Sumário

Parte III
Números reais - módulo e raízes

3.1 Módulo ou valor absoluto

3.1.1 Definição e exemplos

Definição (módulo ou valor absoluto)

Dado um número $a \in \mathbb{R}$, o módulo de a é indicado por $|a|$ e definido por:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

Observe que: $\quad a = 0 \Longrightarrow |a| = a \Longrightarrow |0| = 0.$

Logo, a definição de módulo poderia ser assim: $\quad |a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a > 0 \\ 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$

Observe também que: $\quad a = 0 \Longrightarrow -a = -0 \Longrightarrow |0| = -0 = 0.$

Logo a definição de módulo também poderia ser assim: $\quad |a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a > 0 \\ -a & \text{se} \quad a \leq 0 \end{cases}$

Lembre que dado um número a, pela tricotomia da ordem, apenas uma das três possibilidades da definição de módulo é verdadeira, isto é, apesar de que na definição não aparece o conectivo $''ou''$, subentende-se que entre as três linhas há o conectivo $''ou''$(exclusivo).

Exemplos:

$a = 8 > 0 \Longrightarrow |8| = 8$
$a = -3 < 0 \Longrightarrow |-3| = -(-3) = 3$
$a = \pi > 0 \Longrightarrow |\pi| = \pi$
$a = -2\pi < 0 \Longrightarrow |-2\pi| = -(-2\pi) = 2\pi$
$a = \pi - 3 > 0 \Longrightarrow |\pi - 3| = \pi - 3$
$a = 3-\pi < 0 \Longrightarrow |3-\pi| = -(3-\pi) = -3+\pi = \pi-3$

3.1.2 Exemplos de resolução de equações e inequações com módulo, usando a definição de módulo

.

1. $|3x| = 15$

   Resolução:

   $|3x| := \begin{cases} 3x & \text{se} \quad 3x \geq 0 \\ -3x & \text{se} \quad 3x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow |3x| := \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -3x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

   Logo temos que encontrar: $(x \geq 0 \;\text{ e }\; 3x = 15)$ ou $(x < 0 \;\text{ e }\; -3x = 15)$

   - para $x \geq 0$, vamos ter que resolver $3x = 15 \Longleftrightarrow x = 5$. Como $5 > 0$, concluímos que $x = 5$ de fato é uma solução.

   ou

   - para $x < 0$, temos ter que resolver $-3x = 15 \Longleftrightarrow x = -5$. Como $-5 < 0$, concluímos que $x = -5$ de fato é uma solução.

   Logo a solução $\quad S = \{-5\} \cup \{5\} = \{-5, 5\}$

2. $|3x| > 15$

   Resolução: $\quad |3x| := \begin{cases} 3x & \text{se} \quad 3x \geq 0 \\ -3x & \text{se} \quad 3x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow |3x| := \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -3x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

   Logo temos que encontrar: $(x \geq 0 \;\text{ e }\; 3x > 15)$ ou $(x < 0 \;\text{ e }\; -3x > 15)$

   - para $x \geq 0$ temos que resolver $3x > 15 \Longleftrightarrow x > 5$. Mas $x > 5$ e $x \geq 0 \Longrightarrow x > 5$.

   logo, uma parte da solução é $S_1 = (5, \infty)$

   ou

- para $x < 0$ temos que resolver $-3x > 15 \iff -x > 5 \iff x < -5$. Mas $x < -5$ e $x < 0 \Longrightarrow x < -5$.
logo, uma parte da solução é $S_2 = (-\infty, -5)$.
Logo a solução $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$.

3. $|x - 3| = 15$

Resolução: $|x-3| := \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se} \quad x-3 < 0 \end{cases} \iff |x-3| := \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$

Logo temos que encontrar: $(x \geq 3$ e $x - 3 = 15)$ ou $(x < 3$ e $-x + 3 = 15)$

- para $x \geq 3$ temos que resolver $x - 3 = 15 \iff x = 18$. Como $18 > 3$, concluímos que $x = 18$ de fato é uma solução.

ou

- para $x < 3$ temos que resolver $-x + 3 = 15 \iff -x = 12 \iff x = -12$. Como $-12 < 3$, concluímos que $x = -12$ de fato é uma solução.

Logo a solução $S = \{-12\} \cup \{18\} = \{-12, 18\}$

4. $|x - 3| > 15$

Resolução: $|x-3| := \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se} \quad x-3 < 0 \end{cases} \iff |x-3| := \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$

Logo temos que encontrar: $(x \geq 3$ e $x - 3 > 15)$ ou $(x < 3$ e $-x + 3 > 15)$

- para $x \geq 3$ temos que resolver $x - 3 > 15 \iff x > 18$.

Sabemos que $x \geq 3$ e $x > 18 \Longrightarrow x > 18$, assim uma parte da solução é $S_1 = (18, \infty)$.

ou

- para $x < 3$ temos que resolver $-x + 3 > 15 \iff -x > 12 \iff x < -12$.

Sabemos que $x < 3$ e $x < -12 \Longrightarrow x < -12$, assim uma parte da solução é $S_2 = (-\infty - 12)$.

Conclusão: a solução é $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty. - 12) \cup (18, \infty)$.

3.1.3 Módulo: interpretação geométrica na reta numérica

A interpretação geométrica de $|\mathbf{a}|$:

Na descrição da reta numérica, observamos que:
- o ponto O que representa o número 0 é denominado origem da reta numérica, além disso, identificamos origem O com o número 0, assim como identificamos o ponto a com o número a;
- se o número $a > 0$ então o ponto a se situa à direita da origem O e dista $a - 0 = a$ unidades de O.
- se o número $a < 0$ então o ponto a se situa à esquerda da origem O e dista $0 - a = -a$ unidades de O.
- se o número $a = 0$ então o ponto a coincide com a origem O e dista $0 - 0 = 0$ unidades de O.

Comparando a distância do ponto ou número a até a origem O com a definição de módulo de a,
- se $a > 0$ então a distância de a até a origem O é igual a $a - 0 = a$ e também $|a| = a$;
- se $a < 0$ então a distância de a até a origem O é igual a $0 - a = -a$ e também $|a| = -a$;
- se $a = 0$ então a distância de a até a origem O é igual a $a - 0 = 0 - 0 = 0$ e também $|a| = |0| = 0$.

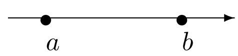
Assim, verificamos que em qualquer um dos casos, $|\mathbf{a}|$ **representa a distância do número ou ponto a até a origem O**.

A interpretação geométrica de $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$:

Observe que:

(i) Se $b > a$ então o ponto b está à direita de a e o ponto b dista $b - a$ unidades de a.

Além disso, $b > a \Longrightarrow b - a > 0 \Longrightarrow |b - a| = b - a$.

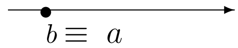


(ii) Se $b < a$ então o ponto b está à esquerda de a e o ponto b dista $a - b$ unidades de a.

Além disso, $b < a \Longrightarrow b - a < 0 \Longrightarrow |b - a| = -(b - a) = a - b$.

(iii) Se $b = a$ então o ponto b coincide com o ponto a e o ponto b dista $b - a = a - a = 0$ unidades de a.

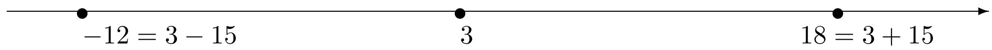
Além disso, $b = a \Longrightarrow b - a = 0 \Longrightarrow |b - a| = |0| = 0$.



Acabamos de verificar que em qualquer caso, $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ **representa a distância do ponto b ao ponto a. ou seja, a dintância entre a e b**.

Exemplos:

1. Resolver a equação $|x - 3| = 15$ significa encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $a = 3$ é exatamente igual a 15 unidades.

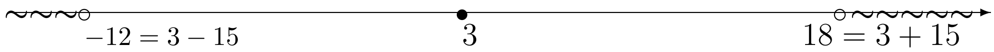
   

   É fácil concluir que o ponto que está à direita de 3 e dista 15 unidades de 3 é o ponto $x = 18$, pois 3+15=18.

   É fácil concluir que o ponto que está à esquerda de 3 e dista 15 unidades de 3 é o ponto $x = -12$, pois 3-15=-12.

   Logo a solução dessa equação é $S = \{-12, 15\}$

2. Resolver a inequação $|x - 3| > 15$ significa encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $a = 3$ é maior do que 15 unidades.

   É preciso encontrar os pontos x que estão à direita de 3 e distam mais do que 15 unidades de 3. São os pontos x tais que $x > 3 + 15 \Longrightarrow x > 18$.

   É preciso encontrar os pontos x que estão à esquerda de 3 e distam mais do que 15 unidades de 3. São os pontos x tais que $x < 3 - 15 \Longrightarrow x < -12$.

   Logo a solução dessa equação é $S = \{x; x < -12 \text{ ou } x > 18\} = (-\infty, -12) \cup (18, \infty)$,

3.1.4 Propriedades de módulo

Resolver uma equação ou uma inequação onde não aparece o módulo em nenhuma das expressões da equação, em geral, é mais fácil do que resolver uma equação ou uma inequação onde aparece o módulo. Por esse motivo, para resolver equações e inequações que envolvem módulos, muitas vezes primeiro aplica-se a definição ou as propriedades de módulo com objetivo de simplificá-las até encontrar outras equações ou inequações onde não aparecem o módulo. Abaixo estão listadas algumas das principais propriedades de módulo.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

(i) $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$
e ainda $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$.

(ii) $|a| = |-a|, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

(iii) $|a| = |b| \Longleftrightarrow a = b$ ou $a = -b \Longleftrightarrow a = \pm b$

(iv) Quando $b \geq 0$, vale a equivalência:
$|a| = b, \Longleftrightarrow a = b$ ou $a = -b \Longleftrightarrow a = \pm b$.
Quando $b < 0$ $\nexists\, a;\ |a| = b$.

(v) $|ab| = |a|\ |b|$

(vi) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

(vii) $|a| < b \Longleftrightarrow -b < a < b$

(viii) $|a| > b \Longleftrightarrow a > b$ ou $a < -b$

(ix) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular)

(x) $|a^n| = |a|^n, \quad n \in \mathbb{N}$
Além disso, $|a|^n = a^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall n$ par.

Demonstrações de algumas das propriedades (Essas demonstrações aparecem nesse texto apenas para quem tiver curiosidade de vê-las. Se quiser, pule essa parte e vá direto aos exemplos, o importante é saber aplicar as propriedades):

(i) Queremos provar: $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ e ainda $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$.

Dado o ponto $a \in \mathbb{R}$, pelo axioma da ordem, temos dois casos (excludentes):

- Caso 1: $a = 0 \Longleftrightarrow a$ coincide com a origem $\Longleftrightarrow$ a distância de a até a origem é nula $\Longleftrightarrow |a| = 0$.
- Caso 2: $a \neq 0 \Longleftrightarrow a$ está à direita ou à esquerda da origem $O \Longleftrightarrow$ a distância de a à O é positiva $\Longleftrightarrow |a| > 0$.

(ii) Queremos provar: $|a| = |-a|, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

$$|-a| := \begin{cases} -a & \text{se} \quad -a \geq 0 \\ -(-a) & \text{se} \quad -a < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow |-a| = \begin{cases} -a & \text{se} \quad -a > 0 \\ 0 & \text{se} \quad -a = 0 \\ -(-a) & \text{se} \quad -a < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$|-a| = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a < 0 \\ 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ a & \text{se} \quad a > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow |-a| = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a < 0 \\ a & \text{se} \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Mas a afirmação entre chaves do lado direito da última igualdade acima é a própria definição de $|a|$.
Logo $|-a| = |a|$.

(iii) Queremos provar: $|a| = |b| \Longleftrightarrow a = b$ ou $a = -b \Longleftrightarrow a = \pm b$.

Primeiro vamos verificar se a implicação é verdadeira nos 2 casos possíveis e excludentes:

- Caso 1: $|a| = |b| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ e $b = 0 \Longrightarrow a = b$.
  ou
- Caso 2: $|a| = |b| > 0$. Nesse caso sabemos que $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e podemos dividir em 4 casos:
  $a > 0$ e $b > 0$ e $|a| = |b| \Longrightarrow |a| = a$ e $|b| = b$ e $|a| = |b| \Longrightarrow a = b$.
  ou
  $a < 0$ e $b < 0$ e $|a| = |b| \Longrightarrow |a| = -a$ e $|b| = -b$ e $|a| = |b| \Longrightarrow -a = -b \Longrightarrow a = b$.
  ou
  $a > 0$ e $b < 0$ e $|a| = |b| \Longrightarrow |a| = a$ e $|b| = -b$ e $|a| = |b| \Longrightarrow a = -b$.
  ou
  $a < 0$ e $b > 0$ e $|a| = |b| \Longrightarrow |a| = -a$ e $|b| = b$ e $|a| = |b| \Longrightarrow -a = b \Longrightarrow a = -b$.
  Conclusão: $|a| = |b| \Longrightarrow a = b$ ou $a = -b$.

Para provar a recíproca, primeiro supomos $a = b$, nesse caso é claro que $|a| = |b|$.
Logo no outro caso da hipótese, temos que $b = -a$.
Nesse caso, é claro que $|b| = |-a|$, como já provamos que $|-a| = |a|$, concluímos que $|b| = |a|$.

---

iv) Queremos provar: Quando $b \geq 0$, vale a equivalência: $|a| = b, \Longleftrightarrow a = b$ ou $a = -b \Longleftrightarrow a = \pm b$.
Quando $b < 0$ $\nexists\, a;\ |a| = b$.

- Quando $b \geq 0$:
  $|a| = b \overset{b\geq 0}{\Longleftrightarrow} |a| = b$ e $|b| = b \overset{b\geq 0}{\Longleftrightarrow} |a| = |b| \overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} a = b$ ou $a = -b \Longleftrightarrow a = \pm b$
- Quando $b < 0$:
  Por (i) sabemos que $\forall a, \quad |a| \geq 0 \overset{b<0}{\Longrightarrow} \forall a, \quad b < 0 \leq |a| \Longrightarrow \forall a, \quad b < |a| \Longrightarrow \nexists a; b = |a|$.

---

v) Queremos provar: $|ab| = |a|\ |b|$

Separando em todos os casos possíveis:

- Caso 1: $a \geq 0$ e $b \geq 0 \Longrightarrow ab \geq 0 \Longrightarrow |ab| = ab$ (*)
  $a \geq 0$ e $b \geq 0 \Longrightarrow |a| = a, \quad |b| = b \Longrightarrow |a|\ |b| = ab$ (**)
  Por (*) e (**) verificamos nesse caso que $|ab| = |a|\ |b|$.

- Caso 2: $a < 0$ e $b < 0 \Longrightarrow ab \geq 0 \Longrightarrow |ab| = ab$ (*)

  $a < 0$ e $b < 0 \Longrightarrow |a| = -a, \quad |b| = -b \Longrightarrow |a|\ |b| = (-a)(-b) = ab$ (**)

  Por (*) e (**) verificamos nesse caso que $|ab| = |a|\ |b|$.

- Caso 3: $a \geq 0$ e $b < 0 \Longrightarrow ab \leq 0 \Longrightarrow |ab| = -(ab)$ (*)

  $a \geq 0$ e $b < 0 \Longrightarrow |a| = a, \quad |b| = -b \Longrightarrow |a|\ |b| = a(-b) = -ab$ (**)

  Por (*) e (**) verificamos nesse caso que $|ab| = |a|\ |b|$.

- Caso 4: $a < 0$ e $b \geq 0 \Longrightarrow ab \leq 0 \Longrightarrow |ab| = -(ab)$ (*)

  $a < 0$ e $b \geq 0 \Longrightarrow |a| = -a, \quad |b| = b \Longrightarrow |a|\ |b| = a(-b) = -ab$ (**)

  Por (*) e (**) verificamos nesse caso que $|ab| = |a|\ |b|$.

  Conclusão: $|ab| = |a|\ |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

---

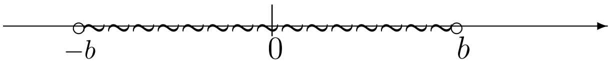
vi) Exercício: provar que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

(vii) Queremos provar: $|a| < b \Longleftrightarrow -b < a < b$

Temos 2 casos: $b > 0$ ou $b \leq 0$.

- Caso 1: Se $b > 0$ queremos provar que $|a| < b \Longleftrightarrow -b < a < b$.

  $|a| < b$ significa geometricamente: são os números reais a, cuja distância até a origem é menor do que b.

  Verifica-se essa propriedade na reta numérica: 

- Caso 2: Se $b \leq 0$, temos que:

  $b \leq 0 \Longrightarrow b \leq 0 \leq |a|$. Logo $|a| < b$ é falsa para $\forall a$.

  $b \leq 0 \Longrightarrow -b \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq -b < a < b \leq 0 \Longrightarrow 0 < a < 0$. Logo $-b < a < b$ é falsa para $\forall a$.

  Usando a lógica, considere as afirmações: $p: \ |a| < b$ e $q: \ -b < a < b$.

  Em nosso caso, como a afirmação p é falsa para $\forall a$, sabemos que a afirmação $\sim p$ é verdadeira para $\forall a$.

  Em nosso caso, como a afirmação q é falsa para $\forall a$, sabemos que a afirmação $\sim q$ é verdadeira para $\forall a$.

  Logo para $\forall a$, temos que $(\sim p \Longrightarrow \sim q)$ e $(\sim q \Longrightarrow \sim p)$, ou seja, $\forall a$, temos que $(\sim p \Longleftrightarrow \sim q)$

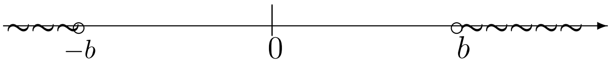
  Da lógica, sabemos que quando $(\sim p \Longleftrightarrow \sim q)$ é verdadeira temos que $(p \Longleftrightarrow q)$ também é verdadeira.

(viii) Queremos provar: $|a| > b \Longleftrightarrow a > b$ ou $a < -b$

Temos 3 casos: $b > 0$ ou $b = 0$ ou $b < 0$.

- Caso 1: Se $b > 0$ queremos provar $|a| > b \Longleftrightarrow a > b$ ou $a < -b$.

  $|a| > b$ significa geometricamente: são os números reais a, cuja distância até a origem é maior do que b.

  Verifica-se essa propriedade na reta numérica: 

- Caso 2: Se $b = 0$ então $|b| = -b = 0$.

  Queremos provar que $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $a = 0$, que é verdadeiro pela propriedade (i).

- Caso 3: Se $b < 0$.

  A recíproca será verdadeira pois sabemos que $|a| \geq 0 \ \forall a \Longrightarrow |a| \geq 0 > b \ \forall a$.

  Isso significa que sendo $a > b$ ou sendo $a < -b$, é verdadeiro que $|a| > b$.

  Para provar a implicação vamos analisar para $a \geq 0$ e para $a < 0$.

  $a \geq 0, |a| > b \Longrightarrow |a| = a > b \Longrightarrow a > b$ ou $a < -b$.

  $a < 0, |a| > b \Longrightarrow |a| = -a > b \Longrightarrow a < -b \Longrightarrow a > b$ ou $a < -b$.

---

ix) Queremos provar que $|a+b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

- Primeiro vamos verificar que $|a+b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0 \iff (a \geq 0 \text{ e } b \geq 0)$ ou (a ≤ 0 e b ≤ 0).
Verificando,

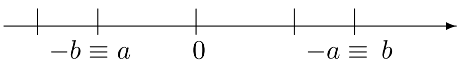
$$\begin{array}{lcll} |a+b| & = & |a|+|b| & \text{(ambos positivos, elevando ao quadrado, vale a equivalência)} \\ (|a+b|)^2 & = & (|a|+|b|)^2 & \big(\text{provando e usando, } |x|^2 = |x|\,|x| = |x\,x| = |x^2| = x^2\big) \\ (a+b)^2 & = & |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 & \iff \\ a^2+2ab+b^2 & = & a^2 + 2|ab| + b^2 & \iff ab = |ab| \iff ab \geq 0. \end{array}$$

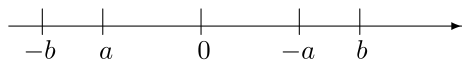
- Agora, supondo $ab < 0$, vamos provar que $|a+b| < |a| + |b|$.

Supondo que dois números possuem sinais contrários, ou seja, um é positivo e outro negativo, vamos chamar o negativo de a e o positivo de b. Vamos verificar que $a < 0 < b \Longrightarrow |a+b| < |a| + |b|$.

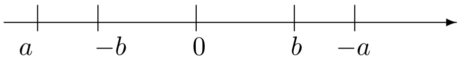
Calculando o lado direito da desigualdade: $a < 0 < b \Longrightarrow |a| = -a$ e $|b| = b \Longrightarrow |a| + |b| = -a + b$.

Agora, vamos supor os três casos possiveis e excludentes:

I) 

ou II) 

ou

III) 

I) ou II) $-b \leq a < 0 < -a \leq b \Longrightarrow -a \leq b \Longrightarrow 0 \leq a+b \Longrightarrow |a+b| = a+b$ (*)
Mas, também temos que $-b \leq a < 0 < -a \leq b \Longrightarrow a < -a \Longrightarrow a+b < -a+b = |a| + |b|$ (**)
Por (*) e (**), $|a+b| = a+b < -a+b = |a|+|b| \Longrightarrow |a+b| < |a| + |b|$

III) $a < -b < 0 < b < -a \Longrightarrow a < -b \Longrightarrow a+b < 0 \Longrightarrow |a+b| = -(a+b) = -a-b$ (*)
Mas, também temos que $a < -b < 0 < b < -a \Longrightarrow -b < b \Longrightarrow -a-b < -a+b = |a| + |b|$ (**)
Por (*) e (**), $|a+b| = -a-b < -a+b = |a|+|b| \Longrightarrow |a+b| < |a| + |b|$

---

x) Exercício: prove a propriedade $|a^n| = |a|^n, \quad n \in \mathbb{N}$. Além disso, $|a|^n = a^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall n$ par.

3.1.5 Exemplos de resolução de equações e inequações com módulo, usando propriedades

.

Resolva as equações ou inequações:

1. $|6x-9| = 12$
2. $|6x-9| = 12\,|x-1|$
3. $|6x-9| = 12\,(x-1)$
4. $|6x-9| \leq 12$
5. $|6x-9| > 12$
6. $|6x-9| < 12\,(x-1)$
7. $|6x-9| \geq 12\,(x-1)$
8. $|6x-9| < 12\,|x-1|$

Resoluções:

1. $|6x-9| = 12 \iff |3(2x-3)| = 12 \overset{(v)}{\iff} |3||2x-3| = 12 \iff 3\,|2x-3| = 12 \iff |2x-3| = 4 = |4| \overset{(iii)}{\iff}$
   I) $2x-3 = 4$ ou II) $2x-3 = -4$.
   Resolvendo cada equação,
   I) $2x-3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = 7/2$.
   II) $2x-3 = -4 \iff 2x = -1 \iff x = -1/2$
   solução $S = \{-1/2, 7/2\}$

2. $|6x-9| = 12\,|x-1| \overset{(v)}{\iff} 3\,|2x-3| = 12\,|x-1| \iff |2x-3| = 4\,|x-1| \overset{(iii)}{\iff}$
   I) $2x-3 = 4(x-1)$ ou II) $2x-3 = -4(x-1)$.
   Resolvendo cada equação,
   I) $2x-3 = 4(x-1) \iff 2x-3 = 4x-4 \iff -2x = -1 \iff x = 1/2$.

II) $2x - 3 = -4(x-1) \iff 2x - 3 = -4x + 4 \iff 6x = 7 \iff x = 7/6$

Solução $\quad S = \{1/2, 7/6\}$

3. $|6x - 9| = 12\,(x-1)$

   A equação tem solução se e só se $\quad x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$,

   ou seja, a equação não tem solução $\forall x < 1$, pois $\quad \nexists \quad x; \quad |6x-9| < 0$.

   Assim vamos supor $\quad x - 1 \geq 0$ e resolver a equação.

   $|6x-9| = 12\,(x-1), \;\; x-1 \geq 0 \iff 3|2x-3| = 12\,(x-1), \;\; x-1 \geq 0 \iff |2x-3| = 4\,(x-1), \;\; x-1 \geq 0 \overset{(iv)}{\Longrightarrow}$

   I) $2x - 3 = 4\,(x-1)$ $\quad$ ou $\quad$ II) $2x - 3 = -4\,(x-1)$

   Resolvendo cada equação,

   I) $2x - 3 = 4\,(x-1) \iff 2x - 3 = 4x - 4 \iff -2x = -1 \iff x = 1/2$

   II) $2x - 3 = -4\,(x-1) \iff 2x - 3 = -4x + 4 \iff 6x = 7 \iff x = 7/6$

   Agora precisamos testar se cada solução satisfaz a restrição, ou seja testar se $\quad x \geq 1$.

   Como $\quad x = 1/2 < 1, \quad x = 1/2 \quad$ não é solução.

   Como $\quad x = 7/6 > 1, \quad x = 7/6 \quad$ é solução.

   Logo, a solução $S = \{7/6\}$

4. Na desigualdade podemos usar as propriedades vii) e como $12 > 0$ na igualdade podemos usar a equivalência da propriedade (iv):

   $|6x-9| \leq 12 \iff -12 \leq 6x - 9 \leq 12 \iff -12 + 9 \leq 6x \leq 12 + 9 \iff -3 \leq 6x \leq 21 \iff -1/2 \leq x \leq 7/2$

   Logo a solução é o intervalo $\quad I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$

5. Podemos usar a propriedade viii):

   $|6x-9| > 12 \iff \quad$ I) $6x - 9 < -12 \quad$ ou $\quad$ II) $6x - 9 > 12$

   Resolvendo cada inequação,

   I) $6x - 9 < -12 \iff 6x < -12 + 9 \iff 6x < -3 \iff x < -1/2$

   II) $6x - 9 > 12 \iff 6x > 12 + 9 \iff 6x > 21 \iff 2x > 7 \iff x > 7/2$.

   Logo a solução S é a união de intervalos, $\quad S = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$

6. Para resolver vamos aplicar a propriedade vii).

   $|6x-9| < 12\,(x-1) \iff -12(x-1) < 6x - 9 < 12(x-1)$

   Nesse caso é preciso separar as duas inequações para ser possível resolvê-las,

   I) $-12(x-1) < 6x - 9 \quad$ e $\quad$ II) $6x - 9 < 12(x-1)$

   Resolvendo cada equação,

   I) $-12(x-1) < 6x - 9 \iff -12x + 12 < 6x - 9 \iff -18x < -21 \iff 6x > 7 \iff x > 7/6$

   e

   II) $6x - 9 < 12(x-1) \iff 6x - 9 < 12x - 12 \iff -6x < -3 \iff x > 1/2$

   A solução é a interseção das inequações $\quad x > 7/6 \quad$ e $\quad x > 1/2$ com $x > 1$.

   Logo a solução da inequação é o intervalo $\quad I = (7/6, \infty)$

7. Podemos aplicar a propriedade viii) para resolver a inequação e a equivalência da propriedade (iv), supondo $x - 1 \geq 0$. No final é preciso testar se a solução da equação encontrada no final também é solução da equação original.

   $|6x-9| \geq 12\,(x-1) \iff \quad$ I) $6x - 9 \leq -12(x-1) \quad$ ou $\quad$ II) $6x - 9 \geq 12(x-1)$

   Resolvendo cada inequação,

   I) $6x - 9 \leq -12(x-1) \iff 6x - 9 \leq -12x + 12 \iff 18x \leq 21 \iff x \leq 7/6$

   ou

   II) $6x - 9 \geq 12(x-1) \iff 6x - 9 \geq 12x - 12 \iff -6x \geq -3 \iff x \leq 1/2$

   Logo a união de I) e II) é a intervalo $x \leq 7/6$.

Testando as soluções da equação,

$x = 7/6,\ |6x-9| = |7-9| = 2$ e $12(x-1) = 12(1/6) = 2$. Logo $x = 7/6$ é solução.

$x = 1/2,\ |6x-9| = |3-9| = 6$ e $12(x-1) = 12(-1/2) = -6$. Logo $x = 1/2$ é solução.

Concluímos que a solução da inequação é o intervalo $I = (-\infty, 7/6]$.

8. $|6x-9| < 12\,|x-1|$

   Usando a propriedade vii), teríamos que resolver: $-12\,|x-1| < 6x-9 < 12\,|x-1|$.

   Para cada inequação, se aplicar novamente as propriedades vii) e viii) obteríamos duas inequações, totalizando quatro inequações a serem resolvidas.

   Nesse caso, é mais simples resolver usando a definição de módulo, isto é, abrindo as duas expressões de modo a obter três inequações para resolver. Além disso, fica mais simples ainda se usarmos uma tabela para abrir os módulos.

   $|6x-9| < 12\,|x-1| \iff 3\,|2x-3| < 12\,|x-1| \iff |2x-3| < 4\,|x-1| \iff |2x-3| - 4\,|x-1| < 0.$

   Vamos usar uma tabela para escrever sem módulo a expressão: $E(x) = |2x-3| - 4\,|x-1|$

	$x<1$	$x=1$	$1<x<\frac{3}{2}$	$x=\frac{3}{2}$	$x>\frac{3}{2}$
$A(x) = \|2x-3\|$	$-2x+3$	1	$-2x+3$	0	$2x-3$
$B(x) = 4\|x-1\|$	$-4x+4$	0	$4x-4$	2	$4x-4$
$E(x) = A(x) - B(x)$	$2x-1$	1	$-6x+7$	-2	$-2x+1$

   Analisando o sinal de cada expressão,

   Para $\boxed{x<1}$ $\quad 2x-1<0 \iff x<1/2$. Logo $x<1/2$ satisfaz a inequação.

   ou para $\boxed{x=1}$ $E(x) = 1 > 0$. Logo $x=1$ não satisfaz a inequação.

   ou para $\boxed{1<x<\frac{3}{2}}$

   $-6x+7<0 \iff -6x<-7 \iff x>\frac{7}{6}$. Logo $\frac{7}{6}<x<\frac{3}{2}$ satisfaz a inequação.

   ou para $\boxed{x=\frac{3}{2}}$ $E(x) = -2 < 0$. Logo $x=\frac{3}{2}$ satisfaz a inequação.

   ou para $\boxed{x>\frac{3}{2}}$

   $-2x+1<0 \iff -2x<-1 \iff x>\frac{1}{2}$. Logo $x>\frac{3}{2}$ satisfaz a inequação.

   A solução é $S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{6}, \infty\right]$

3.1.6 Exemplos de gráficos de funções com módulo

Esboçar os gráficos das funções. Para isso, vamos usar a definição para "abrir" o módulo e/ou usar as propriedades para simplificar e/ou usar as transformações em gráficos.

1. $y = f(x) = |x|$.

   Para $x \geq 0$, temos que $y = x$, reta bissetriz do 1o. e 3o. quadrante, mas como $x \geq 0$, é a bissetriz situada no 1o. quadrante (fig. 1).

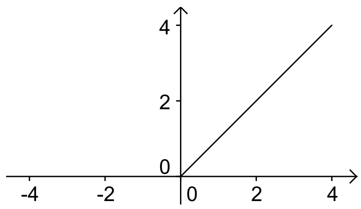


Fig. 1

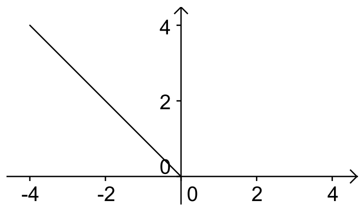


Fig. 2

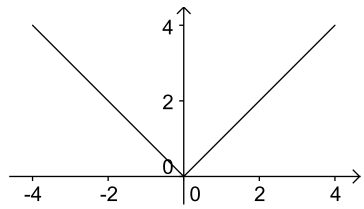
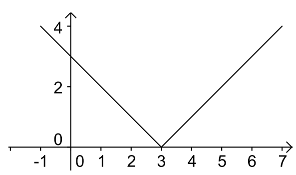


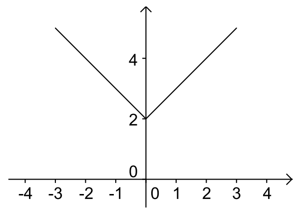
Fig. 3



2. $f(x) = |x-3|$

   O gráfico de f é uma translação horizontal do gráfico de $y = |x|$, de 3 unidades para a direita.

3. $f(x) = 2 + |x|$
   O gráfico de f é uma translação vertical do gráfico de $y = |x|$, de 2 unidades para cima.

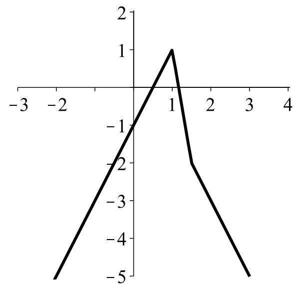


4. $f(x) = |2x - 3| - 4\,|x - 1|$

   Como não há nenhuma propriedade de igualdade relativa a soma ou subtração de módulos, nesse caso a única opção é usar a definição de módulo para abrir $|2x - 3|$ e $|x - 1|$.

   Usaremos tabela para facilitar as contas nos intervalos onde abrimos os módulos.

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3/2$	$x = 3/2$	$x > 3/2$
$\|2x - 3\|$	$-2x + 3$	1	$-2x + 3$	0	$2x - 3$
$4\|x - 1\|$	$-4x + 4$	0	$4x - 4$	2	$4x - 4$
$\|2x - 3\| - 4\|x - 1\|$	$2x - 1$	1	-6x+7	-2	$-2x + 1$



3.2 Completando o quadrado

Uma técnica de simplificação de expressões bastante útil é baseada nos seguintes produtos notáveis:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3.2.1 A técnica de completar o quadrado

Observe que:

$E(x) = 9x^2 - 42x + 49 = 9x^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 7 + 49$ é exatamente o quadrado de $(3x - 7)$
e também
$E(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4 = \frac{1}{9}x^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) 2 + 4$ é o quadrado perfeito de $\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$.

Agora, veja os exemplos:

Exemplo 1 $E(x) = 9x^2 + 12x$ não é o quadrado perfeito de uma expressão do tipo $ax + b$.

Qual é o número k que devemos somar a $E(x) = 9x^2 + 12x$ de forma que uma nova expressão $F(x) = E(x) + k$ seja o quadrado perfeito de uma expressão do tipo $ax + b$?

Para descobrir quais são os valores de a e b, vamos reescrever a expressão $E(x)$:

$E(x) = 9x^2 + 12x^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2$.

Como $9x^2 = (3x)^2$ e $12x^2 = 2 \cdot (3x) \cdot 2$, concluímos que $a = 3$ e $b = 2$.

O número que devemos somar é $k = b^2 = 2^2 = 4$

e a nova expressão é $F(x) = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 4 = (3x + 2)^2$.

Observe que se somamos $k = 4$ e subtraímos $k = 4$, na expresssão $E(x)$, ela não se altera,

$E(x) = 9x^2 + 12x = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 4 - 4 = (3x + 2)^2 - 4$

Exemplo 2 Considere a expressão $E(x) = x^2 + 7x + 5$.

Qual é o número k que devemos somar a $x^2 + 7x$ tal que $x^2 + 7x + k$ seja o quadrado perfeito de uma expressão do tipo $ax + b$?

$x^2 + 7x = x^2 + 2 \cdot (x) \cdot \left(\frac{7}{2}\right)$, assim, $k = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$.

Logo, $x^2 + 7x + k = x^2 + 2 \cdot (x) \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + \frac{49}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2$

Observe que podemos somar e subtrair o número $\frac{49}{4}$ na primeira expressão entre parênteses abaixo, que ela não se altera.
$E(x) = x^2 + 7x + 5 = \left(x^2 + 2 \cdot (x) \cdot \left(\frac{7}{2}\right)\right) + 5 = \left(x^2 + 2 \cdot (x) \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + \frac{49}{4} - \frac{49}{4}\right) + 5 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 5 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}$.

Generalizando, encontramos o método conhecido por "completar o quadrado".
Dada uma expressão do tipo $\boxed{E(x) = ax^2 + bx + c}$ (trinômio de grau 2, $a \neq 0$)

sempre podemos reescrever na forma $\boxed{E(x) = a(x+m)^2 + n}$ realizando os seguintes procedimentos:

(i) Reescrever $E(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$

(ii) Reescrever $x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \cdot (x) \cdot \frac{b}{2a}$

somar e subtrair $\frac{b^2}{4a^2}$ para obter um quadrado perfeito menos uma constante,

$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \cdot (x) \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

(iii) Substituir a expressão encontrada em (ii) na expressão de E(x), mais à direita em (i)

$E(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Logo encontramos $m = \frac{b}{2a}$ e $n = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Atenção: o objetivo foi provar que é possível encontrar m e n em termos de a, b, c. Não é uma boa idéia memorizar essas fórmulas para completar o quadrado, é mais simples aplicar nos exemplos o mesmo procedimento descrito acima.

Exemplos

1. $4x^2 + 40\,x - 100 = 4\left(x^2 + 10\,x\right) - 100 = 4\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5\right) - 100 = 4\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 - 25\right) - 100$
   $4\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25\right) - 100 - 100 = 4\,(x+5)^2 - 100 = 4\,(x+5)^2 - 200$
2. $\frac{27}{4} - 3x - x^2 = \frac{27}{4} - \left(3x + x^2\right) = \frac{27}{4} - \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} - \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) =$
   $\frac{27}{4} - \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 9 = 9 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

3.2.2 O gráfico do trinômio de grau 2

Um trinômio de grau 2 é uma expressão do tipo: $E(x) = ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$, constantes , $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Sabemos da Geometria Analítica que a equação $y = ax^2$ representa uma parábola com vértice na origem e o eixo da parábola é coincidente com o o eixo y.
Além disso, quando $a > 0$ a concavidade da parábola é voltada para cima
e quando $a < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Podemos completar o quadrado na expressão $ax^2 + bx + c$, vamos encontrar valores para h e k de forma a reescrever a expressão, $ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$.

Assim, $y = ax^2 + bx + c \iff y = a(x-h)^2 + k \iff y - k = a(x-h)^2$

A equação $y = ax^2 + bx + c$ representa uma translação da parábola $y = ax^2$, ou seja, é uma parábola cujo vértice é $V = (h, k)$ e, além disso, a concavidade é para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

Exemplos:

1. Vamos identificar a parábola de equação $y = 4x^2 + 40\,x - 100$.

   No exemplo 1 da seção anterior já completamos o quadrado dessa expressão, logo
   $y = 4x^2 + 40\,x - 100 \iff y = 4\,(x+5)^2 - 200 \iff y + 200 = 4\,(x+5)^2 \iff y - (-200) = 4\,(x - (-5))^2$.
   Essa equação representa uma parábola de vértice $V = (-5, -200)$, com concavidade voltada para cima.

2. Vamos identificar a parábola de equação $\quad y = \frac{27}{4} - 3x - x^2$.

   No exemplo 2 da seção anterior já completamos o quadrado dessa expressão, logo

   $y = \frac{27}{4} - 3x - x^2 \iff y = 9 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \iff y - 9 = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \iff y - 9 = -\left(x - \left(\frac{3}{2}\right)\right)^2$

   Essa equação representa uma parábola de vértice $V = \left(-\frac{3}{2}, 9\right)$, com concavidade voltada para baixo.

3. Esboçar o gráfico de $\quad f(x) = 4 - |x-1|\ |x-2|$

   Simplificando, $f(x) = 4 - |(x-1)(x-2)|$ (para simplificar foi usada a propriedade $|a|\ |b| = |ab|,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$)

   $y = (x-1)(x-2)$

   é uma parábola voltada para cima, corta o eixo x em $x = 1$ e $x = 2$.

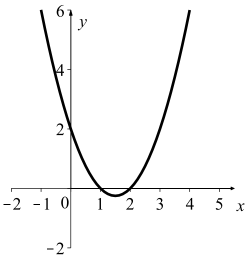


Fig. 1

   $y = |(x-1)(x-2)|$

   Abrindo o módulo,
   - mantemos a parábola sobre e acima do eixo x quando $(x-1)(x-2) \geq 0 \iff x \leq 1$ ou $x \geq 2$;
   - tomamos o simétrico da parábola em relação ao eixo x quando $(x-1)(x-2) < 0 \iff 1 < x < 2$.

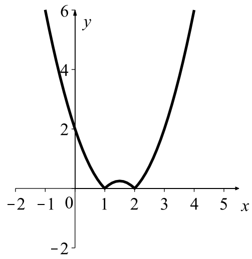


Fig. 2

   Usando transformações sobre $y = |(x-1)(x-2)|$,

   $y = -|(x-1)(x-2)|$

   Ao mutiplicar por (-1), tomamos o simétrico do gráfico da fig.2 em relação ao eixo x;

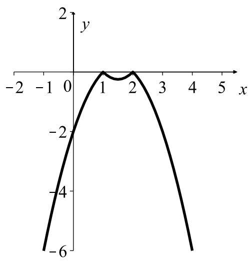


Fig. 3

   $y = 4 - |(x-1)(x-2)|$

   Ao somar 4, fazemos uma translação vertical de 4 unidades para cima, do gráfico da fig.3.

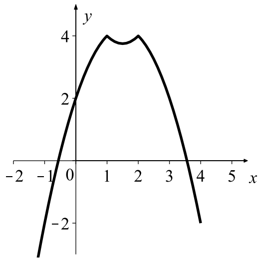


Fig. 4

4. Esboçar o gráfico de $\quad f(x) = 8|x-1| + (x-1)^2 + 16$

   Para obter o gráfico de f, primeiro observamos que $(x-1)^2 = |x-1|^2$ e que o termo $(x-1)$ pode ser substituído por x, isto é, podemos construir o gráfico de $y = 8|x| + x^2 + 16$ e no final fazemos uma translação de 1 unidade para a direita.

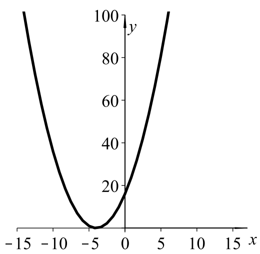
   Assim podemos construir a seguinte sequência de gráficos:

   $y = 8x + x^2 + 16 = (x+4)^2$, o gráfico é uma parábola voltada para cima, com vértice no ponto $(-4, 0)$;

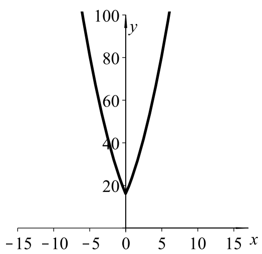
   $y = 8|x| + |x|^2 + 16$, para $x \geq 0$, o gráfico coincide com o gráfico anterior e para $x < 0$, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y;

   $y = 8|x-1| + |x-1|^2 + 16$, o gráfico é uma translação horizontal do gráfico anterior, de 1 unidade para a direita.

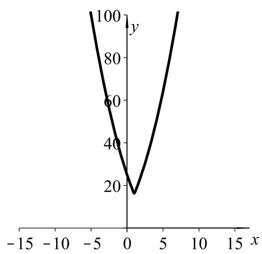
   $y = 8x + x^2 + 16 = (x+4)^2$



   $y = 8|x| + |x|^2 + 16$



   $y = 8|x-1| + |x-1|^2 + 16$



   Outra opção de construção do gráfico seria usando diretamente a definição de módulo, abrindo $|x-1|$.

3.3 Raiz quadrada e raiz cúbica

3.3.1 Raiz quadrada e raiz cúbica: definições

Definição - **Raiz quadrada ou raiz**

Dado $a \in \mathbb{R}$; $a \geq 0$, a raiz quadrada de a é o único $b \in \mathbb{R}$, indica-se $\sqrt{a} = b$, tal que $b^2 = a$ e $b \geq 0$.

Definição - **Raiz cúbica**

Dado $a \in \mathbb{R}$, a raiz cúbica de a é o único $b \in \mathbb{R}$, indica-se $\sqrt[3]{a} = b$, tal que $b^3 = a$.

Observações:

- A equação $x^2 = 9$ tem duas soluções, $x = \pm 3$, pois $x = 3 \Longrightarrow x^2 = 3^2 = 9$ e $x = -3 \Longrightarrow x^2 = (-3)^2 = 9$.
  $\sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{9} \neq -3$ pois $3^2 = 9$ e $3 > 0$, $(-3)^2 = 9$, mas $-3 < 0$.
- O número a é chamado de radicando tanto na raiz quadrada quanto na raiz cúbica.
- Na raiz quadrada o radicando é necessariamente positivo ou nulo, na raiz cúbica não há restrição.
- O processo de encontrar a raiz quadrada ou raiz cúbica se chama de radiciação.
- Considere $a = x^2$. Sabemos que $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo sempre será possível determinar $\sqrt{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  $\sqrt{x^2} = b \Longleftrightarrow b^2 = x^2$ e $b \geq 0$
  Sabemos que $b^2 = x^2 \Longleftrightarrow b = x$ ou $b = -x$, isto é, essas são as duas únicas candidatas a raízes de x^2.
  Suponha que $x \geq 0$. Nesse caso, $b = x \geq 0$ e $b^2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = x$.
  Suponha que $x < 0$. Nesse caso, $b = -x > 0$ e $b^2 = (-x)^2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = b = -x$.
  Acabamos de provar que $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

3.3.2 Raiz quadrada e raiz cúbica: propriedades

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as propriedades:

A1) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$
A2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $a \geq 0$ e $b \geq 0$
A3) $(\sqrt{a})^2 = a$ $a \geq 0$
A4) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\sqrt{-b}$ $a \leq 0$ e $b \leq 0$
A5) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a \geq 0$ e $b > 0$
A6) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ $a \leq 0$ e $b < 0$
A7) $0 \leq a = b \Longleftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$
OBS. $a = b \not\Longrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$
pois, caso $a < 0$ e $a = b \Longrightarrow \nexists \sqrt{a}$
A8) $0 \leq a < b \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
OBS. $a < b \not\Longrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
pois, caso $a < 0$ e $a < b \Longrightarrow \nexists \sqrt{a}$
A9) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\forall a, b > 0$

B1) $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$
B2) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$
B3) $(\sqrt[3]{a})^3 = a$
B4) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{-a}\sqrt[3]{-b}$
B5) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $b \neq 0$
B6) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{-a}}{\sqrt[3]{-b}}$, $b \neq 0$
B7) $a = b \Longleftrightarrow \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$
B8) $a < b \Longleftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$
B9) $\sqrt[3]{a+b} < \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, $\forall a, b > 0$

Exemplos de simplificações de expresssões:

1. Para $x \neq 1$, $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$
2. Para $x \neq 1$, $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

3. Para $x \neq 1$, $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^6}}{x-1} = \dfrac{\sqrt[3]{\left((x-1)^2\right)^3}}{x-1} = \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$

4. Para $x \neq 1$, $\dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{\left((x-1)^3\right)^2}}{x-1} = \dfrac{\left|(x-1)^3\right|}{x-1} = \dfrac{\left|(x-1)^2(x-1)\right|}{x-1} = \dfrac{\left|(x-1)^2\right|\ |x-1|}{x-1} =$
$\dfrac{(x-1)^2\ |x-1|}{x-1} = (x-1)\ |x-1|$

5. Para $x \neq 1$, $\dfrac{\sqrt{(x-1)^8}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{\left((x-1)^4\right)^2}}{x-1} = \dfrac{\left|(x-1)^4\right|}{x-1} = \dfrac{(x-1)^4}{x-1} = (x-1)^3$

6. Para $x > 1$, $\dfrac{\sqrt{(x-1)^7}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{\left((x-1)^3\right)^2(x-1)}}{x-1} = \dfrac{\left|(x-1)^3\right|\sqrt{x-1}}{x-1} = \dfrac{(x-1)^3\sqrt{x-1}}{x-1} = (x-1)^2\sqrt{x-1}$

7. Para $x < 1$, $\dfrac{\sqrt{(1-x)^7}}{1-x} = \dfrac{\sqrt{\left((1-x)^3\right)^2(1-x)}}{1-x} = \dfrac{\left|(1-x)^3\right|\sqrt{1-x}}{1-x} = \dfrac{-(1-x)^3\sqrt{1-x}}{1-x} = -(1-x)^2\sqrt{1-x}$

3.3.3 Soluções da equação de segundo grau

As soluções da equação: $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, constantes , $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

De acordo com o que foi visto anteriormente, ao completar o quadrado na expresssão ax^2+bx+c que aparece no lado esquerdo da primeira igualdade abaixo, obtemos a expressão do lado esquerdo da segunda equação (sabemos que $a \neq 0$),

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = 0 &\iff \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a} &\iff \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} & \end{aligned}$$

Para que essa equação tenha solução é preciso que $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} \geq 0$ porque sabemos que $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$.

Mas, como $4a^2 > 0$, para que essa equação tenha solução é preciso que $\Delta = b^2-4ac \geq 0$.

Quando há solução, temos dois casos a considerar: $b^2-4ac=0$ ou $b^2-4ac>0$.

- Quando $b^2-4ac=0$, resolvendo a equação, temos que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x+\frac{b}{2a} = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$$

- Quando $b^2-4ac>0$, resolvendo a equação, temos que:

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} &\iff \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} &\iff \\ x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} &\iff \\ x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a^2}} &\iff \end{aligned}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}\iff$$

Quando $a>0$, $\quad x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\iff x=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\left(\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}\iff x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Quando $a<0$, $\quad x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}\iff x=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\left(\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}\iff x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Resumindo, são três tipos de solução da equação $ax^2+bx+c=0$,

- Se $\Delta=b^2-4ac<0$ então não há solução.
- Se $\Delta=b^2-4ac=0$ então há uma solução $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Se $\Delta=b^2-4ac>0$ então há duas soluções $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

3.3.4 Fatoração do trinômio de grau 2

Afirmação 1: se x_1 e x_2 são raízes distintas da equação $ax^2+bx+c=0$ então $ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$

Vamos verificar que essa afirmação é de fato verdadeira.

Se x_1 e x_2 são raízes distintas da equação $ax^2+bx+c=0$ então $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Substituindo esses valores de x_1 e x_2 em $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$, obtemos

$$a\,(x-x_1)\,(x-x_2)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right)=a\left(x^2+2\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c \qquad \text{c.q.d.}$$

Afirmação 2: se a equação $ax^2+bx+c=0$ tem solução única $x=x_1$ então $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.

Se a solução é única, sabemos que $x_1=-\dfrac{b}{2a}$ e $b^2-4ac=0 \iff b^2=4ac$.

Logo, substituindo o valor de x_1 na expressão $a(x-x_1)^2$, obtemos:

$$a(x-x_1)^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{4ac}{4a^2}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c$$

Afirmação 3: se a equação $ax^2+bx+c=0$ não possui solução um dos dois casos é verdadeiro:

(i) se $a>0$ então $ax^2+bx+c>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$
ou
(ii) se $a<0$ então $ax^2+bx+c<0$ para todo $x\in\mathbb{R}$

Justificativa:
Ao completar o quadrado, vimos que $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right)$.

Logo $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right)$

Vamos verificar que se a equação não possui solução, o termo $\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Sabemos que o termo $A=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Se a equação não possui solução, sabemos que $b^2-4ac<0$, e que $4a^2>0$ logo o termo $B=-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$.

Mas, $A\geq 0$ e $B>0 \implies A+B>0$

Como $ax^2+bx+c=a(A+B)$, concluímos que o sinal de ax^2+bx+c só depende do sinal de a.

3.3.5 Análise de sinal do trinômio de grau 2

A análise de sinal de $E(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser dividida de acordo com os três tipos de solução da equação.

- Se a equação $E(x) = ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes distintas, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
  Considerando que as raízes são $x_1 < x_2$.
  Pela afirmação 1 da seção anterior, $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$
  Logo, para $a > 0$:

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
a	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

  Logo, para $a < 0$:

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
a	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x - x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- Se a equação $E(x) = ax^2 + bx + c = 0$ possui apenas uma solução $x_1 = \dfrac{-\,b}{2a}$, pela afirmação 2 da seção anterior, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
  Logo, para $a > 0$:

x	$x < x_1$	x_1	$x > x_1$
a	$+$	$+$	$+$
$(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$

  Logo, para $a < 0$:

x	$x < x_1$	x_1	$x > x_1$
a	$-$	$-$	$-$
$(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2$	$-$	0	$-$

- Se a equação $E(x) = ax^2 + bx + c = 0$ não possui solução, pela afirmação 3 da seção anterior, o sinal de $E(x) = ax^2 + bx + c$ só depende do sinal de a.
  Logo, para $a > 0$:

x	$x \in \mathbb{R}$
a	$+$
$ax^2 + bx + c$	$+$

  Logo, para $a < 0$:

x	$x \in \mathbb{R}$
a	$-$
$ax^2 + bx + c$	$-$

EXEMPLOS

1. Vamos encontrar o domínio da expressão $E(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x - 2}}$ e encontrar todos os valores de x em que a identidade $\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x + 2}$ é verdadeira.
   $D =$ Domínio de $E(x)$: x; $x^2 - 4 \geq 0$ e $x - 2 > 0$.
   $x^2 - 4 \geq 0 \iff x \geq 2$ ou $x \leq -2$.
   $x - 2 > 0 \iff x > 2$.
   Logo $D = (2, \infty)$.
   Usando propriedades de raiz, $\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x - 2}} = \dfrac{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}}{\sqrt{x - 2}} = \dfrac{\sqrt{x - 2}\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x + 2}.$

Mas para que a identidade seja verdadeira é preciso que todas as expressões da identidade sejam definidas.

Para isso, é preciso que $x^2 - 4 \geq 0, \quad x - 2 > 0, \quad x + 2 \geq 0.$

Fazendo as interseções das soluções das três inequações, concluímos que $x > 2$.

2. Observe que a simplificação do item (a) está correta e a do item (b) está errada.

   (a) $\dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^2}}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2\,(x^2-2)}}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2-2}}{x} = \dfrac{|x|\sqrt{x^2-2}}{x}$. Logo,

   Quando $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^2}}{x} = \dfrac{x\sqrt{x^2-2}}{x} = \sqrt{x^2-2}$

   Quando $x < 0$, $\dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^2}}{x} = \dfrac{-x\sqrt{x^2-2}}{x} = -\sqrt{x^2-2}$

   (b) $\dfrac{\sqrt{12x^8 + 4x^6}}{x^3} = \dfrac{\sqrt{4x^6\,(3x^2+1)}}{x^3} = \dfrac{\sqrt{4x^6}\sqrt{3x^2+1}}{x^3} = 2\sqrt{3x^2+1}$

   O erro nessa simplificação ocorreu quando x^6 dentro da raiz do numerador foi cancelado com x^3 do denominador. Não é possível fazer isso porque $\sqrt{x^6} = x^3$ apenas no caso em que $x \geq 0$, mas no caso em que $x < 0$, temos que $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = \left|x^3\right| = -x^3$.

3. Vamos resolver a equação $(x-3)^2 = 5$ sem elevar ao quadrado, usando propriedades de raiz.

   Como $(x-3)^2 > 0$ e $5 > 0$, pela propriedade A7), temos

   $(x-3)^2 = 5 \iff \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{5} \iff |x-3| = \sqrt{5} \iff x - 3 = \sqrt{5}$ ou $x - 3 = -\sqrt{5} \iff$

   $x = 3 + \sqrt{5}$ ou $x = 3 - \sqrt{5}$

   Resolvendo a mesma equação de outra forma, elevando ao quadrado o termo $(x-3)$, encontraremos

   $x^2 - 6x + 4 = 0$, resolvendo, $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$

   Naturalmente as soluções são as mesmas, não importa como a equação foi resolvida.

4. A partir do produto notável $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ podemos obter novas identidades, por exemplo:

   (a) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \quad a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt{y} \Longrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2.$

   Logo, como $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ e $\left(\sqrt{y}\right)^2 = y$, concluímos que $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = x - y$

   (b) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3, \quad a = \sqrt[3]{x}, \quad b = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right) =$ $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{y}\right)^3$. Concluímos que $\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right) = x - y.$

   (c) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3, \quad a = \sqrt[3]{1-2x}, \quad b = \sqrt[3]{x^2} \Longrightarrow$

   $\left(\sqrt[3]{1-2x} - \sqrt[3]{x^2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)^2 + \sqrt[3]{1-2x}\sqrt[3]{x^2} + \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2\right) = 1 - 2x - x^2$

5. Vamos resolver a inequação: $\dfrac{\sqrt{-x}}{2 + \sqrt[3]{x}} \geq \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{2 + \sqrt[3]{x}}$.

   O domínio da inequação é a interseção das soluções de: I) $-x \geq 0$; II) $x^2 - 2 \geq 0$; III) $2 + \sqrt[3]{x} \neq 0$.

   I) $-x \geq 0 \iff x \leq 0$

   II) $x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq 2 \iff \sqrt{x^2} \geq \sqrt{2} \iff |x| \geq \sqrt{2} \iff x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$

   III) $2 + \sqrt[3]{x} \neq 0 \iff \sqrt[3]{x} \neq -2 \iff \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \neq (-2)^3 \iff x \neq -8.$

   Assim, o domínio $D = (-\infty, -8) \cup (-8, -\sqrt{2}\,]$.

   Resolvendo a inequação, $\dfrac{\sqrt{-x}}{2 + \sqrt[3]{x}} \geq \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{2 + \sqrt[3]{x}} \iff \dfrac{\sqrt{-x} - \sqrt{x^2-2}}{2 + \sqrt[3]{x}} \geq 0.$

   Vamos usar tabela de sinais, para isso precisamos encontrar primeiro os valores de $x \in D$ onde a expresssão do numerador e a expressão do denominador se anulam e onde são positivas.

$\sqrt{-x} - \sqrt{x^2-2} = 0,\ x \le -\sqrt{2} \iff \sqrt{-x} = \sqrt{x^2-2},\ x \le -\sqrt{2} \iff -x = x^2-2,\ x \le -\sqrt{2} \iff x^2+x-2=0,\ x \le -\sqrt{2} \iff (x=-2 \text{ ou } x=1),\ x \le -\sqrt{2} \iff x=-2.$

$\sqrt{-x} - \sqrt{x^2-2} > 0,\ x \le -\sqrt{2} \iff \sqrt{-x} > \sqrt{x^2-2},\ x \le -\sqrt{2} \iff -x > x^2-2,\ x \le -\sqrt{2} \iff x^2+x-2<0,\ x \le -\sqrt{2} \iff -2<x<1,\ x \le -\sqrt{2} \Longrightarrow -2 < x \le -\sqrt{2}.$

$2+\sqrt[3]{x} > 0 \iff \sqrt[3]{x} > -2 \iff (\sqrt[3]{x})^3 > (-2)^3 \iff x > -8.$

Construindo a tabela de sinais (respeitado o domínio),

	$x<-8$	$x=-8$	$-8<x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-\sqrt{2}$	$x=-\sqrt{2}$
$\sqrt{-x}-\sqrt{x^2-2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2+\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{\sqrt{-x}-\sqrt{x^2-2}}{2+\sqrt[3]{x}}$	$+$	nd	$-$	0	$+$	$+$

Solução da inequação: $(-\infty,-8) \cup [-2,-\sqrt{2}]$.

3.4 Raiz índice n

Como um número $n \ge 2$ é par se e só se pode ser escrito como $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ e um número $n \ge 3$ é ímpar se e só se pode ser escrito como $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$, vamos definir e listar as propriedades substituindo o índice 2 por $2k$ e o índice 3 por $2k+1$, supondo $k \in \mathbb{N}$.

Definição de raiz de índice par. Dado $a \in \mathbb{R},\ a \ge 0$ e $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[2k]{a} = b$ se $b^{2k} = a$ e $b \ge 0$.

Definição de raiz de índice ímpar. Dado $a \in \mathbb{R}$, e $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[2k+1]{a} = b$ se $b^{2k+1} = a$.

Propriedades. Dados $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, valem as propriedades a seguir.
(as propiedades de raiz quadrada são válidas para todas as raízes com índice par)
(as propiedades de raiz cúbica são válidas para todas as raízes com índice ímpar).

A1) $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|,\quad \forall a \in \mathbb{R}$
A2) $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{a}\,\sqrt[2k]{b}\quad a \ge 0$ e $b \ge 0$
A3) $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a\quad a \ge 0$
A4) $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{-a}\,\sqrt[2k]{-b}\quad a \le 0$ e $b \le 0$
A5) $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[2k]{b}}\quad a \ge 0$ e $b > 0$
A6) $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}\quad a \le 0$ e $b < 0$
A7) $0 \le a = b \iff \sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$
OBS. $a = b \not\Longrightarrow \sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$
pois, caso $a<0$ e $a = b \Longrightarrow \nexists\ \sqrt[2k]{a}$
A8) $0 \le a < b \iff \sqrt[2k]{a} < \sqrt[2k]{b}$
OBS. $a < b \not\Longrightarrow \sqrt[2k]{a} < \sqrt[2k]{b}$
pois, caso $a<0$ e $a < b \Longrightarrow \nexists\ \sqrt[2k]{a}$
A9) $\sqrt[2k]{a+b} < \sqrt[2k]{a} + \sqrt[2k]{b},\quad \forall a, b > 0$

B1) $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,\quad \forall a \in \mathbb{R}$
B2) $\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a}\,\sqrt[2k+1]{b}$
B3) $(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$
B4) $\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{-a}\,\sqrt[2k+1]{-b}$
B5) $\sqrt[2k+1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k+1]{a}}{\sqrt[2k+1]{b}},\quad b \ne 0$
B6) $\sqrt[2k+1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k+1]{-a}}{\sqrt[2k+1]{-b}},\quad b \ne 0$
B7) $a = b \iff \sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b}$
B8) $a < b \iff \sqrt[2k+1]{a} < \sqrt[2k+1]{b}$
B9) $\sqrt[2k+1]{a+b} < \sqrt[2k+1]{a} + \sqrt[2k+1]{b},\quad \forall a, b > 0$

Exemplos

1. Simplificar a expressão $\dfrac{\sqrt[4]{(x-1)^8 + 4(x-1)^4}}{x-1}$.

$$\frac{\sqrt[4]{(x-1)^8 + 4(x-1)^4}}{x-1} = \frac{\sqrt[4]{(x-1)^4\left((x-1)^4+4\right)}}{x-1} = \frac{|x-1|\sqrt[4]{(x-1)^4+4}}{x-1}$$

Se $x-1>0$ então $|x-1| = x-1$, isto é, se $x>1$ então $\dfrac{|x-1|}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$.

Se $x-1<0$ então $|x-1| = -(x-1)$, isto é, se $x<1$ então $\dfrac{|x-1|}{x-1} = \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$.

Assim a simplificação da expressão é:

$$\frac{\sqrt[4]{(x-1)^8 + 4(x-1)^4}}{x-1} = \sqrt[4]{(x-1)^4+4},\quad \text{se } x>1.$$

$$\frac{\sqrt[4]{(x-1)^8 + 4(x-1)^4}}{x-1} = -\sqrt[4]{(x-1)^4+4},\quad \text{se } x<1.$$

2. Resolver a equação: $\dfrac{16\sqrt[10]{x^{50}}+\sqrt[9]{x^{27}}}{x^5}=0.$

   Primeiro vamos simplificar a expressão, $\dfrac{16\sqrt[10]{x^{50}}+\sqrt[9]{x^{27}}}{x^5}=\dfrac{16\sqrt[10]{(x^5)^{10}}+\sqrt[9]{(x^3)^9}}{x^5}=\dfrac{16|x^5|+x^3}{x^5}$

   Sabemos que $x^5>0 \iff x>0 \implies \left|x^5\right|=x^5$ e $x^5<0 \implies x<0 \implies \left|x^5\right|=-x^5.$

   Caso $\boxed{x>0}$ $\dfrac{16|x^5|+x^3}{x^5}=\dfrac{16x^5+x^3}{x^5}=\dfrac{x^3\left(16x^2+1\right)}{x^5}=\dfrac{16x^2+1}{x^2}.$ Resolvendo a equação,

   $\dfrac{16x^2+1}{x^2}=0 \iff 16x^2+1=0 \iff 16x^2=-1.$ Essa equação não tem solução em $\mathbb{R}$.

   Caso $\boxed{x<0}$ $\dfrac{16|x^5|+x^3}{x^5}=\dfrac{-16x^5+x^3}{x^5}=\dfrac{x^3\left(-16x^2+1\right)}{x^5}=\dfrac{-16x^2+1}{x^2}.$ Resolvendo a equação,

   $\dfrac{-16x^2+1}{x^2}=0 \iff -16x^2+1=0 \iff 16x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{4}.$

   $-\frac{1}{4}<0 \implies x=-\frac{1}{4}$ é solução da equação. $\frac{1}{4}>0 \implies x=\frac{1}{4}$ não é solução da equação.