IME – Instituto de Matemática e Estatística
GMA – Departamento de Matemática Aplicada

Notas de Aula de Matemática Básica I

Maria Lúcia Tavares de Campos
Marlene Dieguez Fernandez

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Parte I – Seno e Cosseno
Parte II – Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante
Parte III- Trigonométricas Inversas

Versão 2015-1

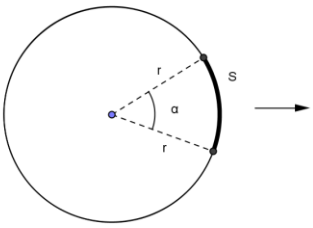
Créditos: esse texto é uma atualização da parte de Trigonometria dos textos dos Exercícios Programados (EPs) da disciplina Pré-Cálculo, do Curso de Matemática a Distância da UFF. A disciplina Pré-Cálculo é coordenada pelas autoras. A parte de trigonometria dos EPs foi uma atualização do texto sobre Trigonometria da disciplina Matemática Básica, de autoria da professora Cristiane Argento e Matemática Básica também faz parte do Curso de Matemática a Distância da UFF.

PARTE I – SENO E COSSENO

Vamos começar a estudar um tema que é muito importante: **as funções trigonométricas**. Para começar, vamos estudar as **funções seno e cosseno**, vamos falar sobre o círculo trigonométrico e vamos definir as funções seno e cosseno nesse círculo. Depois disso vamos aprender a **resolver as equações e inequações trigonométricas**, para isso, antes temos que **estudar as identidades trigonométricas relativas ao seno e cosseno.** A visualização no círculo trigonométrico será muito útil na resolução das equações e inequações. Para finalizar essas funções estudaremos os seus gráficos e as transformações sobre os mesmos. Como orientação de estudo, caso você não se lembre da trigonometria no triângulo retângulo, leia o material complementar "Relações trigonométricas no triângulo.

Arcos e ângulos na circunferência em radianos

Quando cortamos uma circunferência de raio r num ponto e a "desentortamos", obtemos um segmento de reta cuja medida é dada pela fórmula $l = 2\pi r$ e essa medida é chamada de comprimento da circunferência. Quando tomamos um arco s dessa circunferência, correspondente a um ângulo central α e o "desentortamos", o comprimento desse arco pode ser obtido por uma regra de três simples.



Medida do ângulo α ou arco em graus	$\leftrightarrow$	comprimento do arco s
$\alpha°$	$\leftrightarrow$	s
$360°$	$\leftrightarrow$	$2\pi r$

Logo, $s = \frac{2\pi r\alpha°}{360°} = \frac{\pi\,\alpha°}{180°} \cdot r$

s e r medidos com a mesma unidade de comprimento.

Observe que se tomarmos a mesma abertura α $(medido\ em\ graus)$, com raios r_1 e r_2, os comprimentos de arco associados $s_1 = \frac{2\pi r_1\alpha°}{360°} = \frac{\pi\,\alpha°}{180°} \cdot r_1$ e $s_2 = \frac{2\pi r_2\alpha°}{360°} = \frac{\pi\,\alpha°}{180°} \cdot r_2$ são diferentes.

Porém, note que $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{2\pi\alpha^{\circ}}{360°} = \frac{\pi\,\alpha^{\circ}}{180°}$. Assim, associamos ao ângulo α (medido em graus) outra medida do ângulo, igual a $\frac{2\pi\alpha^{\circ}}{360°} = \frac{\pi\alpha^{\circ}}{180°}$, já que esse valor independe do raio. Essa medida do ângulo é chamada de radianos (abreviatura rad), ou seja, a medida do ângulo α em graus, $\alpha°$, corresponde à medida do ângulo α em radianos, $\frac{\pi\alpha^{\circ}}{180°}$ rad. Sendo assim, obtemos as correspondências:

Medida de ângulo ou arco em graus	360º	180º	90º	270º	45º	60º	30º	1º	$\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \cong 57{,}3°$
Medida de ângulo ou arco em radianos	2π rad	π rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{180}$ rad $\cong$ 0,01745 rad	1 rad

Observe que, nesse caso, *o comprimento de um arco da circunferência de raio r e ângulo central de* ***θ radianos*** *é dado por*

$$\boxed{s = \theta r.}$$

Quando o raio é 1, o comprimento do arco s é igual ao valor do ângulo subtendido θ em radianos.

Exemplo1:

1) Quantos graus mede o arco descrito por uma partícula que faz um percurso de $4\pi m$ numa circunferência de diâmetro 1,6 cm?

Solução: Usando a unidade em centímetros, temos que $400\pi = \theta.0{,}8 \Longrightarrow \theta = \frac{400\pi}{0{,}8} = 500\pi\ rad.$

Logo, o arco descrito em graus é igual a $500\pi \times \frac{180}{\pi} = 90.000°$.

2) Quantos centímetros percorre uma partícula que descreve um arco de 510º numa circunferência de raio 6 cm?

Solução: Primeiro transformamos a medida do ângulo para radianos, então $\theta = \frac{\pi}{180}.510 = \frac{17\pi}{6}$.

Logo, a partícula percorre $s = \theta r = \frac{17\pi}{6}.6\ cm = 17\pi\ cm$. Para termos uma ideia dessa grandeza fazemos $\pi \cong 3{,}14$ e assim, $s = 17\pi\ cm \cong 17 \times 3{,}14\ cm = 53{,}38\ cm.$

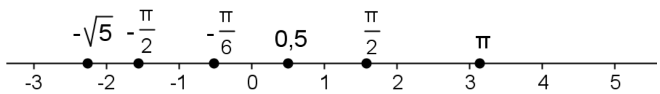
3) Qual é a relação entre o comprimento do arco subentendido por um ângulo de 1 rad e o raio da da circunferência? Como podemos marcar esse ângulo em qualquer círculo?

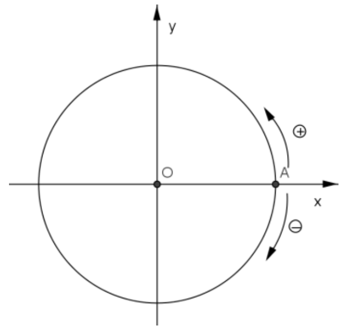
Solução: $\frac{s}{r} = 1\ rad$, portanto $s = r$. Para marcar o ângulo de 1 rad, construímos um círculo de raio r, e enrolamos sobre o círculo um fio de comprimento igual ao raio. Ligando as extremidades A e B do fio ao centro O do círculo, obtemos $\sphericalangle AOB$ que mede 1 rad.

O Círculo Trigonométrico

Considere num plano um sistema de coordenadas cartesianas xOy e uma circunferência de raio unitário, com centro na origem do sistema. Nesta circunferência, o comprimento de qualquer arco é igual à medida, em radianos, do ângulo central subtendido por esse arco, pois $l = r\theta = \theta$. Veremos agora, como associar a cada número real θ um ponto no círculo trigonométrico.

- Se $\theta = 0$ fazemos corresponder o ponto $A = (1,0)$, origem do círculo trigonométrico.
- Se $\theta > 0$, partimos de A e percorremos um arco de comprimento θ no círculo trigonométrico, no sentido anti-horário.
- Se $\theta < 0$, partimos de A e percorremos um arco de comprimento $|\theta|$ no círculo trigonométrico, no sentido horário.



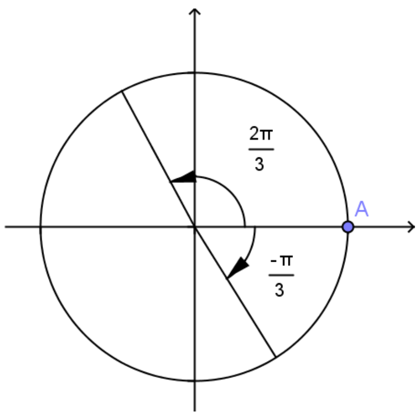


Observe que há percursos que podem dar mais de uma volta na circunferência. Os arcos θ e $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, são ditos congruentes (ou côngruos), pois são representados no mesmo ponto do círculo trigonométrico. Nesse caso, $|k|$ (com $|k| \geq 1$) é o número de voltas a mais no círculo e o sinal de k o sentido das voltas, isto é, $k > 0$ indica o sentido anti-horário para as voltas, enquanto $k < 0$ indica o horário. Quando $\theta > 0$, fazer um percurso de comprimento θ é percorrer um arco de θ radianos (rad) sobre o círculo trigonométrico no sentido anti-horário e para $\theta < 0$, o arco tem comprimento $-\theta$ e é percorrido no sentido horário.

Exemplo 2:

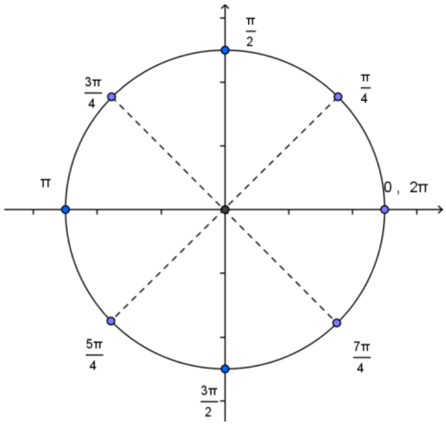
I. Marque no círculo trigonométrico os ângulos correspondentes a $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}$ $radianos$.

Solução:



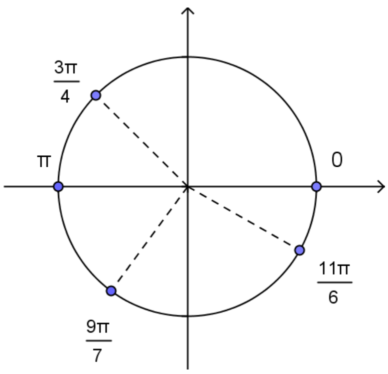
II. Divida o círculo trigonométrico em 8 partes iguais, a partir de $A = (1,0)$ e marque o arco θ, correspondente a cada ponto divisor, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução:



III. Descubra o ângulo congruente no intervalo $[0,2\pi]$ e marque no círculo trigonométrico.

(a) 36π **(b)** 41π **(c)** $\frac{83\pi}{4}$ **(d)** $-\frac{13\pi}{6}$ **(e)** $\frac{51\pi}{7}$



Solução:

(a) $36\pi = 18 \times 2\pi$, logo 36π é congruente a 0.

(b) $41\pi = \pi + 40\pi = \pi + 20 \times 2\pi$, logo 41π é congruente a π.

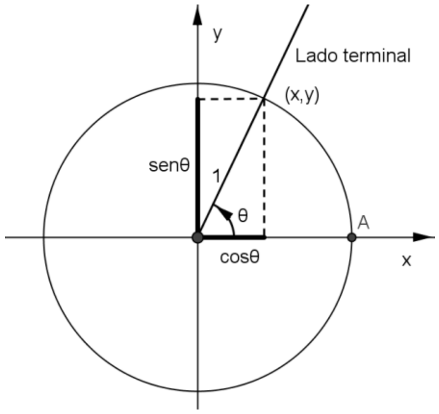
(c) Dividindo 83 por 4, temos $\frac{83\pi}{4} = \frac{80\pi+3\pi}{4} = 20\pi + \frac{3\pi}{4} =$

$10 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, logo $\frac{83\pi}{4}$ é congruente a $\frac{3\pi}{4}$ (135°).

(d) $-\frac{13\pi}{6} = \frac{-12\pi-\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6}$, logo - $\frac{13\pi}{6}$ é congruente a $-\frac{\pi}{6}$. Porém, queremos o ângulo em $[0,2\pi]$, assim - $\frac{13\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi - 2\pi = -4\pi + \frac{11\pi}{6}$. O ângulo é congruente a $\frac{11\pi}{6}$ (330°).

(e) Dividindo 51 por 7, temos $\frac{51\pi}{7} = \frac{49\pi+2\pi}{7} = 7\pi + \frac{2\pi}{7}$, mas 7 é ímpar, então reescrevemos assim $\frac{51\pi}{7} = \frac{49\pi+2\pi}{7} = 7\pi + \frac{2\pi}{7} = 6\pi + \pi + \frac{2\pi}{7} = 6\pi + \frac{9\pi}{7} = 3 \times 2\pi + \frac{9\pi}{7}$ logo $\frac{51\pi}{7}$ é congruente a $\frac{9\pi}{7}$ $(\cong 231°)$.

Extensão de seno e cosseno a toda a reta



A cada $\theta \in \mathbb{R}$, associamos um ângulo no círculo trigonométrico. Considerando o lado terminal do ângulo, este tem interseção com o círculo trigonométrico num ponto de coordenadas (x, y), conforme a figura ao lado. Observe que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que:

$x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$ de acordo com o triângulo retângulo da figura.

Agora, vamos estender as definições de seno e cosseno para a reta toda usando o ponto de interseção entre o lado terminal do ângulo e o círculo, ou seja, define-se

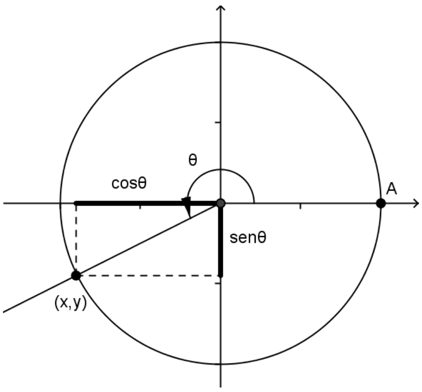
$$\cos\theta = x$$

$$(a\ abscissa\ do\ ponto\ de\ interseção)\ \ e$$

$$\operatorname{sen}\theta = y$$

$$(a\ ordenada\ do\ ponto\ de\ interseção),$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.



Assim, o $\cos\theta$ será lido no eixo Ox e o $\operatorname{sen}\theta$ no eixo Oy.

Acabamos de definir duas importantes funções, a saber, as funções $\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Note que os valores do seno e do cosseno são os mesmos para ângulos congruentes, já que esses têm o mesmo lado terminal, isto é, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen}\theta, \forall\theta \in \mathbb{R}$.

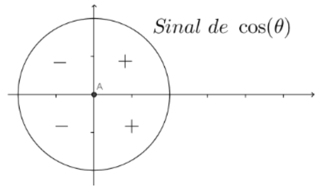
Além disso, o conjunto imagem do seno e do cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.

Denotando por P o ponto de interseção entre o lado terminal do ângulo e o círculo, temos os seguintes valores.

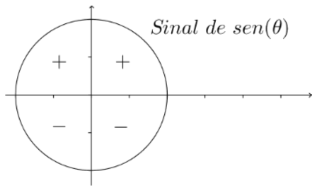
- $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 2k\pi = 1$ e $\operatorname{sen} 2k\pi = 0$, pois $P = (1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, pois $P = (0, 1)$. [Marcamos 90° no sentido anti-horário.]
- $\cos\pi = -1$ e $\operatorname{sen}\pi = 0$, pois $P = (-1, 0)$. [Marcamos 180° no sentido anti-horário.]
- $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$, pois $P = (0, -1)$. [Marcamos 270° no sentido anti-horário.]
- $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, pois $P = (0, -1)$. [Marcamos 90° no sentido horário.]
- $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$, pois $P = (0, 1)$. [$\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, portanto é congruente a $\frac{\pi}{2}$]

Além disso, temos os sinais do seno e do cosseno:

- $\cos\theta > 0$, se P estiver no 1° ou no 4° quadrante; $\cos\theta < 0$, se P estiver no 2° ou no 3° quadrante.



- $\operatorname{sen}\theta > 0$, se P estiver no 1° ou no 2° quadrante; $\operatorname{sen}\theta <$ 0, se P estiver no 3° ou no 4° quadrante.



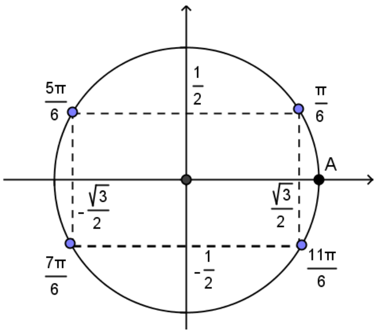
Identidade trigonométrica fundamental:

Aplicando o teorema de Pitágoras a um dos triângulos retângulos das figuras da página anterior de catetos $b = |\operatorname{sen}\theta|$, $c = |\cos\theta|$ e hipotenusa $a = 1$, obtemos

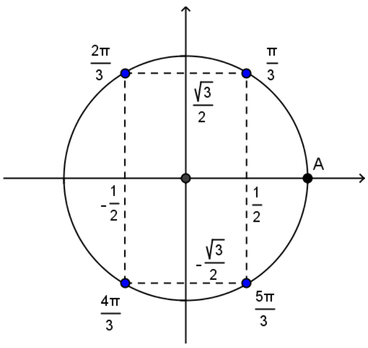
$$\boxed{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.}$$

Essa identidade é válida para todo θ real, mesmo para os ângulos com lados terminais sobre os eixos coordenados (verifique!).

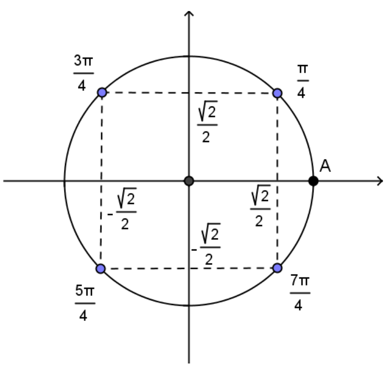
Valores notáveis do seno e do cosseno



$$\begin{array}{l}
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \\
\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \\
\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}; \\
\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2};
\end{array}$$



$$\begin{array}{l}
\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\
\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\
\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\
\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{array}$$



$$\begin{array}{l}
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{array}$$

Exemplo 3:

1) Determine o seno e o cosseno de: **a)** $\frac{19\pi}{3}$ **b)** 1350° **c)** -510°

Solução:

a) $\frac{19\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$, logo $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $1350° = 3 \times 360° + 270°$, logo $\cos(1350°) = \cos 270° = 0$ e $\operatorname{sen}(1350°) = \operatorname{sen} 270° = -1$.

c) $-510° = -720° + 210° = -2 \times 360° + 210°$, logo $\cos(-510°) = \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}(-510°) = \operatorname{sen} 210° = -\frac{1}{2}$.

2) Determine o sinal de: **a)** $\operatorname{sen} 232°$ **b)** $\cos 271°$ **c)** $\cos 143°$

Solução:

a) $232°$ é um ângulo do 3° quadrante, logo $\operatorname{sen} 232°$ é negativo.

b) $271°$ é um ângulo do 4° quadrante, logo $\cos 271°$ é positivo.

c) $143°$ é um ângulo do 2° quadrante, logo $\cos 143°$ é negativo.

3) Resolva as equações em $[0,2\pi]$: **a)** $\operatorname{sen} x = 1$ **b)** $\operatorname{sen} x = 0$ **c)** $\cos x = \frac{1}{2}$.

Solução:

a) $\operatorname{sen} x = 1$ se e só se o lado terminal do ângulo no círculo trigonométrico estiver sobre o semieixo positivo dos y, logo $x = \frac{\pi}{2}$. Assim, $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

b) $\operatorname{sen} x = 0$ se e só se o lado terminal do ângulo *x* estiver sobre o eixo *Ox*. Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

c) Marcando no eixo $0x$ do círculo trigonométrico $\cos x = \frac{1}{2}$, observamos que há dois ângulos em $[0, 2\pi]$ onde $\cos x = \frac{1}{2}$. São eles, $x = \frac{\pi}{3}(60°)$ e $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}(300°)$.

Algumas identidades trigonométricas

Frequentemente, quando trabalhamos com funções trigonométricas, utilizamos identidades para simplificar o estudo. Listamos a seguir algumas das principais identidades que utilizaremos.

1. $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\sin\beta$, $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

5. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$,
$sen(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$, $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

6. *Arco duplo:*

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \ , \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

$sen(2\alpha) = 2sen\alpha cos\alpha \quad , \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

7. *Arco metade* :

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad , \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad , \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

As identidades acima são demonstradas a partir das definições das funções trigonométricas, por exemplo, para (2) e (3), faça uma figura marcando no círculo trigonométrico $\alpha \quad e -\alpha$, por simetria, o resultado segue [obs. veja applet no site relativo às propriedades (2) e (3)]. Já as identidades do arco duplo, seguem de (4) e (5), para $\alpha = \beta$. As do arco metade, são obtidas da primeira identidade de (6), substituindo α por $\frac{\alpha}{2}$ e usando a identidade (1) do lado direito (para o ângulo $\frac{\alpha}{2}$). As identidades (4) e (5) são menos diretas e serão deixadas como exercício (consulte um livro).

Atenção*: um erro frequente, cometido por muitos alunos é pensar que vale a igualdade* $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ *, porém* ***essa igualdade é falsa****!!! Veja o exemplo 4-1) abaixo.*

Exemplo 4:

1. Dê um exemplo que mostre que em geral, $\operatorname{sen} 2x \neq 2\operatorname{sen} x$. Agora, construa uma infinidade de exemplos.

Solução: Tome $x = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{sen}\left(2.\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Construindo uma infinidade de exemplos: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$ onde $n \geq 2$, então,

Como $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, segue que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) > \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) > \sqrt{2} > 1$ e portanto $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \neq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{n}\right) < 1$.

2. Calcular $\operatorname{sen} 75\ °$ e $\cos 75°$.

Solução: Vamos usar as identidades do arco metade para $\alpha = 150°. Então,$

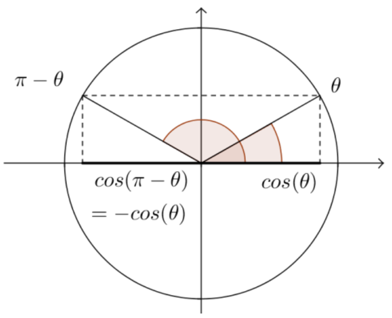
$\cos^2(75°) = \frac{1+\cos 150°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \cos 75° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, e

$\operatorname{sen}^2(75°) = \frac{1-\cos 150°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \sin 75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$,

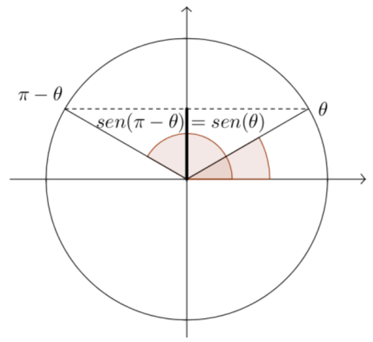
Pois 75° é do 1° quadrante.

Simetrias no círculo trigonométrico

Supondo que o ângulo θ está no 1º. Quadrante, podemos verificar por simetria no círculo trigonométrico, que são válidas as identidades a seguir. E para qualquer outro valor de θ, podemos verificar através das identidades (4) e (5) (seno e cosseno da soma e subtração de ângulos) que são válidas as mesmas identidades.



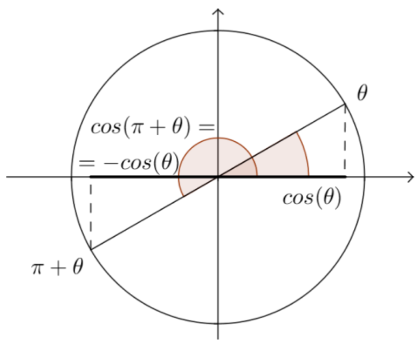
Identidade 8



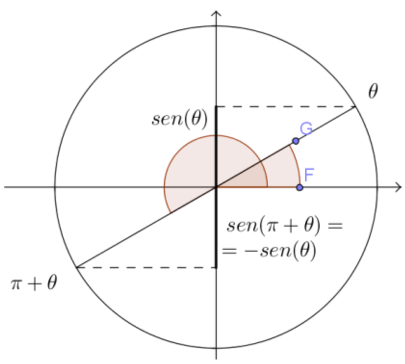
Identidade 9

8. $\cos(\pi - \theta\ ) = \cos\pi \cos\theta + \operatorname{sen}\pi\ \operatorname{sen}\theta = (-1)\cos\theta + 0 \cdot \sin\theta = -\cos\theta$

9. $\operatorname{sen}(\pi - \theta\ ) = \operatorname{sen}\pi \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\pi\ = 0\ \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cdot (-1) = \operatorname{sen}\theta$



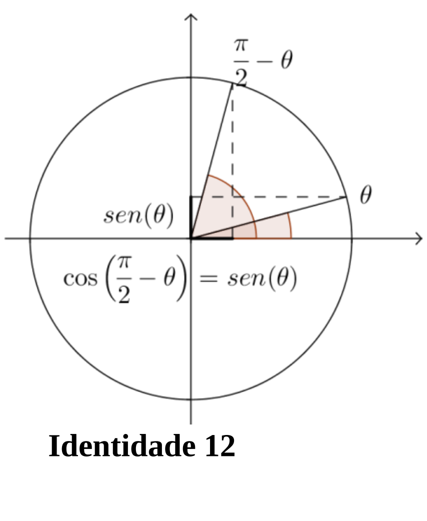
Identidade 10



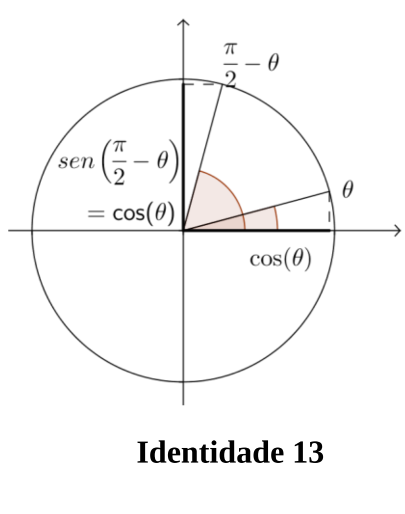
Identidade 11

10. $\cos(\pi + \theta\ ) = \cos\pi\ cos\theta - sen\ \pi\ sen\ \theta = (-1)cos\theta - 0 \cdot sen\ \theta = -\cos\theta$

11. $\sin(\pi + \theta\ ) = \operatorname{sen}\pi \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\ \cos\pi\ = 0\ \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\ \ \cdot (-1) = -\operatorname{sen}\theta$



Identidade 12



Identidade 13

12. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\theta$

13. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\,\cos\frac{\pi}{2}=1\cdot\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cdot 0=\cos\theta$

Observação: veja applet no site sobre as identidades 10, 11, 12 e 13.

Exemplo 5:

Simplificar a expressão $\frac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ até encontrar uma expressão que dependa apenas de $\operatorname{sen} x$ e/ou $\cos x$.

Solução:

$\frac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\cos(x)}{\operatorname{sen} x}=2\cos^2 x.$

Agora, importantíssimo, é que os erros mais comuns que acontecem com essas funções não se repitam.

ATENÇÃO! NÃO VALE, por exemplo:

1- $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}(x)$. Ou mais geralmente, $\operatorname{sen}(ax)=a\operatorname{sen}(x)$, $a\in$ IR .**(não vale!!!)**

2- $\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)$ **(não vale!!!)**

3- Note que $\operatorname{sen}(3x+4)=4+\operatorname{sen}(3x)$. **(não vale!!!)** É importante utilizar parênteses!.

4- $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=$ sen. **(não vale!!!)**

A função " *sen* " sem a variável? Não tem sentido, o erro ocorreu porque a variável x foi erradamente simplificada.

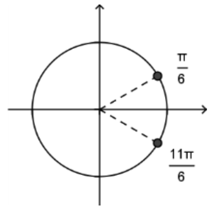
Equações trigonométricas

Resolver uma equação trigonométrica significa *encontrar os valores dos ângulos que pertencem ao intervalo dado, que tornam a equação verdadeira*. Se nenhum intervalo for dado inicialmente, supomos que queremos todos os ângulos reais que satisfazem a equação.

Exemplo 1: **Equações mais simples**.

1) Resolva $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in[0,2\pi]$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

Solução: Os ângulos no intervalo $[0,2\pi]$ são $x=\frac{\pi}{6}$ *ou* $x=\frac{11\pi}{6}$.

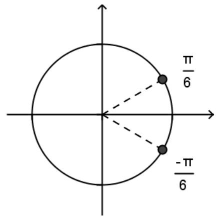


2) Resolva $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0, \pi]$.

Solução: O ângulo no intervalo $[0, \pi]$ é $x = \frac{\pi}{6}$.

3) Resolva $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

Solução: Os ângulos no intervalo $[-\pi, \pi]$ são $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$.



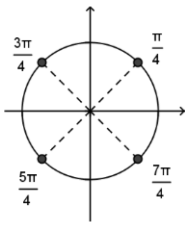
4) Resolva $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Os ângulos são todos os congruentes a $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ $(ou \frac{11\pi}{6})$.

Assim, $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ }, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

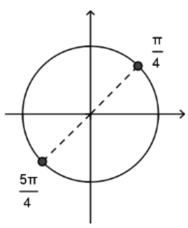
5) Resolva $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,2\pi]$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

Solução: $\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.



6) Resolva $\operatorname{sen} 2x = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

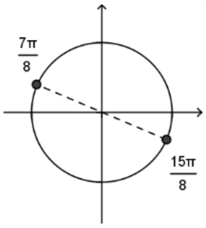
Solução: Mudando a variável, fazendo $t = 2x$, temos $\operatorname{sen} t = 1 \iff t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Logo, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.



7) Resolva $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, $x \in \mathbb{R}$. Marque o conjunto solução no círculo trigonométrico.

Solução: Mudando a variável, fazendo $t = 2x - \frac{\pi}{4}$, temos $\operatorname{sen} t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Logo,

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$.



OBSERVAÇÃO: No exemplo anterior vimos várias equações do tipo $sen\, x = a$ ou $cos\, x = a$. Note que como $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$, uma equação desse tipo admite solução, se e só se , $a \in [-1,1]$. Por exemplo, as equações $sen\, x = 2$, $sen\, x = \sqrt{3}$, $cos\, x = -5$, $cos\, x = \pi$ não possuem solução ($S = \emptyset$). Por outro lado, equações em que $-1 \leq a \leq 1$, do tipo $sen\, x = 0{,}1$, $sen\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $cos\, x = -\frac{1}{5}$, $cos\, x = \sqrt{\pi - 3}$, sempre possuem solução, mesmo que os valores não correspondam a ângulos notáveis.

Exemplo 2: **Equações mais elaboradas, algumas requerem o uso de identidades.**

Resolva as equações abaixo.

1) $2\cos^2 x + \cos x = 0,\; x \in [0,2\pi]$.

Solução: $2\cos^2 x + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x\,(2\cos x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\cos x = 0 \;\; ou \;\; \cos x = -\frac{1}{2}$ Logo, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

2) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\operatorname{sen}\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Solução: $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\operatorname{sen}\theta \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}\theta = 0 \;\; ou \;\; \frac{1}{\cos\theta} = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \;\; ou \;\; \cos\theta = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$

$\theta = 0,\; \pi,\; 2\pi,\; \frac{\pi}{3},\; \frac{5\pi}{3}$.

3) $\cos^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0$.

Solução: Usando a identidade trigonométrica fundamental, obtemos

$\cos^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$.

Fazendo uma mudança de variável, colocando $t = \operatorname{sen} x$ na equação $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$, obtemos a equação do 2º grau $t^2 - t - 2 = 0$, cujas raízes são $t_1 = -1 \; e \; t_2 = 2$. Voltando a x, temos duas equações:

- $\operatorname{sen} x = 2$, que não tem solução pois $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$;

- $\operatorname{sen} x = -1$, que tem como solução $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0, x \in [0,2\pi]$.

Solução: Usando a identidade do arco duplo, a equação dada é equivalente a

$2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos x = 0 \iff \cos x\ (2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$

$\iff \cos x = 0 \ \ ou\ \ 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \iff$

$\cos x = 0\ \ ou\ \ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Inequações trigonométricas

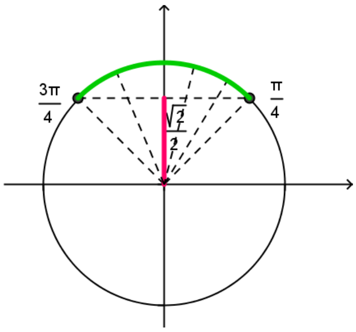
Para resolver uma inequação trigonométrica, procure determinar primeiro a solução da equação associada para ter uma idéia do problema. Depois, faça um esboço no círculo trigonométrico para determinar a solução da inequação.

Exemplo 3: **Resolva e marque o conjunto solução no círculo trigonométrico**.

1) $\operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, x ∈ [0,2π].

Solução: A equação associada é $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cujas soluções no intervalo dado são $x = \frac{\pi}{4}\ \ ou\ \ x = \frac{3\pi}{4}$.

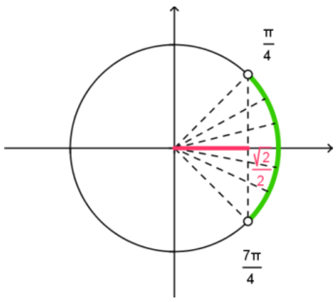
Olhando no círculo trigonométrico, temos $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, pois para os ângulos desse intervalo, quando projetamos o ponto correspondente no círculo sobre o eixo Oy o valor da ordenada é maior do que, ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



2) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0,2\pi]$.

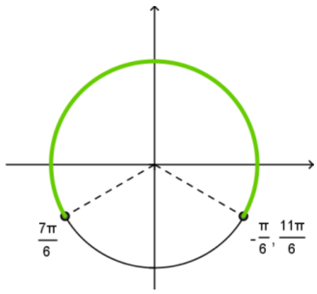
Solução: A equação associada é $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cujas soluções no intervalo dado são $x = \frac{\pi}{4}\ \ ou\ \ x = \frac{7\pi}{4}$ (esses ângulos não satisfazem a inequação!).

Olhando no círculo trigonométrico, temos $S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$, pois para os ângulos desse intervalo, quando projetamos o ponto correspondente no círculo sobre ox, o valor da abscissa é maior do que $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



3) $2\,\text{sen}\,x + 1 \geq 0$.

Solução: A inequação dada é equivalente a $\text{sen}\,x \geq -\frac{1}{2}$.



Marcando o conjunto solução da equação associada, $\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$, no círculo trigonométrico, observamos que o conjunto solução em $[0,2\pi]$ é dado por $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$. Como o problema requer todas as soluções em $\mathbb{R}$, então respeitando a ordem dos reais, podemos escrever $S = \left\{x \in \mathbb{R}; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4) $2\cos^2 x - 1 < 0$.

Solução: Nesse exemplo, primeiro vamos transformar a inequação dada em duas mais simples. Observe.

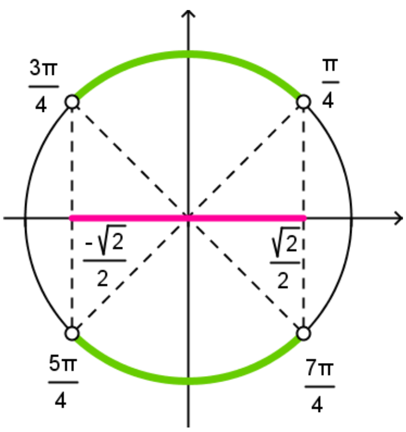
- Mudamos a variável $t = \cos x$, então temos $2t^2 - 1 < 0$.
- Estudamos o sinal da parábola $y = 2t^2 - 1$, cujas raízes são $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e portanto,

$$y = 2t^2 - 1 < 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Voltando à variável x, segue que $2\cos^2 x - 1 < 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Marcamos no círculo trigonométrico as soluções das equações

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e determinamos para quais os ângulos teremos a projeção no eixo O_x entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



O gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$

Para construir o gráfico da função observamos que o ângulo t, medido em radianos, marcado no círculo trigonométrico, transforma-se na variável t do domínio da função. E também observamos que a ordenada do ponto P no círculo trigonométrico, que representa $sen\ t$, coincide com a ordenada do ponto do gráfico da função $f(t) = \text{sen}\, t$.

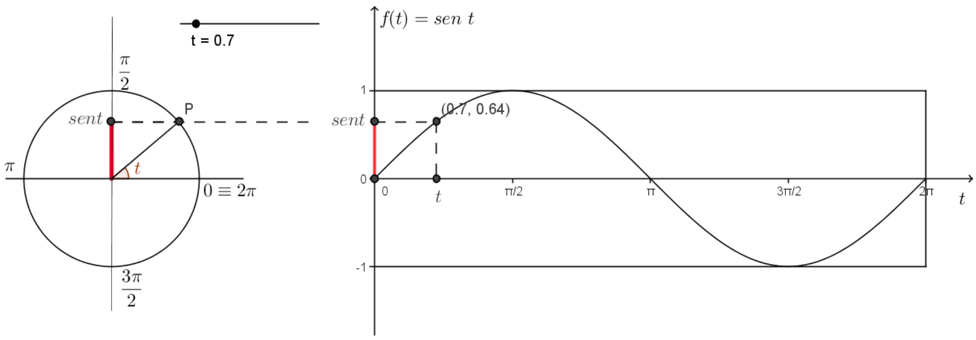
Imagine que o ponto P se movimenta no círculo no sentido anti-horário, a partir da posição $(1, 0)$ e dá uma volta completa, o correspondente ângulo t aumenta, de 0 até 2π, e:

- Quando o ângulo t cresce de $0\ a\ \frac{\pi}{2}$, o valor $f(t) = \text{sen}\, t$ cresce de $0\ \ a\ \ 1$.
- Quando o ângulo t cresce de $\frac{\pi}{2}$ a π, o valor $f(t) = \text{sen}\, t$ decresce de $1\ \ a\ \ 0$.
- Quando o ângulo t cresce de π a $\frac{3\pi}{2}$, o valor $f(t) = \text{sen}\, t$ decresce de $0\ \ a\ -1$.
- Quando o ângulo t cresce de $\frac{\pi}{2}$ a π, o valor $f(t) = \text{sen}\, t$ cresce de $-1\ a\ \ 0$.

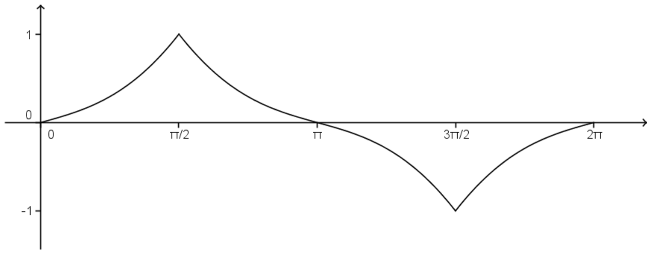
Veja no site os applets correspondentes a esse movimento descrito acima.
Concluímos que a função f é:

crescente nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\ e\ \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Um gráfico cuja função possui a propriedade acima está desenhado abaixo.



Outro gráfico que possui a propriedade acima está desenhado ao lado. Por enquanto não há como justificar porque o gráfico do seno é o que está desenhado acima, e não o que está desenhado ao lado. Em Cálculo I é possível justificar que de fato o gráfico correto é o que está acima.



O gráfico da função seno estendido a toda reta $\mathbb{R}$

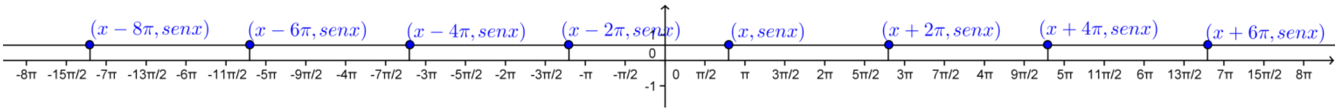
A importante propriedade facilmente visualizada no círculo trigonométrico, a saber,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x-2\pi) = \operatorname{sen}(x+4\pi) = \operatorname{sen}(x-4\pi) = \cdots$$

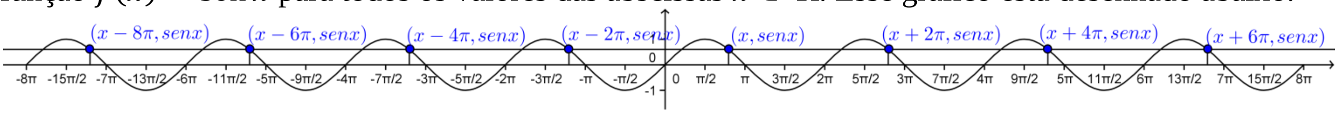
que pode também ser escrita assim

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2k\pi)\,,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

nos diz que a função seno é periódica, com período 2π. Assim, se traçarmos uma reta horizontal contendo um ponto $(x, \operatorname{sen} x)$ do gráfico, o valor da ordenada $\operatorname{sen} x$ pode ser repetido sobre essa reta horizontal, nos seguintes pontos do gráfico: $(x, \operatorname{sen} x)$; $(x+2k\pi, \operatorname{sen} x)$.

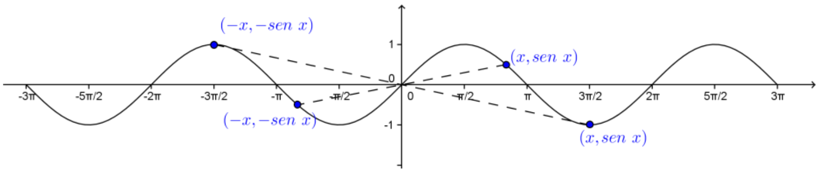


Se repetirmos esse procedimento para todos os valores de x no intervalo $[0,2\pi]$ completamos o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ para todos os valores das abscissas $x \in \mathbb{R}$. Esse gráfico está desenhado abaixo.



A visualização no gráfico de algumas propriedades da função seno

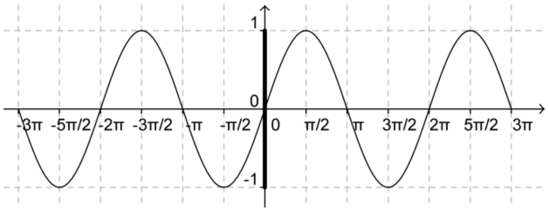
- A função **seno** é uma função **ímpar**.



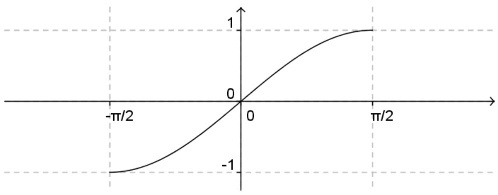
- **Imagem** da função seno**,** $\boldsymbol{Im(f) = [-1, 1]}$**,**

que significa:

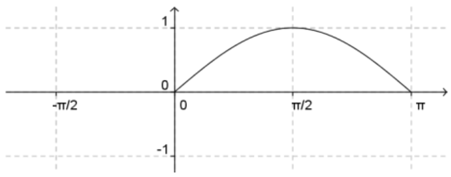
$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \ \text{ ou } \ |\operatorname{sen} x| \leq 1.$$



- A função seno é **injetora** no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



- A função seno **não é injetora** no intervalo $[0, \pi]$.



O gráfico da função cosseno no intervalo $[0, 2\pi]$

Para construir o gráfico da função observamos que o ângulo t, medido em radianos, marcado no círculo trigonométrico, transforma-se na variável t do domínio da função. E também observamos que a abscissa do ponto P no círculo trigonométrico, que representa $\cos t$, coincide com a ordenada do ponto do gráfico da função $f(t) = \cos t$.

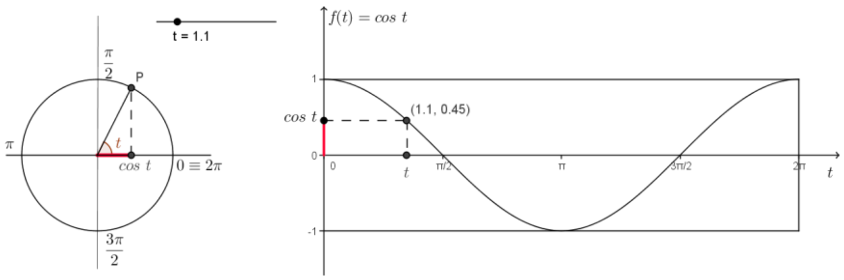
Imagine que o ponto P se movimenta no círculo no sentido anti-horário, a partir da posição $(1, 0)$ e dá uma volta completa, o correspondente ângulo t aumenta, de 0 até 2π, e:

- Quando o ângulo t cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, o valor $f(t) = \cos t$ decresce de 1 a 0.
- Quando o ângulo t cresce de $\frac{\pi}{2}$ a π, o valor $f(t) = \cos t$ decresce de 0 a -1.
- Quando o ângulo t cresce de π a $\frac{3\pi}{2}$, o valor $f(t) = \cos t$ cresce de -1 a 0.
- Quando o ângulo t cresce de $\frac{\pi}{2}$ a π, o valor $f(t) = \cos t$ cresce de 0 a 1.

Veja no site os applets correspondentes a esse movimento descrito acima.
Assim, concluímos que a função f é:

crescente nos intervalos $[\pi, 2\pi]$ e decrescente no intervalo $[0, \pi]$

Um gráfico cuja função possui a propriedade acima está desenhado abaixo.



OBSERVAÇÃO: Há gráficos de outras funções, diferentes do gráfico acima, cujo crescimento e decrescimento é igual ao crescimento e decrescimento do gráfico da função cosseno. Em Cálculo I é possível justificar que de fato o gráfico correto é o que está acima.

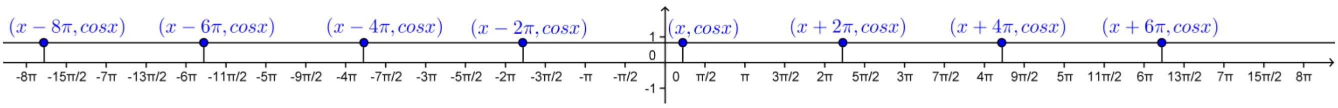
O gráfico da função cosseno estendido a toda reta $\mathbb{R}$

A importante propriedade facilmente visualizada no círculo trigonométrico, a saber,

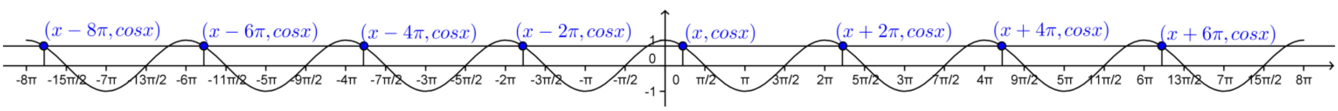
$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cdots,$$

que pode também ser escrita assim $\cos x = \cos(x + 2k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$,

nos diz que a função cosseno é periódica, com período 2π. Assim, se traçarmos uma reta horizontal contendo um ponto $(x, \cos x)$ do gráfico, o valor da ordenada $\cos x$ pode ser repetido sobre essa reta horizontal, nos seguintes pontos do gráfico: $(x, \cos x)$; $(x + 2k\pi, \cos x)$.

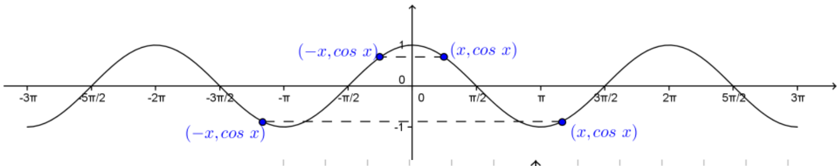


Se repetirmos esse procedimento para todos os valores de x no intervalo $[0,2\pi]$ completamos o gráfico da função $f(x) = \cos x$ para todos os valores das abscissas $x \in \mathbb{R}$. Esse gráfico está desenhado a seguir.

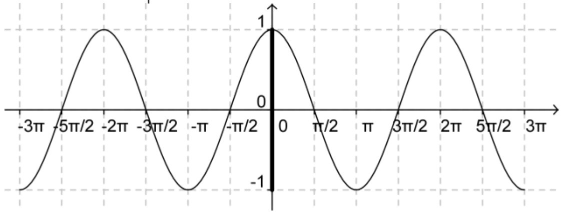


A visualização no gráfico de algumas propriedades da função cosseno

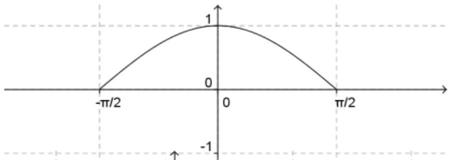
- A função **cosseno** é uma função **par**.



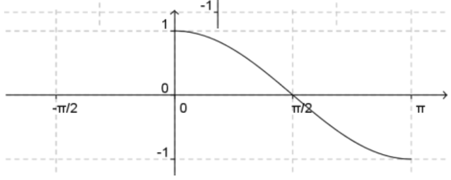
- **Imagem** da função cosseno, $\boldsymbol{Im(f) = [-1, 1]}$, que significa: $-1 \leq cos\ x \leq 1$ ou $|\cos x| \leq 1$.



- A função cosseno **não é injetora** no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



- A função cosseno **é injetora** no intervalo $[0, \pi]$.



Transformações nos gráficos das funções seno e cosseno

Atenção: essa parte é apenas para quem está matriculado na disciplina Cálculo I-A. Quando estiver estudando Cálculo I-A, será útil estudar essa parte logo depois que aprender as transformações em gráficos de funções.

Podemos aplicar o que estudamos sobre as transformações em gráficos de funções aos gráficos dessas duas funções elementares.

<u>**Exemplo 4**</u>: Para a função dada, vamos construir o seu gráfico, após aplicar uma sequência de transformações. Depois vamos encontrar a imagem da função para x no intervalo $[a, b]$ dado.

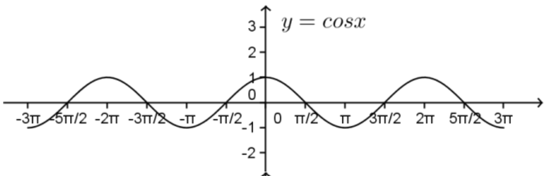
$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad x \in [-3\pi, 3\pi].$

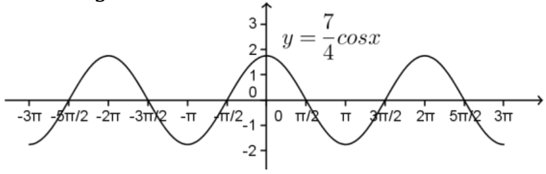
$y = \cos x \xrightarrow{(1)} y = \frac{7}{4}\cos x \xrightarrow{(2)} y = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\cos x \xrightarrow{(3)} y = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

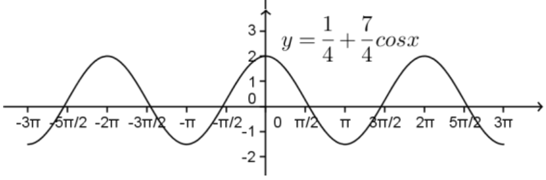
(1) Como $\frac{7}{4} > 1$, há um alongamento vertical do gráfico de $y = \cos x$, com fator de multiplicação $\frac{7}{4}$.

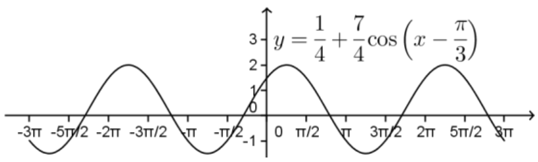
(2) Translação vertical do gráfico de $y = \frac{7}{4}\cos x$, de $\frac{1}{4}$ unidade para cima.

(3) Translação horizontal do gráfico de $y = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\cos x$, de $\frac{\pi}{3}$ unidade para direita.









Determinando a imagem.
Sabemos que $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ quando $\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$. Nesse caso, $x=\frac{\pi}{3}\in[-3\pi,3\pi]$
Sabemos que $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ quando $\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$. Nesse caso, $x=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\in[-3\pi,3\pi]$.

Assim, $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ assume o seu menor valor, que é -1 e o seu maior valor , que é 1, no intervalo $[-3\pi,3\pi]$.

Sabendo que $-1\leq\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$, para todo $x\ \in[-3\pi,3\pi]$, temos:
$-1\leq\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1 \ \Rightarrow\ -1\times\frac{7}{4}\leq\frac{7}{4}\times\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1\times\frac{7}{4}\ \Rightarrow\ -\frac{7}{4}\leq\frac{7}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{7}{4}$
$\Rightarrow\ -\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ -\frac{3}{2}\leq\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 2$.

Logo o menor valor de $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ é igual a
$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos(\pi)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}(-1)=-\frac{3}{2}$.

E o maior valor de $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ é igual a
$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}(1)=2$.

Conclusão: $Im(f)=\left[-\frac{3}{2},2\right]$.

<u>Exemplo 5</u>: Esboçar o gráfico da função $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Sabemos que uma identidade trigonométrica é $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.

Logo, o gráfico da função f é o gráfico da função cosseno.

OBSERVAÇÃO: esse exemplo serve para mostrar que pode ser útil usar identidades trigonométricas para construir gráficos de funções.

<u>Exemplo 6</u>: Esboçar o gráfico da função $f(x)=4-8\cos x\operatorname{sen}x$, para $x\in[0,2\pi]$.

Não podemos usar diretamente a transformação em gráficos de funções elementares porque nessa função aparecem duas funções elementares e só sabemos fazer a transformação no gráfico quando aparece apenas uma função elementar.

Nesse caso vamos procurar uma identidade trigonométrica que simplifique essa função de forma que apareça uma única função elementar.

A identidade trigonométrica em que aparece o produto do seno e cosseno é: $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$

Substituindo na função, $f(x)=4-8\cos x\operatorname{sen}x=4-4\cdot 2\cos x\operatorname{sen}x=\ 4-4\operatorname{sen}(2x)$.

Agora podemos usar a transformação em gráficos para a função $f(x)=\ 4-4\operatorname{sen}(2x)$.

Uma possível sequência de transformações,

$y = \text{sen}\, x \xrightarrow{(1)} y = \text{sen}(2x) \xrightarrow{(2)} y = 4\text{sen}(2x) \xrightarrow{(3)} y = -4\text{sen}(2x) \xrightarrow{(4)} y = 4 - 4\text{sen}(2x).$

(1) Como $2 > 1$ há redução horizontal do gráfico de $y = \text{sen}\, x$, com fator de multiplicação $\frac{1}{2}$.
(2) Como $4 > 1$ há esticamento vertical do gráfico de $y = \text{sen}(2x)$, com fator de multiplicação 4.
(3) O gráfico de $y = 4\text{sen}(2x)$ é refletido em torno do eixo x.
(4) Há uma translação vertical do gráfico de $y = -4\text{sen}(2x)$ de 4 unidades para cima.

Como o gráfico inicial terá uma redução horizontal com fator de multiplicação $\frac{1}{2}$, para que $0 \leq x \leq 2\pi$ no gráfico final, é preciso que o gráfico inicial tenha uma variação de 0 a 4π.