(1) $f(x) = x + x^{5/3}$, $x \in \mathbb{R}$

(a) $f'(x) = 1 + \frac{5}{3} x^{2/3} = 1 + \frac{5}{3} (x^{\frac{1}{3}})^2$

como $(x^{1/3})^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + \frac{5}{3} x^{2/3} \geq 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, f é diferenciável e $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, pelo Teorema da Função Inversa, f admite inversa.

(b) $f(8) = 8 + (8)^{5/3} = 8 + (8^{\frac{1}{3}})^5 = 8 + 2^5 = 8 + 32 = 40$.

$f^{-1}(f(8)) = 8$ pois f e f^{-1} são inversas.

(c) Eq. da reta tangente ao gráfico é:

$$y - f^{-1}(f(8)) = (f^{-1})'(f(8))\,(x - f(8))$$

$$(f^{-1})'(f(8)) = \frac{1}{f'(8)} \quad \text{e} \quad f'(8) = 1 + \frac{5}{3} \times 8^{2/3} =$$

$$= 1 + \frac{5}{3} \times 4 = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

$$(f^{-1})'(f(8)) = \frac{1}{\frac{23}{3}} = \frac{3}{23}$$

Reta tangente: $\boxed{y - 8 = \frac{3}{23}(x - 40)}$

$23 \times 8 = 184$

simplificando $23y - 184 = 3x - 40$

$$\boxed{23y - 3x = 144}$$

(2) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 , & x \leq -1 \\ x^2 + |x| , & -1 < x < 1 \\ 4x - 2 , & x \geq 1 \end{cases}$

Para $x \leq -1$

$x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^3 - 1 = -1 - 1 = -2$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 + |x| = 1 + 1 = 2$

Logo, como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, f não é contínua em $x = -1 \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ não é diferenciável em } x = -1}$

Para $x < -1$, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f$ é dif $\forall x < -1$

Para $-1 < x < 1$; $f'(x) = 2x + \frac{x}{|x|}$ $\forall x \neq 0$,

em $x = 0$;

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + |x| - 0}{x}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0} x - 1 = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0} x + 1 = 1$$

$\Big\} \neq \Rightarrow \nexists f'(0)$.

Para $x > 1$, $f(x) = 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 4$

Logo f é diferenciável $\forall x > 1$.

Para $x = 1$. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + |x| = 1 + 1 = 2$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 4x - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f(1) = 4 - 2 = 2$$

Logo f é contínua em $x = 1$, nada se pode afirmar sobre a diferenciabilidade,

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + |x| - 2}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{4x - 2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{4(x-1)}{x - 1} = 4$$

Logo, como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, $\boxed{f \text{ não é diferenciável em } x = 1}$

---

(3) (a) Se $y = \dfrac{6 - 2x}{\sqrt{(2 + 5x)^3}} = \dfrac{6 - 2x}{(2 + 5x)^{3/2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2 + 5x)^{3/2}(-2) - (6 - 2x) \times \frac{3}{2} \times (2 + 5x)^{\frac{1}{2}}(5)}{(2 + 5x)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-4(2+5x)(2+5x)^{1/2} - 15(6 - 2x)(2 + 5x)^{\frac{1}{2}}}{2}}{(2 + 5x)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+5x)^{1/2}\left[-8 + 20x - 90 + 30x\right]}{2(2 + 5x)^3} = \frac{10x - 98}{2(2 + 5x)^{5/2}}$$

$$= \frac{5x - 49}{(2 + 5x)^{5/2}}$$

$3 - \frac{1}{2}$

3) (b) $f(x) = x \cdot F(\operatorname{sen} 2x)$

$$\begin{cases} F(1) = 3 \\ F'(1) = 5 \\ x = \frac{\pi}{4},\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = x \times F'(\operatorname{sen} 2x) \times \cos(2x) \times 2 + 1 \times F(\operatorname{sen} 2x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \times F'(1) \times 0 \times 2 + F(1)$$

$$\boxed{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3}$$

---

4) $\ln(x + 2y) = e^{xy} - 1$

o gráfico corta o eixo x quando $\boxed{y = 0}$,

logo $\ln(x + 0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

coef. angular é $\frac{dy}{dx}$ para $x = 1$ e $y = 0$.

derivando a equação implicitamente,

$$\frac{1}{x + 2y}\left(1 + 2\frac{dy}{dx}\right) = e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right).$$

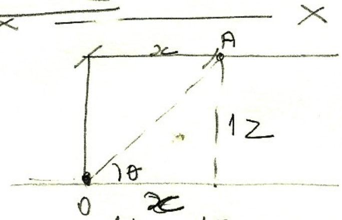
em $x = 1$ e $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{1}\left(1 + 2\frac{dy}{dx}\right) = e^0 \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$

$$2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -1}$$

---

5) x — distância percorrida pelo avião, após passar sobre o observador.

$\frac{dx}{dt}$ = velocidade do avião



Como θ diminui quando t aumenta, $\frac{d\theta}{dt} < 0$ e $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{8}$ rad/min quando $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad

$$\frac{12}{x} = \tan\theta \Rightarrow \frac{x}{12} = \cot\theta \Rightarrow \boxed{x = 12\cot\theta}$$

$$\frac{dx}{dt} = 12 \times (-\csc^2\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} =$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cancel{12}^{\,4} \times \left(-\frac{4}{\cancel{3}}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{8}_{\,2}}\right) = 2$$

$$\begin{cases} \csc^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3}} \\ = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

velocidade do avião $= 2$ km/min $= 120$ km/h