Q1) $f(x) = x \ln x$

$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1$

$\iff x > e^{-1} \iff x > \frac{1}{e}$

$f'(x) > 0$ para $x > \frac{1}{e} \Rightarrow f$ é crescente para $x > \frac{1}{e}$

$f'(x) \neq 0$ para $x > \frac{1}{e} \Rightarrow f$ é inversível para $x > \frac{1}{e}$

$$(f^{-1})'(f(2e)) = \frac{1}{f'(2e)} = \frac{1}{1+\ln(2e)} = \frac{1}{1+\ln 2 + \underbrace{\ln e}_{=1}} = \frac{1}{2+\ln 2} \;//$$

(Q2) (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\pi - 2\cdot\frac{\pi}{2}}{\operatorname{senh}(0)} = \frac{0}{0}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2\,\frac{1}{1+x^2}}{\left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{2x^2}{1+x^2} = \frac{1}{\cosh(0)}\cdot 2 = 2 \;//$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\overbrace{\frac{1}{x^2-1}\cdot\ln(2-x)}^{=f(x)}}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x^2-1} = \frac{\ln(1)}{1-1} = \frac{0}{0}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{2x} = \frac{-\frac{1}{1}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \;//$$

(Q3) $f''(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}$ $\qquad f'(-1) = 3.$

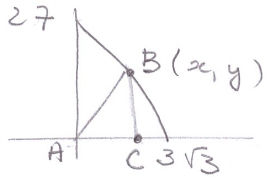
$\int f''(t)\,dt = \int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}\right)dt = \int\left(t^{-2} - \frac{2}{t}\right)dt$

$f'(t) = \frac{t^{-1}}{-1} - 2\ln|t| + C$

$f'(-1) = \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1} - 2\underbrace{\ln|-1|}_{=0} + C = 3 \Rightarrow \boxed{C = 2}$

$$\boxed{f'(t) = -\frac{1}{t} - 2\ln|t| + 2}$$

(Q4) $A = (0,0)$
$B = (x, y) = (x, 27 - x^2)$
$C = (x, 0)$.



área $= \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{1}{2} x (27 - x^2)$

$0 \leq x \leq 3\sqrt{3}$.

$f(x) = \frac{1}{2} x (27 - x^2) = \frac{1}{2}(27x - x^3)$

$f'(x) = \frac{1}{2} (27 - 3x^2) = \frac{3}{2} (9 - x^2)$

$y = 0$
$27 - x^2 = 0$
$x^2 = 27,\ x \geq 0$
$x = 3\sqrt{3}$

	0		3	
$f'(x) = \frac{3}{2}(9 - x^2)$		$+$	0	$-$
crescimento de f		$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow x = 3$ é um ponto de máx relativo

Como $x = 3$ é o único ponto crítico no intervalo $[0, 3\sqrt{3}]$, $x = 3$ também é um ponto de máximo absoluto no intervalo $[0, 3\sqrt{3}]$.

Dimensões: base $\overline{AC} = 3$
altura $\overline{BC} = 27 - 9 = 18$. } catetos.

(Q5) $f(x) = 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^4}$

domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
contínua em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

AV: $\lim_{x \to 0^+} 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^4} = 2 + \infty - \infty$, indeterminado

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^4 + 2x^2 - 9}{x^4} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x^4 + 2x^2 - 9}{x^4} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-9}{0^+} = -\infty$

$\Rightarrow x = 0$ é AV.

AH: $\lim_{x \to \infty} 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^4} = 2 + 0 - 0 = 2$

$\lim_{x \to -\infty} 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^4} = 2 + 0 - 0 = 2$

$\Rightarrow y = 2$ é AH.

Crescimento de f : $f(x) = 2 + 2x^{-2} - 9x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-3} + 36x^{-5} = \frac{-4}{x^3} + \frac{36}{x^5} = \frac{-4x^2+36}{x^5}$$

$$= 4\left(\frac{-1}{x^3} + \frac{9}{x^5}\right) = 4\left(-x^{-3} + 9x^{-5}\right)$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
$36-4x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^5	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
crescimento	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$x = -3$ é ponto de máx relativo

$x = 3$ é " " máx relativo

não tem ponto de mín relativo

Concavidade do gráfico :

$$f''(x) = 4\left(3x^{-4} - 45x^{-6}\right)$$

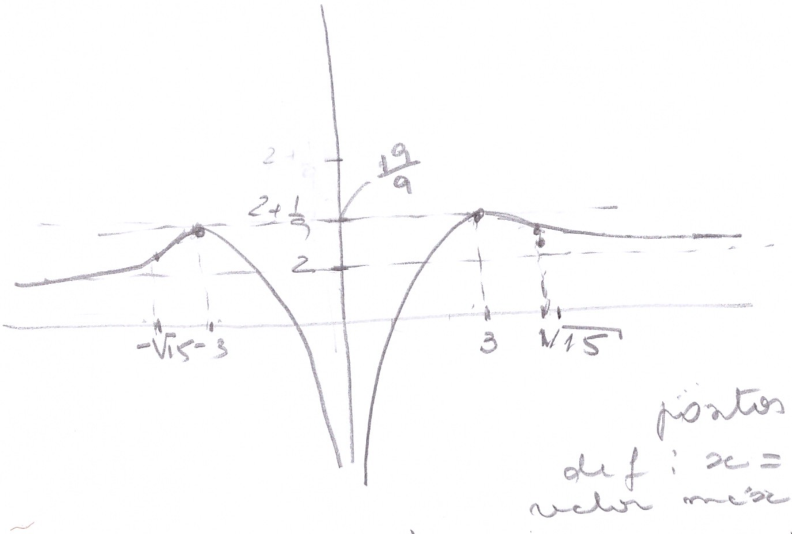
$$= 12\left(\frac{1}{x^4} - \frac{15}{x^6}\right) = 12\left(\frac{x^2-15}{x^6}\right)$$

	$(-\infty,-\sqrt{15})$	$-\sqrt{15}$	$(-\sqrt{15},0)$	0	$(0,\sqrt{15})$	$\sqrt{15}$	$(\sqrt{15},\infty)$
$12(x^2-15)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^6	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
concavidade	$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$

$$f(3) = 2 + \frac{2}{9} - \frac{9}{3^4}$$

$$= 2 + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} =$$

$$= 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}$$



pontos de máx absoluto de f : $x = -3$ e $x = 3$

valor máx absoluto : $\frac{19}{9}$

não tem mín absoluto pois $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Imagem $= \left(-\infty, \frac{19}{9}\right]$