)<0?

Resolver esta questão é estudar o sinal da função.

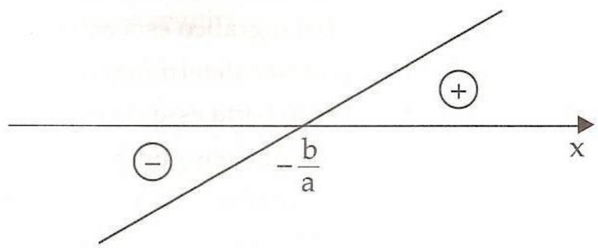
- Para saber quando f(x)>0, temos que determinar os valores de x, onde y>0, ou seja, os valores de x em que o gráfico está acima do eixo x.
- Para saber quando f(x)=0, devemos determinar as raízes da função, ou seja, os valores de x onde o gráfico corta esse eixo.

- Para saber quando $f(x)<0$, temos de determinar os valores de x onde $y<0$, ou seja, os valores de x onde o gráfico está abaixo do eixo x.

No caso da função afim, como o zero da função ($f(x)=0$) é $x=-b/a$, podemos verificar que:

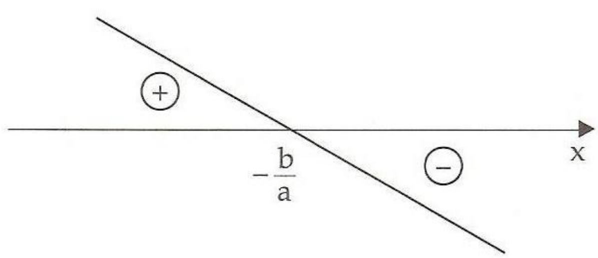
a) Se a função for crescente, isto é, se $a>0$:

$$\begin{cases} f(x)=ax+b>0 \iff ax>-b \iff x>-\dfrac{b}{a} \\ f(x)=ax+b<0 \iff ax<-b \iff x<-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$



b) Se a função for decrescente, isto é, se $a<0$:

$$\begin{cases} f(x)=ax+b>0 \iff ax>-b \iff x<-\dfrac{b}{a} \\ f(x)=ax+b<0 \iff ax<-b \iff x>-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$



Exercícios

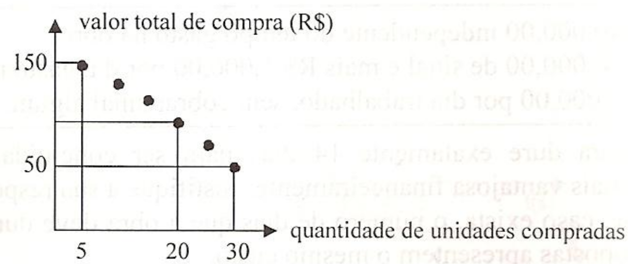
1) Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x)=y=-8$
b) $f(x)=y=-3x$
c) $f(x)=y=3x-6$

2. (IBMEC) Uma empresa fabrica determinada mercadoria, cujo preço de custo é de R$ 1,35, por unidade. Na produção dessa mercadoria, há um custo mensal fixo de R$ 22.500,00, referente a despesas com salários, encargos sociais, manutenção das máquinas, etc...
Seja x o número de unidades fabricadas por mês e y o lucro total, devido à venda de toda a produção.
Sabendo que cada unidade será vendida por R$ 2,60, determinar:
A) uma expressão que forneça o valor de y, em função do valor de x;
B) o menor valor de x, para o qual a empresa não terá prejuízo com essa mercadoria.

Exercícios propostos

1) (UERJ) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.



Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, o equivalente a:

(A) 4,50 (B) 5,00 (C) 5,50 (D) 6,00

2) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:
A) o preço de uma corrida de 11 km;
B) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.

3) (UERJ) Uma pessoa deseja fazer uma reforma em seu apartamento. Para isso, verificou os preços em três firmas especializadas e obteve os seguintes orçamentos:

Firma 1: R$ 40.000,00 independente do tempo gasto na obra;
Firma 2: R$ 20.000,00 de sinal e mais R$ 1.000,00 por dia gasto na obra;
Firma 3: R$ 2.000,00 por dia trabalhado, sem cobrar sinal algum.

A) Caso a obra dure exatamente 14 dias para ser concluída, indique a proposta mais vantajosa financeiramente. Justifique a sua resposta.
B) Determine, caso exista, o número de dias que a obra deve durar para que as três propostas apresentem o mesmo custo.

4) (UNIRIO) Sejam f e g funções tais que $f(x)= 5x+2$ e $g(x)=-6x+7$. Determine a lei que define a função afim h, sabendo que $h(-5)=1$ e que o gráfico de h passa pelo ponto de interseção dos gráficos de f com g.

5) Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico de cada uma das funções seguintes:

a) f(x)=y= π
b) f(x)=y= x/3
c) f(x)=y=-3x+1

6) Determine a equação da reta que passa por dois pontos $(x_1 ; y_1)$ e $(x_2 ; y_2)$ dados, o coeficiente angular (ou declividade) da reta, esboce o gráfico, determine o domínio e a imagem:

a) $(x_1 ; y_1)=(-3 ; 1)$; $(x_2 ; y_2)=(4 ; 0)$

b) $(x_1 ; y_1)=(-2 ; 0)$; $(x_2 ; y_2)=(-1 ; -3)$

c) $(x_1 ; y_1)=(2 ; 1)$; $(x_2 ; y_2)=(-2 ; 0)$

7) Determine a equação da reta, dado o coeficiente angular (ou declividade) *m*, que passa pelo ponto $(x_1 ; y_1)$, trace o gráfico, determine o domínio e a imagem:

a) $m=-3$; $(x_1 ; y_1)=(3 ; 2)$
b) $m=-4$; $(x_1 ; y_1)=(-5 ; 0)$
c) $m=0$; $(x_1 ; y_1)=(2; -4)$

Respostas:

1) A 2) a) $12,90 b) 21km 3) a) firma 3 b) 20 dias 4) h(x)=(3/5)x+4

5) a) D=IR, Im={π} b)D=IR, Im=IR c) D=Im=IR

6)a)y=-x/7 + 4/7 D(f)=Im(f)=IR /b)y=-3x-6; D(f)=Im(f)=IR c) y=1;D(f)=IR, Im(f)={1}

7)a)y=-3x+11;D(f)=Im(f)=IR/ b)y=-4x-20; D(f)=Im(f)=IR/ c) y=-4; D(f)=IR, Im(f)={-4}

Inequações produto

Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações
f(x).g(x)>0, f(x).g(x)<0 , f(x).g(x) ≥0 e f(x).g(x) ≤0 são denominadas inequações produto.

Exemplo: Resolva a inequação (2x-1)(x+4)>0

1º.) Faremos inicialmente o estudo dos sinais das funções f(x) =2x-1 e g(x)=x+4

2^o.) Faremos um quadro-produto, no qual figuram os sinais dos fatores e sinal do produto.

Exercício:

1) Determine os valores de x que verificam cada uma das seguintes desigualdades:

    a) (-3x+2)(x+1)<0
    b) –2x(x-1)(3x+4)<0

2) Obtenha o domínio da função f(x)= $\sqrt{(3x+5)(x+4)(1-2x)}$.

Exercícios propostos

1) Resolva cada uma das seguintes inequações:
a) $(x-\sqrt{2})(2x+3)(x-1) \geqslant 0$ b) $(2x^2-x)(-4x+1) \leqslant 0$

2) Obtenha o domínio da função $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{(-x-1)(x+3)(1-3x)}}$.

Inequação quociente

Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações:

$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \dfrac{f(x)}{g(x)} < 0, \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ *e* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ são denominadas inequações quociente.

As regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas. Na resolução de inequaçoes quociente, podemos, portanto, usar o quadro de sinais.

Exemplo:

Resolva a inequação $\dfrac{(x+3)(1-x)}{(x-2)} \geq 0.$

Exercícios:

1) Resolva a inequação

a) $\dfrac{(2-5x)(x+1)}{(-x+3)} \leq 0$ b) $\dfrac{x+2}{2x-1} < 2$

2) Obtenha o domínio da função f(x)= $\sqrt{\dfrac{(2-x)}{(1-x)(3-x)}}$

Exercícios propostos

1) Resolva as seguintes inequações

a) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \geq 0$ b) $\dfrac{2x}{x+2} > 2$ c) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{3}{x}$

2) Obtenha o domínio da função f(x)= $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$.