Universidade Federal Fluminense
ICEx – Volta Redonda
Métodos Quantitativos Aplicados I
Professora: Marina Sequeiros

3. Polinômios

Definição: Um polinômio ou função polinomial P, na variável x, é toda expressão do tipo: P(x)=$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde n∈IN, $a_i, i = 0,1,...,n$ são números reais chamados coeficientes e as parcelas $a_i x^i, i = 1,...,n$, termos do polinômio. Cada termo é denominado monômio.

Exemplos:
P(x)=$5x^4 + 3x^3 - 2x + 1$; $P(x) = -8x + \pi$; $P(x) = x^5 + \sqrt{3}x^2 + 2$

Contra-exemplos (expressões que não representam polinômios):
$f(x) = x - 3x^{\frac{1}{2}} + 5$; $f(x) = x^{-4} + 2x + 1$

3.1. Valor numérico de um polinômio

Seja P(x) um polinômio.
Considere x=α (α∈IR) um valor fixo atribuído a x.
Calcule P(α)=$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$.
P(α) é o valor numérico do polinômio para x=α.

OBS:
1. O valor numérico do polinômio P para x=0 é:
   P(0)=$a_n 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + ... a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$.
   Isto é, P(0) é igual ao termo independente de x.
2. O valor numérico do polinômio P para x=1 é:
   P(1)= $a_n 1^n + a_{n-1}1^{n-1} + ... a_2 1^2 + a_1 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + ... a_2 + a_1 + a_0$.
   Assim, P(1)= $\sum_{k=0}^{n} a_k$, isto é, P(1) é igual a soma dos coeficientes do polinômio.
3. Quando P(α)=0, dizemos que α é raiz do polinômio P(x).

3.2. Polinômio nulo

É aquele em que todos os seus coeficientes são iguais a zero (P(x)=0).

3.3. Grau de um polinômio

O grau de um polinômio P(x), não nulo, é o maior expoente da variável x, com coeficiente não nulo, que aparece na expressão que define P(x).

Exemplo:
P(x)=$5x^4 - x^6$ → gr(P)=6
P(x)= $3x^2 - 5x + 1$ → gr(P)=2
P(x)=5 → gr(P)=0

OBS: Não se define o grau de polinômio nulo.

3.4. Igualdade de polinômios

Dois polinômios P(x) e Q(x) são iguais, P(x)=Q(x), quando todos os seus coeficientes são ordenadamente iguais.

Sejam P(x)= $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e Q(x)= $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

P(x)=Q(x) $\leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ a_0 = b_0 \end{cases}$ Coeficientes de mesmo grau são iguais

3.5. Operações

Sejam P(x) e Q(x) tais que
P(x)= $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e Q(x)= $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, n $\in$IN.

3.5.1. Adição e subtração de polinômios

A adição e subtração de polinômios é feita a partir da adição e subtração dos coeficientes correspondentes a um mesmo grau.
P(x)+Q(x)=$(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

P(x)-Q(x)=$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

Exemplo:
P(x)= $3x^3 - 2x^2 + 2$ e Q(x)=$3x^4 - 7x^3 + x + 1$

P(x)+Q(x)= $(0+3)x^4 + (3-7)x^3 + (-2+0)x^2 + (0+1)x + (2+1) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x + 3$
P(x)-Q(x) = $(0-3)x^4 + (3-(-7))x^3 + (-2-0)x^2 + (0-1)x + (2-1) = -3x^4 + 10x^3 - 2x^2 - x + 1$

3.5.2. Multiplicação de polinômios

A multiplicação é feita pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e multiplicação.

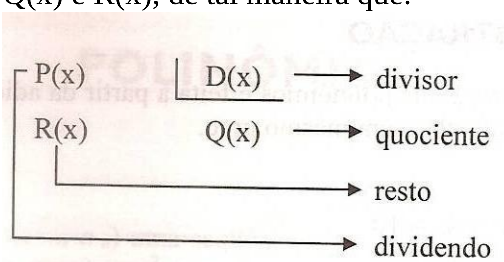
OBS: Se o grau do polinômio P é n e o grau do polinômio Q é n, então o grau do polinômio P.Q será n+m.

Exemplo: $P(x)=2x-1$ e $Q(x)=5x^2+2x-2$

$P(x).Q(x)=(2x-1)(5x^2+2x-2)$
$P(x).Q(x)=10x^3+4x^2-4x-5x^2-2x+2$
$P(x).Q(x)=10x^3-x^2-6x+2$

3.5.3 Divisão de polinômios

Dividir um polinômio P(x) por um polinômio D(x), não nulo, é achar um par de polinômios Q(x) e R(x), de tal maneira que:



Ou seja, dividir o polinômio P(x) pelo polinômio D(x) é obter os polinômios Q(x) e R(x) tais que:

$$\boxed{P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

onde $0 \leq G_R < G_D$ ou a divisão é exata e $R(x) = 0$

Quando o resto da divisão de P(x) por D(x) é nulo, dizemos que o polinômio P(x) é divisível por D(x).

Método de divisão de polinômios

1. Método da chave

Vamos dividir $2x^3+3x-1$ *por* x^2+2x+5

Solução: *Completa-se o dividendo com $0x^2$*

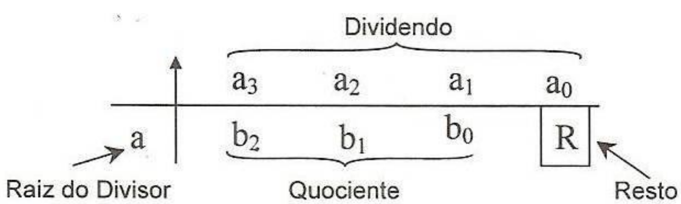
$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 & x^2 + 2x + 5 \\ \cline{2-2}
-2x^3 - 4x^2 - 10x & 2x - 4 \\ \cline{1-1}
-4x^2 - 7x - 1 & \\
4x^2 + 8x + 20 & \\ \cline{1-1}
x + 19 &
\end{array}
$$

Então: $Q(x) = 2x - 4$
$R(x) = x + 19$

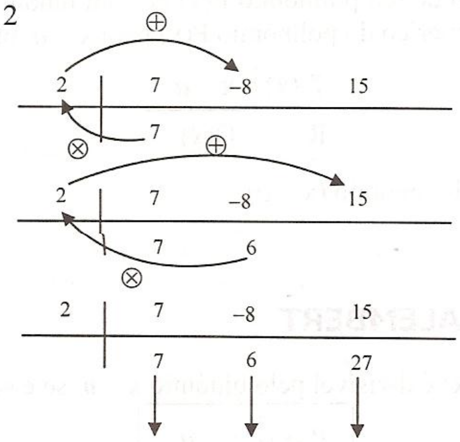
2. Dispositivo prático de Briott-Ruffini

Este dispositivo é utilizado para dividir um polinômio P(x) por um polinômio do 1º grau da forma x-a. Neste método, trabalha-se apenas com os coeficientes do polinômio e com o valor de a.

Dispositivo: Seja $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ por $D(x)=x-a$



Exemplo:
$P(x) = 7x^2 - 8x + 15$
Binômio: $x - 2$



$Q(x) = 7x + 6 \quad R = 27$

OBS: Se o resto da divisão é zero, então o polinômio é divisível pelo binômio divisor.

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do 1ºgrau do tipo x-a é igual ao valor numérico do polinômio P(x) para x=a, ou seja, P(a)=R.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

R = P(a), onde a é raíz do binômio (x − a).

Como o divisor é do 1º grau, o resto é nulo ou tem grau zero. De qualquer modo, R é uma constante, isto é, independente de x. Para calcular o valor de R basta substituir na identidade x por a.

Note que a é raiz do binômio.

Teorema de D´Alembert

Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio x-a se, e somente se, P(a)=0.

$$\boxed{\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \hline 0 & Q(x) \\ \multicolumn{2}{l}{R = P(a) = 0} \end{array}}$$

Note que "a" além de ser raiz do binômio x-a é também raiz do polinômio P(x).

OBS: Conhecida uma raiz **r** do polinômio P(x), podemos obter as demais raízes de P(x) da seguinte maneira:

- Dividimos P(x) por x-r, usando o algoritmo de Briott-Ruffini. As raízes do quociente Q(x) dessa divisão são as demais raízes de P(x).

Divisão por (x-a)(x-b)

Se um polinômio P(x) é divisível separadamente pelos binômios (x-a) e (x-b), com a≠b, então P(x) é divisível pelo produto (x-a)(x-b). (A recíproca é verdadeira)

Generalizando, se P(x) é divisível por n fatores distintos $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, ..., $(x-a_n)$ então P(x) é divisível pelo produto $(x-a_1).(x-a_2)...(x-a_n)$.

Exercício proposto:

Calcule as raízes de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$, sabendo que P(x) é divisível por x - 2.

3.6 Equações polinomiais

Definição: Se P(x) é um polinômio de grau n>0, chama-se equação algébrica ou polinomial à igualdade P(x)=0. Assim, equação algébrica de grau n é uma equação do tipo:

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =0$, $a_0 \neq 0$.

Raiz de uma equação algébrica

Dada uma equação algébrica P(x)=0, o número r é uma raiz dessa equação se, e somente se, P(r)=0.

Conjunto-solução

Conjunto-solução de uma equação algébrica é o conjunto formado por todas as raízes (e somente por elas) da equação. Resolver uma equação é obter seu conjunto solução.

Equação do 1º grau

Uma equação é classificada como equação do 1º grau quando puder ser escrita sob a forma

$$ax+b=0,$$

onde a e b são reais com $a \neq 0$. Uma equação do 1º grau tem apenas uma raiz que pode ser obtida isolando-se x.

Equação do 2º grau

Uma equação é classificada como equação do 2º grau quando puder ser escrita sob a forma

$$ax^2+bx+c=0,$$

onde a,b e c são reais, com $a \neq 0$. Uma equação do 2º grau tem no máximo duas raízes, que podem ser obtidas pela fórmula:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

OBS:

- Se $\Delta>0$ então a equação admite duas raízes reais e distintas
- Se $\Delta=0$ então a equação admite duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta<0$ então a equação admite duas raízes complexas.

Equação do 3º e 4º grau

Uma equação é classificada como equação do 3º e 4º grau, quando puder ser escrita sob a forma

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad ou \quad ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

As raízes das equações do terceiro e quarto graus podem ser obtidas através de fórmulas gerais que são extremamente trabalhosas.

OBS: As equações de grau superior a 4 não apresentam fórmulas resolutivas. Desta forma, apresentam-se teoremas válidos para quaisquer equações algébricas que possibilitam a resolução ou, ao menos, informações úteis na obtenção das raízes de uma equação.

Teorema Fundamental da Álgebra

O teorema da Álgebra sobre equações algébricas de coeficientes reais diz:

Toda equação algébrica de grau n admite no conjunto dos números complexos n raízes complexas.

O teorema garante a existência de n raízes complexas, não diz como obtê-las.
O teorema tem validade no conjunto dos números complexos, ou seja, pode ou não ter raiz real.

Teorema da decomposição

Seja $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n>0. Demonstra-se que P(x) pode ser decomposto, ou seja, fatorado, na forma seguinte:

$$\boxed{P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)}$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_n$. são as raízes da equação: $P(x) = 0$

OBS: Esta forma fatorada mostra que a equação tem no máximo n raízes distintas, e não exatamente n, pois não sabemos se os números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são todos distintos dois a dois.

Multiplicidade de uma raiz

Dizemos que r é uma raiz de multiplicidade m (m≥1), da equação P(x)=0 se, e somente se, a equação puder ser escrita sob a forma,

$$(x-r)^m \,.\, Q(x)=0$$

Isto é, r é raiz de multiplicidade m de P(x)=0 quando o polinômio P é divisível por $(x-r)^m$, ou seja, a decomposição de P apresenta exatamente m fatores iguais a (x-r).

Exemplo: A equação $x^5.(x+7)^3$ admite as raízes x=0 (com multiplicidade 5) e x= -7 (com multiplicidade 3).

Pesquisa de raízes

Quando se conhece uma raiz r de uma equação algébrica P(x)=0, divide-se P(x) por x-r, recaindo-se numa de grau menor.

Exemplo: Se x=-3 é uma raiz da equação $x^3+3x^2+2x+6=0$, determine as outras raízes.

$$\begin{array}{r|rrr|l} -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 0 \quad 2} & & & 0 \longrightarrow \text{Resto} \end{array}$$

$$x^2+2=0$$

$$x^2=-2$$

$$x=\pm\sqrt{2}\,i$$

Teorema das raízes inteiras

Se r é uma raiz inteira de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$, então r é um divisor de a_o.

OBS: Este teorema permite descobrir se a equação tem ou não raízes inteiras; basta para tanto, verificar um por um os divisores do termo independente de x, a_0.

Teorema das raízes racionais

Se $r = \dfrac{p}{q}$ (p e q inteiros primos entre si), é uma raiz da equação algébrica de coeficientes inteiros.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$, então p é divisor de a_o e q é divisor de a_n.

Observação:

Este teorema abrange o anterior, ou seja, o conjunto das possíveis raízes racionais contém o conjunto das possíveis raízes inteiras.

Universidade Federal Fluminense
ICEx – Volta Redonda
Métodos Quantitativos Aplicados I
Professora: Marina Sequeiros

Teorema das raízes complexas

Se um número complexo $x = a + bi$ (a, $b \in R$) é raiz de uma equação algébrica com **coeficientes reais**, então o seu conjugado $\overline{x} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Importante:

Este teorema apresenta as conseqüências:

- O número de raízes complexas, não reais, de uma equação algébrica com coeficientes reais é sempre par.
- Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Exercícios

1) Determine o valor de r no polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 + rx - 3$, sabendo-se que $x = -2$ é raiz.
Determine a equação deste polinômio.

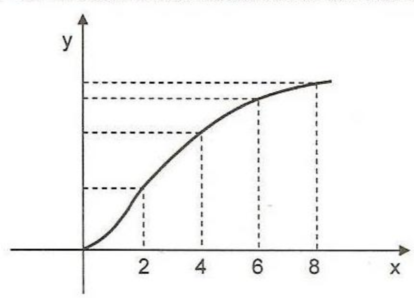
2) Calcule as raízes de P(x)= $x^3 - x^2 - 4x + 4$, sabendo que P(x) é divisível por x+2.

3) (PUC) Os valores das constantes a e b, para os quais $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$ para todo $x \notin \{2,3\}$, são tais que o produto ab vale:
(A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Exercícios propostos:

1) Determine o valor de r no polinômio $P(x) = x^3 - rx^2 + 2$, sabendo-se que $x = 1$ é a raiz desse polinômio. Determine a equação do polinômio.

2) A figura a seguir mostra uma função que dá a quantidade total de peças que um operário monta em função do número de horas trabalhadas em um dia: $y = -x^3 + 5x^2 + 180x$.



a) Quantas peças monta nas duas primeiras horas de trabalho? E dessas peças, quantas monta na primeira hora e quantas monta na segunda hora?
b) Essa função é crescente ou decrescente no intervalo [0,8]? Por quê?
c) Em qual intervalo dos assinalados no eixo x, o operário monta o maior número de peças?

3) Seja o polinômio $P(x)=x^4-3x^2-5$. Calcule $P(-1)-\frac{1}{7}P(3)$.

4) Determine m e n no polinômio $P(x)=mx^3-2x^2+nx-1$, sabendo-se que 1 é a raiz do polinômio e que $P(-2)=-21$.

5) Determinar o polinômio $P(x)=ax^2+bx+c$, sabendo-se que $P(0)=5$, $P(1)=6$ e $P(-2)=-9$.

6) Determine a, b e c, de modo que $(a+b-1)x^2+(b-2c)x+(2c-1)=0$.

7) Determine a e b de modo que $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{5x+1}{x^2-1}$. ($x\neq 1$ e $x\neq -1$)

Respostas dos exercícios propostos

1) r=3
2) a) 372, na primeira hora monta 184 e na segunda 188;
b) Crescente, porque aumentando-se o número de horas de trabalho, aumenta-se o número de peças montada;
c)[0,2]

3) -14 4)m=1 e n=2 5) $P(x)=-2x^2+3x+5$ 6) a=0,b=1 e c=1/2
7) a=3 e b=2

3.7 Produtos notáveis

Os produtos notáveis são multiplicações entre polinômios, muito conhecidas em virtude de seu uso extenso.

Igualdade	Exemplo
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+2)^2 = x^2+2x+4$
$(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(4x-2)^2 = 16x^2-16x+4$
$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$	$x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$	$x^2-4=(x-2)(x+2)$
$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$	$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$
$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$	$x^4-16=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$
$x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$	$x^5-32=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$
$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})$	

3.8. Fatoração

Fatorar um polinômio significa reescrevê-lo como produto de outros polinômios.

Exemplos:

a) $x^3 - x =$

b) $x^4 - 5x^2 =$

c) $x^4 - 1 =$

d) $x^3 + 8 =$

e) $x^6 - 27 =$

Exercícios:

1) Fatorar os seguintes polinômios:

$y = 6x + x^2$ | d) $y = x^7 - 1$

$y = x^2 - 25$ | e) $y = x^6 + 2x^4 + x^2$

$y = 16x^4 - a^4$ | f) $y = x^5 - 6x^3 + 9x$

2) Utilizando a resolução do exercício anterior, determine onde cada polinômio se anula $(P(x) = 0)$.

3) Simplifique

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

d) $\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

e) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1}$

f) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}}{x - 3}$

4) Fatore o polinômio do 2º grau

a) $x^2 - 3x + 2$ b) $x^2 - x - 2$
c) $x^2 - 2x + 1$ d) $x^2 - 6x + 9$
e) $2x^2 - 3x$ f) $2x^2 - 3x + 1$

Exercícios propostos

1) Simplifique

a) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x - 5}$ e) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p}$

b) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}}{x - p}$ f) $\dfrac{x^4 - p^4}{x - p}$

c) $\dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ g) $\dfrac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h}$

d) $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$ h) $\dfrac{(x + h)^2 - (x - h)^2}{h}$

2) Fatore o polinômio do 2º grau

a) $x^2 - 25$ c) $3x^2 + x - 2$
b) $4x^2 - 9$ d) $2x^2 - 5x$

3) Fatore os polinômios dados

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ c) $x^3 + 2x^2 - 3x$
d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ e) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ f) $x^3 - 1$

4) Determine, caso existam, as raízes inteiras da equação:

a) $x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$ *b)* $x^3 - x^2 + x + 14 = 0$ *c)* $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$
d) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$ *e)* $x^3 + x^2 + x - 14 = 0$ *f)* $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

3.9. Completar quadrados

O processo de completar quadrados tem base nas fórmulas de produtos notáveis $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$, fazendo-se uma comparação direta entre os termos . É uma operação muito utilizada em polinômios de grau 2.

Exemplos: Completar quadrados:

a) x^2+6x

Temos que comparar com $(a+b)^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= x^2 + 6x$

Comparando, diretamente, temos a=x e que 2ab=6x → 2b=6 → b=3. Logo $b^2=9$.
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Assim: $x^2 + 6x = x^2 + 6x + (9-9) = (x^2 + 6x + 9) – 9 = (x + 3)^2 - 9$

b) $x^2 – x + 2 = (x^2 – x) + 2$

Inicialmente, vamos desconsiderar a constante. Podemos comparar essa expressão com $(a-b)^2$, pois o coeficiente do termo de grau 1 é negativo. Assim:
$(a-b)^2= a^2 - 2ab + b^2$
$x^2 - x$

Comparando, diretamente, temos que a=x e que 2ab=x. Daí, 2b=1 → b=1/2. Logo, $b^2=1/4$

$(a-b)^2 = a^2 –2ab + b^2$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

c) Assim, $(x^2 – x) + 2 = (x^2 – x) +2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

Exercício: Completar quadrados

a) x^2-4x
b) $-x^2+8x+3$
c) x^4-2x^2+2

Exercício proposto

Completar quadrados:

a) x^2+2x+7
b) $x-9x^2$
c) x^4-3x^2+1