(Q1) (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln x} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$ e $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é limitado,

logo, pelo Teorema do anulamento,

$\lim_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{x}{\ln x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}_{\text{limitado}} = 0$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{e^{x^2-x}} + \dfrac{3x}{x+8}\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2-x}} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{(2x-1)e^{x^2-x}} = 0$ //

(Q2) $f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x} & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{-4}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4\sqrt{x} = 4$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{-4}{\sqrt{x}} = -4$ } $\neq$

logo $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$, portanto f não é contínua em $x = 1$.

Sabemos que se f fosse diferenciável em $x = 1$, por um Teorema, f seria contínua em $x = 1$, logo f não é diferenciável em $x = 1$.

(Q3) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12} + \sqrt{g(x)}\right)$

$f'(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12} + \sqrt{g(x)}\right) \cdot \left(0 + \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)\right)$

$f'(1) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12} + \sqrt{g(1)}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{g(1)}} \cdot g'(1)\right)$

$f'(1) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12} + \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{9}}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4\pi^2/9}} \cdot 3\pi\sqrt{2}$

$f'(1) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3}\right) \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 2\pi/3} \cdot 3\pi\sqrt{2}$

$\dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{9}{4}\sqrt{2} = -\dfrac{9}{4}$ //

(Q4) $x^3y^2 - xy + 4x = 10.$

derivando implicitamente,

$3x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot 2y \cdot y' - y - xy' + 4 = 0 \quad (*)$

quando $x = 1$, $y > 0$,

$1\,y^2 - y + 4 = 10$

$y^2 - y - 6 = 0$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 3.$

Substituindo em $(*)$:

$3 \cdot 1 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot y' - 3 - 1 \cdot y' + 4 = 0$

$28 + 5y' = 0 \quad \boxed{y' = -\frac{28}{5}}$

Eq. da reta tangente:

$y - 3 = -\frac{28}{5}(x - 1)$

$5y - 15 = 28x + 28$

$5y = 28x + 43$

$\boxed{y = \frac{28}{5}x + \frac{43}{5}}$

(Q5) $f'(x) = \frac{4}{1+x^2} + \frac{2}{x} - \frac{3\pi}{x^2}$

$f(x) = \int \left(\frac{4}{1+x^2} + \frac{2}{x} - 3\pi x^{-2} \right) dx$

$f(x) = 4 \arctan(x) + 2 \ln|x| - \frac{3\pi x^{-1}}{-1} + C$

$f(1) = 10\pi \Rightarrow$

$4 \underbrace{\arctan 1}_{= \pi/4} + 2 \ln|1| + \frac{3\pi}{1} + C = 10\pi$

$\pi + 3\pi + C = 10\pi \Rightarrow \boxed{C = 6\pi}$

$f(x) = 4 \arctan x + 2 \ln|x| + \frac{3\pi}{x} + 6\pi$

(Q6) $f(x) = \dfrac{6x}{x^3+2}$

(a) dom f: $x^3+2 \neq 0 \iff x^3 \neq -2 \iff x \neq -\sqrt[3]{2}$

Logo dom $f = (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, \infty)$

f é contínua em seu domínio pois é quociente de contínuas.

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{(x^3+2)(1) - x \cdot 3x^2}{(x^3+2)^2} =$$

$$= \frac{6\,(x^3+2 - 3x^3)}{(x^3+2)^2} = \frac{6\,(2-2x^3)}{(x^3+2)^2}$$

$$= \frac{12\,(1-x^3)}{(x^3+2)^2}$$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x}{x^3+2} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{3x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x}{x^3+2} = \dfrac{-\infty}{-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{3x^2} = 0$

Logo AH: $\boxed{y = 0}$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt[3]{2}^-} \dfrac{6x \to -6\sqrt[3]{2}}{x^3+2 \to 0^-} = \infty \implies$ AV: $x = -\sqrt[3]{2}$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt[3]{2}^+} \dfrac{6x \to -6\sqrt[3]{2}}{x^3+2 \to 0^+} = -\infty$

		$-\sqrt[3]{2}$		1	
$12(1-x^3)$	+	+	+	0	−
$(x^3+2)^2$	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	∄	+		−
crescimento de f	↗		↗		↘

crescente em $(-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (-\sqrt[3]{2}, 1)$

decrescente em $(1, \infty)$

(Q6) continuação

Não tem ponto de mín relativo

f tem máx relativo em $x = 1$.

$$f'(x) = 12 \cdot \frac{(1-x^3)}{(x^3+2)^2}$$

$$f''(x) = 12 \cdot \frac{(x^3+2)^2(-3x^2) - (1-x^3) \cdot 2(x^3+2) \cdot 3x^2}{(x^3+2)^4}$$

$$= 12 \times \frac{(-3x^2)\cancel{(x^3+2)}\left[x^3+2+2-2x^3\right]}{(x^3+2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-36x^2(4-x^3)}{(x^3+2)^3} = \frac{36x^2(x^3-4)}{(x^3+2)^3}$$

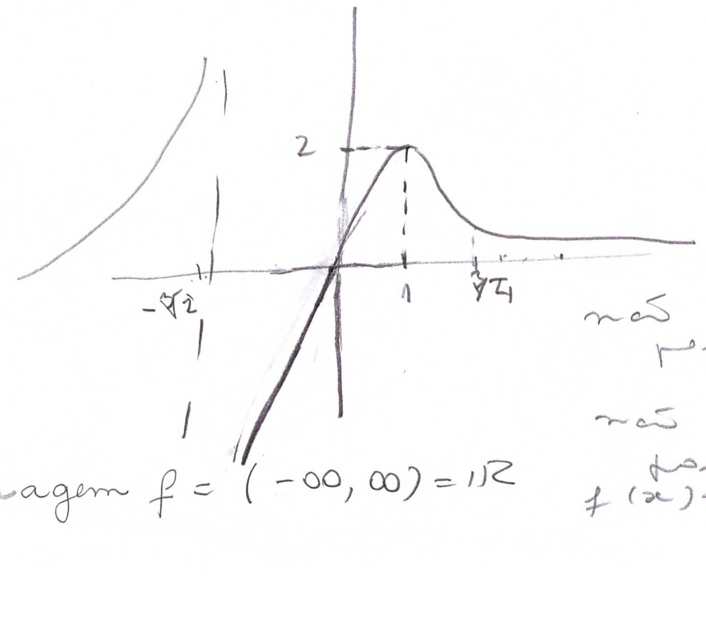
		$-\sqrt[3]{2}$		0		$\sqrt[3]{4}$	
$36x^2$	+	+	+	0	+	+	+
x^3-4	−	−	−	−	−	0	+
$(x^3+2)^3$	−	0	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	∄	−	0	−	0	+
concavidade	∪		∩		∩		∩

côncava p/ cima: $(-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{4}, \infty)$

" " baixo $(-\sqrt[3]{2}, 0) \cup (0, \sqrt[3]{4})$

$f(1) = \frac{6}{3} = 2$

$f(0) = 0$



não tem máx absoluto pois $f(x) \to \infty$ em $x \to -\sqrt[3]{2}^-$

não tem mín absoluto pois $f(x) \to -\infty$, $x \to -\sqrt[3]{2}^+$

imagem $f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$