PARTE II – TANGENTE–COTANGENTE–SECANTE–COSSECANTE

Agora estudaremos as funções tangente, cotangente, secante e cossecante. Vamos falar das **definições dessas funções no círculo trigonométrico** e vamos estudar as **identidades trigonométricas relativas a essas quatro funções**. A visualização no círculo trigonométrico será muito útil na **construção dos gráficos** dessas funções e na resolução de **equações e inequações trigonométricas**.

Extensão da tangente, secante, cotangente e cossecante, à reta.

Definimos as funções trigonométricas:

Função tangente: $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ **Função secante**: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$,

para $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é inteiro.

Note que os ângulos do tipo $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ são os ângulos com lado terminal sobre o eixo Oy, congruentes a $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, exatamente onde o cosseno se anula.

Também definimos

Função cotangente: $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ **Função secante**: $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$,

para $\theta \neq k\pi$, onde k é inteiro.

Note que os ângulos do tipo $\theta = k\pi$ são os ângulos com lado terminal sobre o eixo Ox, congruentes a π ou 2π, exatamente onde o seno se anula.

Observação sobre notação ou símbolo

Para a função tangente de um ângulo θ, há duas notações usuais, $\tan\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$.

Para a função secante de um ângulo θ, só há uma notação usual, $\sec\theta$.

Para a função cotangente de um ângulo θ, há duas notações usuais, $\cot\theta$ e $\operatorname{cotg}\theta$.

Para a função cossecante de um ângulo θ, há duas notações usuais, $\csc\theta$ e $\operatorname{cosec}\theta$.

As notações $\sin\theta, \cos\theta,\ \tan\theta,\ \sec\theta\ ,\cot\theta,\ \csc\theta$ são usadas em programas computacionais. Usaremos nos EPs essas mesmas notações, exceto para a função seno que denotamos por $\operatorname{sen}\theta$. Em muitos livros, publicados mais recentemente, essas são as notações usadas. Naturamente os alunos podem usar qualquer uma dessas notações nas provas.

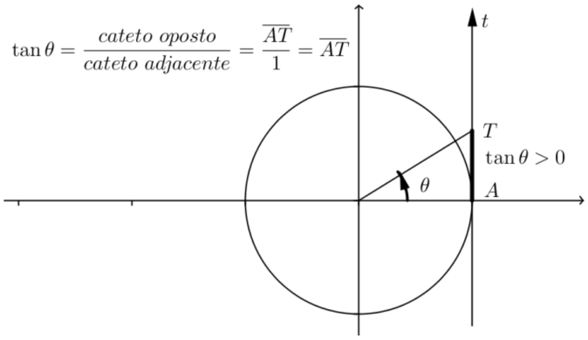
Observe na tabela abaixo alguns valores da tangente, secante, cotangente, cossecante.

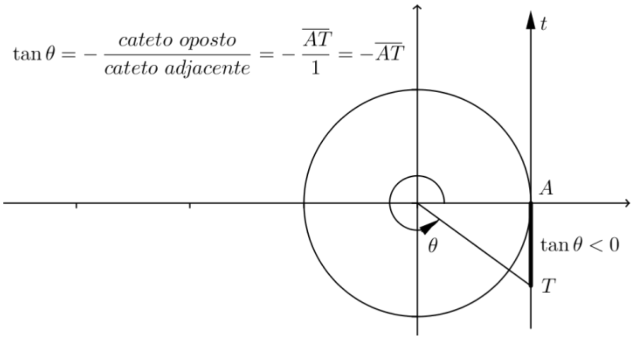
x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\tan x$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	nd	$\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$	-1
$\sec x$	1				nd			
$\cot x$	nd							
$\csc x$	nd				1			

Agora, usando as definições, calcule você mesmo alguns valores da secante, cotangente e cossecante e complete a tabela.

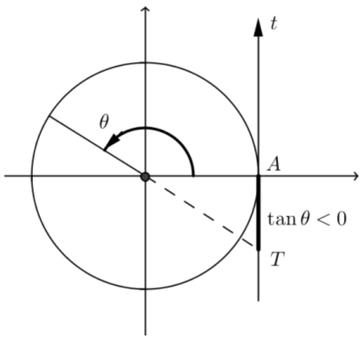
Segmento representativo da tangente no círculo trigonométrico

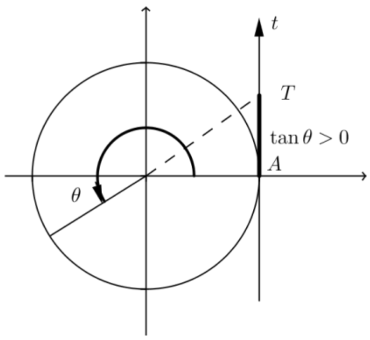
Na reta *t* paralela ao eixo *Oy* e orientada para cima, com origem em $A = (1, 0)$, marcamos a interseção T com o lado terminal do ângulo se θ for um ângulo do 1º ou do 4º quadrante. A $\tan\theta$ é dada pelo segmento $\overline{AT}$ orientado, isto é, com o sinal positivo, se T estiver acima de A e com o sinal negativo, se T estiver abaixo de A. Se o ponto T coincide com o ponto A $(T \equiv A)$, a tangente é zero.





Quando θ é um ângulo do 2º ou 3º quadrante, prolongamos o lado terminal do ângulo, como mostra as figuras ao lado, e marcamos o ponto T. Nas figuras ao lado, quando θ é do 2º quadrante, a tangente é negativa, e, quando θ é do 3º quadrante, a tangente é positiva.





Veja no site o applet "o segmento representativo da tangente no círculo trigonométrico".

Pensando no segmento representativo da tangente, note que $\tan(\theta \pm \pi) = \tan\theta$ e, mais geralmente, $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta, \quad \forall\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (faça um esboço!). Isso significa que o período da tangente é π.

Consequentemente, usando-se a propriedade e a tabela acima, sabemos que:

$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$ $\quad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$

$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$ $\quad \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{11\pi}{6} + 2\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3};$

$\tan\left(\frac{79\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi+76\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4} + 19\pi\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$ etc...

Exemplo 1:

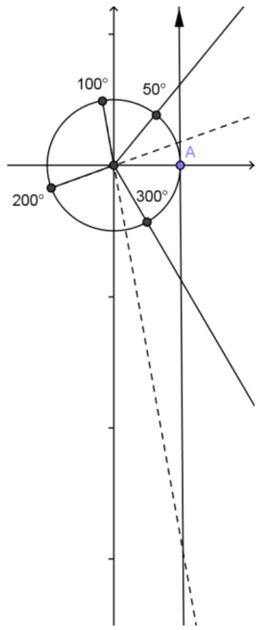
1) Calcule a) $\tan 225°$, b) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ c) $\tan\left(-\frac{115\pi}{3}\right)$

<u>**Solução**</u>: a) $\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1.$

b) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{3} - \pi\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$

c) $\tan\left(-\frac{115\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{114\pi+\pi}{3}\right) = \tan\left(-38\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$

2) Coloque em ordem crescente $\tan 50°$, $\tan 100°$, $\tan 200°$, $\tan 300°$.



Solução: Observe o esboço no círculo trigonométrico ao lado.

Então, $\tan 100° < \tan 300° < \tan 200° < \tan 50°$

3) Determine o domínio de a) $\tan 2x$ b) $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Solução: a) Considere a mudança de variável $t = 2x$, então temos $\tan t$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Logo, voltando à variável x, temos $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Assim, $D = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Considere a mudança de variável $t = x - \frac{\pi}{4}$, então temos $\tan t$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Logo, voltando à variavel x, temos $x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

Assim, $D = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi + \frac{3\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4) Dos números $\tan 45°$, $\tan 64°$, $\tan 345°$, $\tan 89°$, $\tan 100°$, quais são maiores do que 1?

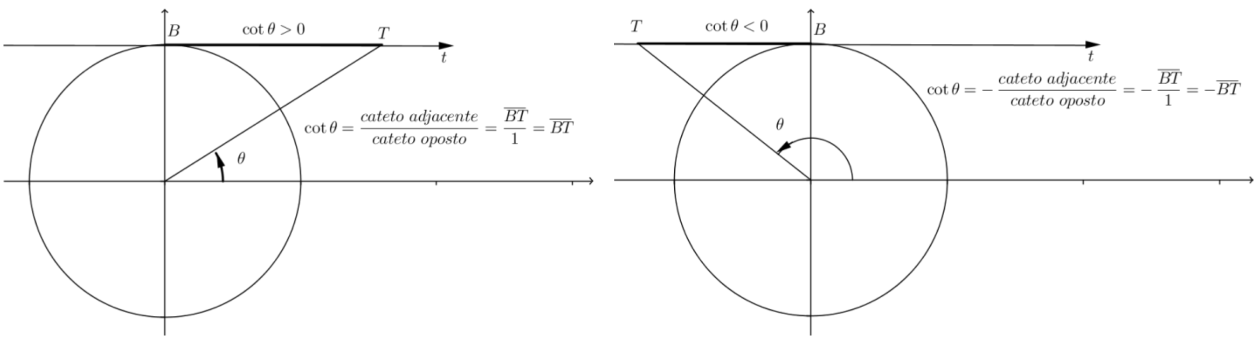
Solução: Primeiro observamos que os 5 ângulos estão entre 0° e 360°. Pensando no eixo representativo da tangente, temos que nesse caso, $\tan x > 1$ se e só se $45° < x < 90°$ ou $225° < x < 270°$. Logo, são maiores do que 1: $\tan 64°$ e $\tan 89°$.

5) Calcule $\tan x$, sabendo que $\cos x = 0{,}1$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

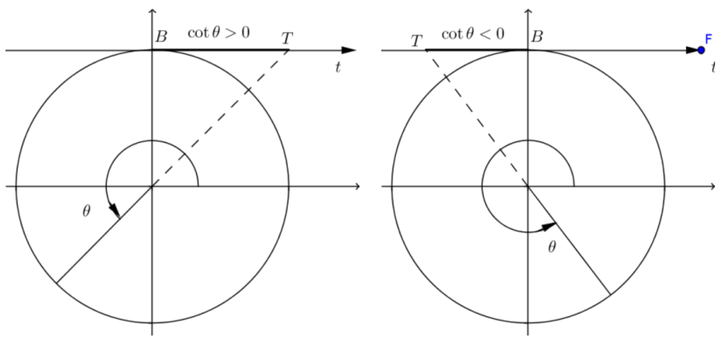
Solução: Pela identidade trigonométrica fundamental, $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, e por ser x um ângulo do 1° quadrante, temos $\text{sen}\, x = \sqrt{1-(0{,}1)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{3}{10}\sqrt{11}$ =. Logo, $\tan x = \frac{\frac{3}{10}\sqrt{11}.}{0{,}1} = 3\sqrt{11}$.

Segmento representativo da cotangente no círculo trigonométrico

Na reta *t* paralela ao eixo *Ox* e orientada para direita, com origem em $B = (0, 1)$, marcamos a interseção T com o lado terminal do ângulo se θ for um ângulo do 1º ou do 2º quadrante. A $\cot\theta$ é dada pelo segmento $\overline{BT}$ orientado, isto é, com o sinal positivo, se T estiver à direita de B e com o sinal negativo, se T estiver à esquerda de B. Se $T \equiv B$, a cotangente é zero.



Quando θ é um ângulo do 3º ou 4º quadrante, prolongamos o lado terminal do ângulo, como mostra as figuras ao lado, e marcamos o ponto T. Nas figuras ao lado, quando θ é do 3º quadrante, a cotangente é positiva, quando θ é do 4º quadrante, a cotangente é negativa.



Veja no site o applet "o segmento representativo da cotangente no círculo trigonométrico".

Pensando no segmento representativo da cotangente, note que $\cot(\theta \pm \pi) = \cot\theta$ e, em geral,

$\cot(\theta + k\pi) = \cot\theta\ , \quad \forall\theta \neq k\pi$ (faça um esboço!). Isso significa que o período da cotangente é π.

<u>**Exemplo 2**</u>:

1) Determine o domínio de a) $\cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$ b) $\cot\left(\frac{1}{x}\right)$.

<u>**Solução**</u>:

$a)\ \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \cot\left(-\frac{x}{2}\right) = -\cot\left(\frac{x}{2}\right)$.

Mudando a variável, fazendo $t = \frac{x}{2}$, temos que $t \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Voltando à x, a variável original, $\frac{x}{2} \neq k\pi \iff x \neq 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Logo o domínio é o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$ ou $\mathbb{R} - \{0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \cdots\}$.

b) Primeira restrição: $x \neq 0$.

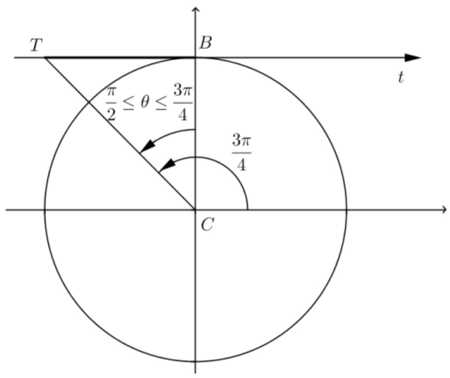
Mudando a variável, fazendo $t = \frac{1}{x}$, temos que $t \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Voltando à variável original, $\frac{1}{x} \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \iff \frac{1}{k\pi} \neq x,\ \ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

Logo o domínio é o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0,\ \ x \neq \frac{1}{k\pi},\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0\}$ ou

$\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, -\frac{1}{3\pi}, \cdots\right\}$.

2) Se $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, encontrar o intervalo de variação de $f(\theta) = 1 - \cot\theta$.



Solução:

Podemos observar que o triângulo CBT é isósceles e retângulo, logo $\overline{BT} = \overline{BC} = 1$. Como o ponto T está à esquerda de B, $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$. Sabemos que $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Se $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, observando os valores correspondentes na reta orientada t concluímos que $-1 \leq \cot\theta \leq 0$.

Mas,.$-1 \leq \cot\theta \leq 0 \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} 1 \geq -\cot\theta \geq 0 \overset{+1}{\Rightarrow} 2 \geq 1 - \cot\theta \geq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 - \cot\theta \leq 2$.

Portanto, o intervalo de variação de $f(\theta) = 1 - \cot\theta$ é o intervalo $[1, 2]$.

Algumas identidades trigonométricas

Listamos a seguir algumas das principais identidades que utilizaremos.

1. $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$, $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é inteiro.
2. $\cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha)$, $\forall \alpha \neq k\pi$, onde k é inteiro.
3. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha,\ \forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha,\ \forall \alpha \neq k\pi$, onde k é inteiro.
4. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec\alpha, \forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc\alpha, \forall \alpha \neq k\pi$, onde k é inteiro.
5. $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, onde k é inteiro.
6. $\cot(2\alpha) = \frac{(\cot^2\alpha) - 1}{2\cot\alpha}$, $\forall \alpha \neq k\pi$, onde k é inteiro.

As identidades (1) e (2) acima são demonstradas a partir da identidade trigonométrica fundamental, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$. Quando dividimos por $\cos^2\alpha$, obtemos a identidade (1) e quando dividimos por $\text{sen}^2\,\alpha$, obtemos a identidade (2). Faça isso!

As identidades dos arcos complementares (3) e (4) acima, são consequências imediatas das identidades dos arcos complementares de seno e cosseno. Faça isso!

Prova da identidade (5): $\tan(2\alpha) = \frac{\text{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$, $\forall \alpha; 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é inteiro.

$$\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \forall\alpha \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},$$ onde k é inteiro.

Exemplo 3:

(a) Simplifique a expressão: $\frac{1-\sec^2 x}{1-\csc^2 x}$

(b) Prove que $\frac{\tan\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}{2\csc x} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solução (a) $\frac{1-\sec^2 x}{1-\csc^2 x} = \frac{1-(1+\tan^2 x)}{1-(1+\cot^2 x)} = \frac{-\tan^2 x}{-\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\frac{1}{\tan^2 x}} = \tan^4 x$.

(c) $\frac{\tan\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}{2\csc x} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

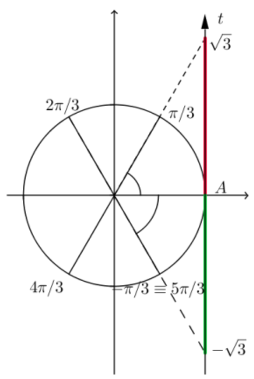
Equações e inequações trigonométricas

Lembramos que resolver uma equação (ou inequação) trigonométrica significa *encontrar os valores dos ângulos que pertencem ao intervalo dado, que tornam a equação* (ou inequação) *verdadeira*. Se nenhum intervalo for dado inicialmente, supomos que queremos todos os ângulos reais que satisfazem a equação ou inequação. Especial atenção deve ser tomada para equações e inequações que contenham uma das funções tangente, cotangente, secante ou cossecante porque o domínio dessas funções não são todos os valores reais.

Lembramos também que para resolver uma inequação trigonométrica, procure determinar primeiro a solução da equação associada para ter uma ideia do problema. Depois, faça um esboço no círculo trigonométrico para determinar a solução da inequação.

Exemplo 1 - Equações e inequações mais simples, que não usam identidades trigonométricas.

a) $\tan^2 x = 3$.



Solução: $\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$. Sabemos que $\sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$.

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, concluímos que o ângulo $x = \frac{\pi}{3}$ é um ângulo do 1º. quadrante tal que $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Pelas simetrias no círculo trigonométrico, na figura ao lado, $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ é um ângulo do 4º. quadrante tal que $\tan(x) = -\sqrt{3}$.

Como a tangente tem período igual a π, as soluções da equação são:

$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, onde k é um inteiro.

Obs. a resposta também pode ser $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, onde k é um inteiro.

---

b) $\tan^2 x < 3$. $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é inteiro.

Solução: a equação associada é $\tan^2 x = 3$, cujas soluções encontradas no exemplo anterior são $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, onde k é número inteiro.

Mudando a variável em $\tan^2 x < 3$,, fazendo $t = \tan x$, temos que $t^2 < 3$.

Resolvendo, temos que $-\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$. Voltando à variável original x, temos que:

$-\sqrt{3} < \tan x < \sqrt{3}$.

Observando no círculo trigonométrico do item anterior, podemos concluir que os valores dos ângulos x que resolvem essa inequação estão nos intervalos $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\ ,\ \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, onde k é inteiro.

OBS. sabemos que $-\frac{\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$, no entanto **É ERRADO** escrever $\left(\frac{5\pi}{3} + k\pi\ ,\ \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$ porque como se trata de um intervalo, é obrigatório que o extremo esquerdo seja menor que o extremo direito, e sabemos que $\frac{5\pi}{3} + k\pi > \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Vamos atribuir valores para k e verificar se o intervalo ou parte do intervalo está contido no intervalo dado $[-2\pi, 2\pi]$,

$k = 0 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3} + 0\ ,\frac{\pi}{3} + 0\right) \subset [-2\pi, 2\pi] \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ é solução.

$k = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\ ,\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \left(\frac{2\pi}{3}\ ,\frac{4\pi}{3}\right) \subset [-2\pi\ ,2\pi] \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{3}\ ,\frac{4\pi}{3}\right)$ é solução.

$k = -1 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3} - \pi\ ,\ \frac{\pi}{3} - \pi\right) = \left(-\frac{4\pi}{3}\ ,-\frac{2\pi}{3}\right) \subset [-2\pi\ ,2\pi] \Rightarrow \left(-\frac{4\pi}{3}\ ,-\frac{2\pi}{3}\right)$ é solução.

$k = 2 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \left(\frac{5\pi}{3}\ ,\ \frac{7\pi}{3}\right) \not\subset [-2\pi\ ,2\pi]$, mas como $\frac{5\pi}{3} < 2\pi < \frac{7\pi}{3}$, concluímos que $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] \subset [-2\pi\ ,2\pi]$, logo $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ é solução.

$k = -2 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{3} - 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = \left(-\frac{7\pi}{3}\ ,-\frac{5\pi}{3}\right) \not\subset [-2\pi\ ,2\pi]$, mas como $-\frac{7\pi}{3} < -2\pi < -\frac{5\pi}{3}$, concluímos que $\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right) \subset [-2\pi, 2\pi]$, logo $\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right)$ é solução.

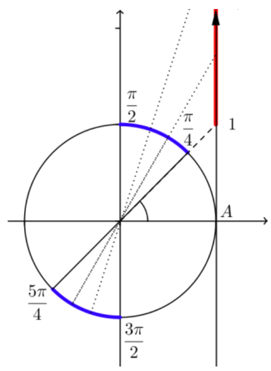
Solução final: $\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

---

c) $\tan x \geq 1$, $x \in [0,2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

A equação associada é $\tan x = 1$, cujas soluções nesse intervalo são $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Observando no círculo trigonométrico, podemos concluir que os valores dos ângulos x que resolvem essa inequação estão nos intervalos $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$.



---

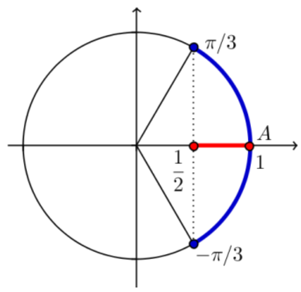
d) Determinar o domínio de $f(x) = \sec(2x)$ e resolver $1 \leq \sec(2x) \leq 2$.

Domínio de f: $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \iff x \neq \frac{\pi + 2k\pi}{4} \iff x \neq \frac{(2k+1)\pi}{4}$, onde ké inteiro.

Domínio de f: $\mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \cdots\right\}$

Temos que resolver duas equações associadas, $\sec(2x) = 1$ e $\sec(2x) = 2$, e duas inequações $\sec(2x) \geq 1$ e $\sec(2x) \leq 2$.

Mudando de variável, fazendo $\theta = 2x$, temos que resolver cada equação, $\sec(\theta) = 1$ e $\sec(\theta) = 2$, e as inequações $\sec(\theta) \geq 1$ e $\sec(\theta) \leq 2$.



$\sec(\theta) = 1 \iff \frac{1}{\cos\theta} = 1 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 2k\pi$, onde ké inteiro.

$\sec(\theta) = 2 \iff \frac{1}{\cos\theta} = 2 \iff \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
ou $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ onde ké inteiro.

<u>Observação</u>: como os ângulos $-\frac{\pi}{3}$ e $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ são congruentes,
poderíamos ter escrito a resposta acima da seguinte forma: $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ onde ké inteiro.
As duas respostas são corretas.

Resolvendo $\sec\theta \geq 1$ e $\sec\theta \leq 2$

Primeiramente observamos que $\sec\theta = 1$ para $\theta = 2k\pi$ ou $\sec\theta > 1$ para qualquer que seja o valor de θ no 1º. ou no 4º. quadrante.

Já admitindo que $\theta = 2k\pi$ ou θ no 1º. ou no 4º. quadrante vamos resolver $\sec\theta \leq 2$.

$\sec\theta \leq 2 \iff \frac{1}{\cos\theta} \leq 2 \xLeftrightarrow{\sec\theta \geq 1 > 0,\ \cos\theta > 0} \cos\theta \geq \frac{1}{2}$.

Observando no círculo trigonométrico, podemos concluir que os valores dos ângulos θ que resolvem as duas inequações estão nos intervalos:

$\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$, isto é, $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, onde ké inteiro.

<u>Observação</u>: aqui é **ERRADO** escrever $\left[\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$ **PORQUE** $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi > \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\forall k$ inteiro e o extremo esquerdo de qualquer intervalo tem que ser obrigatoriamente menor do que o extremo direito.

Voltando à variável original x, temos que:

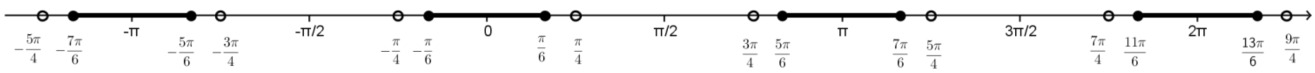
$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{2\cdot 3} + \frac{2k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2\cdot 3} + \frac{2k\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Ou seja, $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] = \cdots \cup \left[-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right] \cup \cdots$.

Verifique na reta numérica abaixo que os pontos $\cdots, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \cdots$, que estão fora do domínio também não pertencem aos intervalos acima.



Portanto, podemos concluir que $S = \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$, onde ké inteiro.

Exemplo 2 - Equações e inequações que requerem uso de identidades trigonométricas.

a) Determinar o domínio de $f(x) = \tan(\pi - 2x) + 3 \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ e resolver a equação $f(x) = 2$.

Domínio de f: para k inteiro, (i) $\pi - 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e (ii) $2x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi$.

(i) $\pi - 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \pi - \frac{\pi}{2} - k\pi \neq 2x \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} - k\pi \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

$(*)$ para $k\ inteiro$ temos que $\{k\pi\} = \{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \cdots\} = \{0, -\pi, \pi, -2\pi, 2\pi, \cdots\} = \{-k\pi\}$

(ii) $2x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Portanto, $dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R};\ \ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \tan(\pi - 2x) + 3\cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Como a função tangente tem período igual a π, temos que $\tan(\pi - 2x) = \tan(-2x)$.

Mas, $\tan(-2x) = \frac{\operatorname{sen}(-2x)}{\cos(-2x)} = \frac{-\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} = -\tan(2x)$ (*)

Sabemos que as funções tangente e cotangente tem a propriedade dos ângulos complementares, isto é, $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \tan(\theta)$, logo $\cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \tan(2x)$ (**)

Logo, $\tan(\pi - 2x) + 3\cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \overset{(*)\ e\ (**)}{\Longleftrightarrow} -\tan(2x) + 3\tan(2x) = 2 \Leftrightarrow$

$2\tan(2x) = 2 \Leftrightarrow \tan(2x) = 1$. Mudando a variável, fazendo $\theta = 2x$, temos que,

$\tan(\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$, onde k é número inteiro.

Voltando à variável original x, obtemos $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

Logo a solução é: $S = x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, onde k é número inteiro.

---

b) Resolva a equação $\tan x + \cot x = 2$.

Observe que $x \neq \frac{k\pi}{2}$, onde k é um inteiro.

$\tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \Leftrightarrow \tan^2 x + 1 = 2\tan x \Leftrightarrow$

$\tan^2 x - 2\tan x + 1 = \Leftrightarrow \tan x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \Leftrightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

---

c) Resolva a inequação $2\tan^2 x \geq \sec x - 1$ para $x \in [0,2\pi]$.

Primeiro observamos que $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$.

Usando a identidade $1+\tan^2 x = \sec^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$, podemos simplificar a inequação, escrevendo toda a inequação em termos de $\sec x$.

$$2\tan^2 x \geq \sec x - 1 \Leftrightarrow 2(\sec^2 x - 1) \geq \sec x - 1 \Leftrightarrow$$

$$2\sec^2 x - 2 - \sec x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\sec^2 x - \sec x - 1 \geq 0$$

Mudando a variável, fazendo $y = \sec x$, obtemos $2y^2 - y - 1 \geq 0$.

Resolvendo a equação associada $2y^2 - y - 1 = 0$, obtemos

$y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1\pm 3}{4}$, logo a raízes são $y_1 = \frac{4}{4} = 1$ e $y_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Analisando o sinal, o trinômio é positivo fora das raízes, ou seja,

$2y^2 - y - 1 \geq 0$ se $y \leq -\frac{1}{2}$ ou $y \geq 1$.

Voltando à variável original x, temos que:

$2\sec^2 x - \sec x - 1 \geq 0$ se e só se $\sec x \leq -\frac{1}{2}$ ou $\sec x \geq 1$.

- $\sec x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \leq -\frac{1}{2}$. Nesse caso, $\cos x < 0$.

  Assim, $\frac{1}{\cos x} \leq -\frac{1}{2} \overset{\cos x<0}{\Longleftrightarrow} 2 \geq -\cos x \Leftrightarrow -2 \leq \cos x$.

  $\cos x \geq -1 > -2$ para todo x real, logo basta determinar x tal que $\sec x < 0$, que são os mesmos onde $\cos x < 0$. Logo, $\sec x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

- $\sec x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \geq 1$. Nesse caso, $\cos x > 0$.

  Assim, $\frac{1}{\cos x} \geq 1 \overset{\cos x>0}{\Longleftrightarrow} 1 \geq \cos x > 0 \Leftrightarrow 0 < \cos x \leq 1 \Leftrightarrow$ $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$

  Logo, $\sec x \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$

  Portanto, a solução é $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Gráficos das funções tangente, secante, cotangente e cossecante.

Gráfico da tangente.

Observando os segmentos representativos da tangente no círculo trigonométrico, podemos concluir que a função **tangente é crescente no intervalo** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ainda observando no círculo trigonométrico, podemos ver que à medida que x aumenta, se aproximando do ângulo $\frac{\pi}{2}$, $\left(x < \frac{\pi}{2}\right)$, o correspondente valor da $\tan x$ aumenta ilimitadamente e o ponto $(x, \tan x)$ do gráfico da tangente, fica cada vez mais próximo da reta $x = \frac{\pi}{2}$. Quando tal situação acontece no gráfico, dizemos que a reta vertical $x = \frac{\pi}{2}$ é uma assíntota vertical do gráfico da função. Observamos que você estudará as "assíntotas" na disciplina Cálculo I.

Continuando a observar o círculo, podemos ver que à medida que x diminui, se aproximando do ângulo $-\frac{\pi}{2}$, $\left(x > -\frac{\pi}{2}\right)$, o correspondente valor da $\tan x$ diminui ilimitadamente e o ponto $(x, \tan x)$ do gráfico da tangente, fica cada vez mais próximo da reta $x = -\frac{\pi}{2}$. A reta vertical $x = -\frac{\pi}{2}$ é outra assíntota vertical do gráfico da tangente.

A **tangente tem período igual a $\boldsymbol{\pi}$**, o gráfico da tangente se repete nos intervalos $(-\pi + k\pi, \pi + k\pi)$, onde k é um número inteiro.

Veja no site os applets sobre o gráfico da tangente.

Podemos ver que qualquer valor real do eixo t do círculo trigonométrico corresponde ao valor da tangente de algum ângulo x, isso significa que a imagem da tangente é o intervalo $(-\infty, \infty)$.

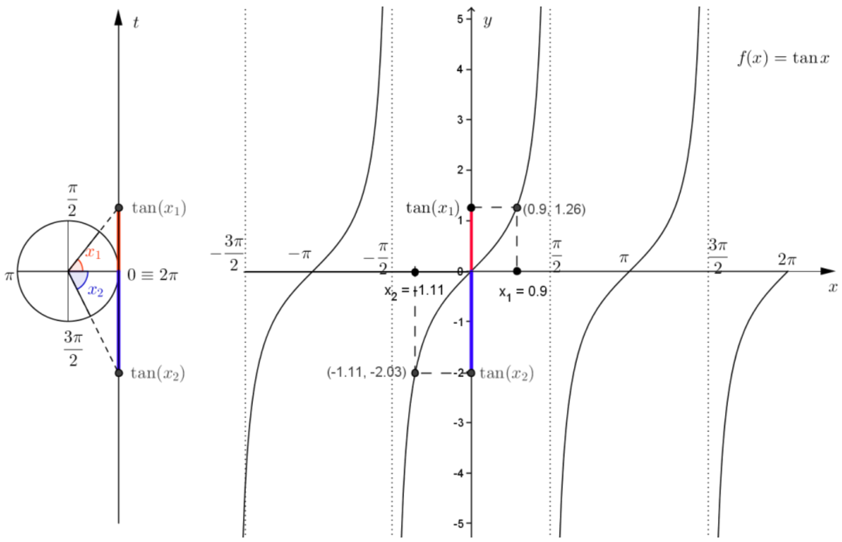


Gráfico da cotangente.

Observando os segmentos representativos da cotangente no círculo trigonométrico, podemos concluir que a função **cotangente é decrescente no intervalo $(\boldsymbol{0.\pi})$.**

Ainda observando no círculo trigonométrico, podemos ver que à medida que x diminui se aproximando do ângulo 0 $(x > 0)$, o correspondente valor de $\cot x$ aumenta ilimitadamente e o ponto $(x, \cot x)$ do gráfico da tangente fica cada vez mais próximo da reta $x = 0$. A reta vertical $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico da função.

Continuando a observar o círculo, podemos ver que à medida que x aumenta se aproximando do ângulo π $(x < \pi)$, o correspondente valor de $\cot x$ diminui ilimitadamente e o ponto $(x, \cot x)$ do gráfico da cotangente fica cada vez mais próximo da reta $x = \pi$. A reta vertical $x = \pi$ é outra assíntota vertical do gráfico da cotangente.

A **cotangente tem período $\boldsymbol{\pi}$**, o gráfico da cotangente se repete nos intervalos $(-\pi + k\pi, \pi + k\pi)$, onde k é um número inteiro. Veja no site os applets sobre o gráfico da cotangente.

Podemos ver que qualquer valor real do eixo t do círculo trigonométrico corresponde ao valor da cotangente de algum ângulo x, isso significa que a imagem da cotangente é o intervalo $(-\infty, \infty)$.

Veja no site os applets sobre o gráfico da cotangente.

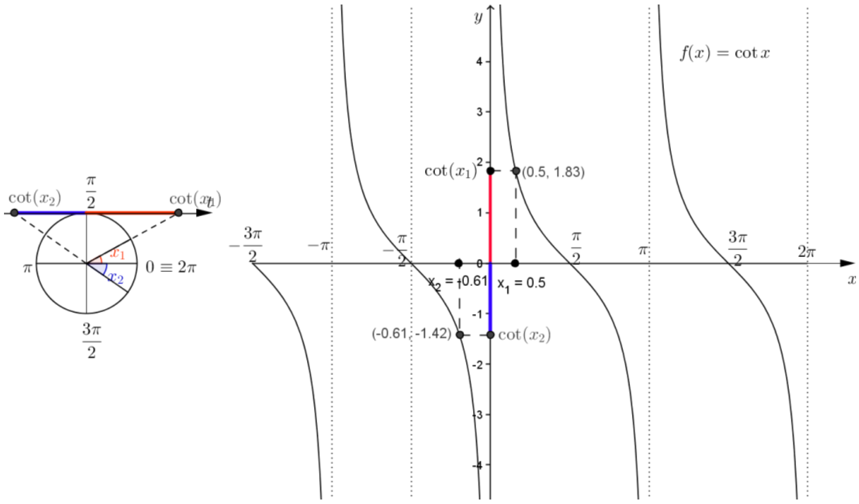
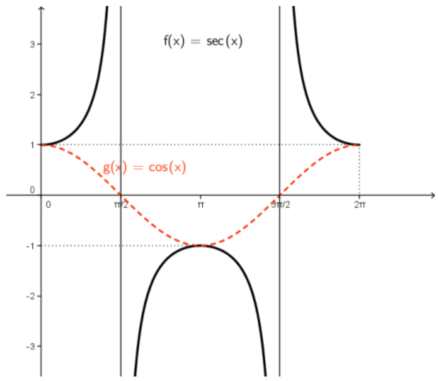


Gráfico da secante.

A construção do gráfico da secante é mais simples comparando-o com o gráfico do cosseno. Vamos esboçar primeiro o gráfico no subconjunto do domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.



- Sabemos que em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ a função cosseno é decrescente e $\cos x > 0$, isto significa que, para $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 > \cos x_2 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos x_2} > \frac{1}{\cos x_1} \;\Rightarrow$

  $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2} \Rightarrow \sec x_1 < \sec x_2$.

  Logo, a **<u>função secante é crescente em</u>** $\left[\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$.

- Sabemos que em $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$a função cosseno é decrescente e $\cos x < 0$ isto significa que, para $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 > \cos x_2 \overset{\cos x_2 < 0}{\Longrightarrow} \frac{\cos x_1}{\cos x_2} < 1 \overset{\cos x_1 < 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{\cos x_2} > \frac{1}{\cos x_1} \Rightarrow \sec x_1 < \sec x_2$.

  Logo, a **<u>função secante é crescente em</u>** $\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\pi}\right]$

- Sabemos que em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ a função cosseno é crescente e $\cos x < 0$, isto significa que,

  para $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 < \cos x_2 \overset{\cos x_2 < 0}{\Longrightarrow} \frac{\cos x_1}{\cos x_2} > 1 \overset{\cos x_1 < 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{\cos x_2} < \frac{1}{\cos x_1} \Rightarrow \sec x_1 > \sec x_2$

  Logo, a **<u>função secante é decrescente em</u>** $\left[\boldsymbol{\pi}, \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$**.**

- Sabemos que em $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ a função cosseno é crescente e $\cos x > 0$, isto significa que,

  para $x_1, x_2 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$:

$x_1 < x_2 \Longrightarrow 0 < \cos x_1 < \cos x_2 \Longrightarrow \frac{1}{\cos x_2} < \frac{1}{\cos x_1} \Longrightarrow \sec x_1 > \sec x_2$.

Logo, a **<u>função secante é decrescente em</u>** $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

A função cosseno tem duas propriedades importantes, que induzem às propriedades da função secante.

1. A função cosseno é par, pois:

seu domínio é simétrico em relação à origem 0 e $\cos(-x) = \cos x$.

Consequentemente, **<u>a função secante é par</u>**. pois

seu domínio é simétrico em relação à origem 0 e $\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$.

2. $|\cos x| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Consequentemente, $|\cos x| \leq 1 \xrightarrow{\times\,|\cos x|>0} 1 \leq \frac{1}{|\cos x|} \Longrightarrow |\sec x| \geq 1$.

Assim, $|\sec x| \geq 1$, $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, isto é, $\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$, $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k inteiro.

Para terminar de construir o gráfico vamos usar as propriedades:

- a **secante é uma função par**, isso significa que podemos refletir o gráfico no eixo y.
- a **secante tem período 2π**, isso significa que podemos repetir o gráfico nos intervalos do domínio:

  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e

  $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

  onde k é número inteiro.

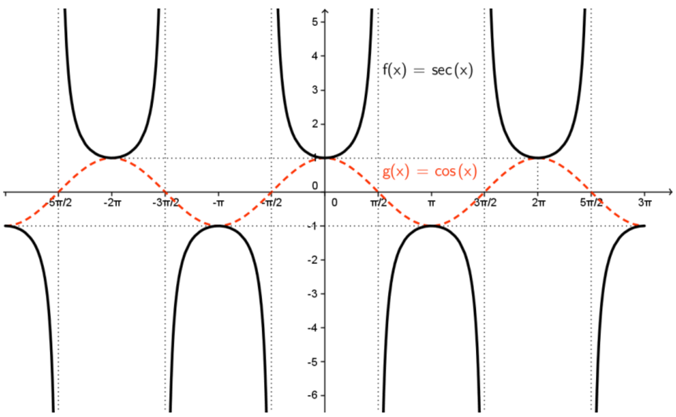


Gráfico da cossecante.

A construção do gráfico da cossecante é mais simples comparando-o com o gráfico do seno. Vamos esboçar primeiro o gráfico no subconjunto do domínio $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

- Sabemos que em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ a função seno é crescente e

  $\operatorname{sen} x > 0$, isto significa que, para $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$:

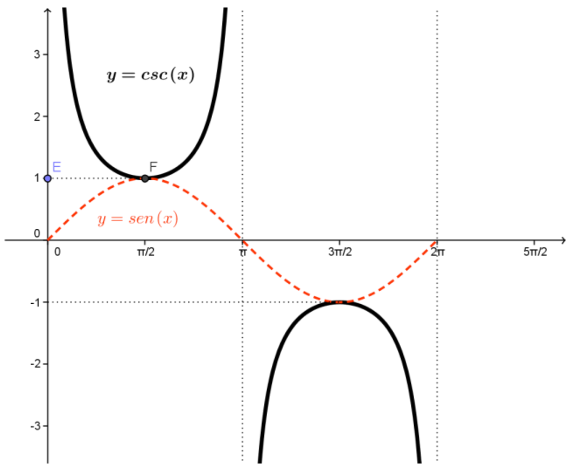
  $x_1 < x_2 \Longrightarrow 0 < \operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2 \Longrightarrow$

  $\frac{1}{\operatorname{sen} x_2} < \frac{1}{\operatorname{sen} x_1} \Longrightarrow \csc x_1 > \csc x_2$.

  Logo, a **<u>função cossecante é decrescente em</u>** $\left(\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$.

- Sabemos que em $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a função seno é decrescente e

  $\operatorname{sen} x > 0$, isto significa que, para $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$:



$x_1 < x_2 \Rightarrow \operatorname{sen} x_1 > \operatorname{sen} x_2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x_2} > \frac{1}{\operatorname{sen} x_1} \Rightarrow \csc x_1 < \csc x_2$.

Logo, a **<u>função cossecante é crescente em</u>** $\left[\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}, \boldsymbol{\pi}\right)$:

- Sabemos que em $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ a função seno é decrescente e $\operatorname{sen} x < 0$, isto significa que, para $x_1, x_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow \operatorname{sen} x_1 > \operatorname{sen} x_2 \xRightarrow{\operatorname{sen} x_2 < 0} \frac{\operatorname{sen} x_1}{\operatorname{sen} x_2} < 1 \xRightarrow{\cos x_1 < 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x_2} > \frac{1}{\operatorname{sen} x_1} \Rightarrow \csc x_1 < \csc x_2$.

  Logo, a **<u>função cossecante é crescente em</u>** $\left(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}\right]$**.**

- Sabemos que em $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ a função seno é crescente e $\operatorname{sen} x < 0$, isto significa que, para $x_1, x_2 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow \operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2 \xRightarrow{\operatorname{sen} x_2 < 0} \frac{\operatorname{sen} x_1}{\operatorname{sen} x_2} > 1 \xRightarrow{\cos x_1 < 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x_2} < \frac{1}{\operatorname{sen} x_1} \Rightarrow \csc x_1 > \csc x_2$.

  Logo, a **<u>função cossecante é decrescente em</u>** $\left[\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}, \boldsymbol{2\pi}\right)$.

A função seno tem duas propriedades importantes, que induzem às propriedades da função cossecante.

1. A função seno é ímpar, pois:

   seu domínio é simétrico em relação à origem 0 e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

   Consequentemente, a **<u>função cossecante é ímpar</u>**, pois

   seu domínio é simétrico em relação à origem 0 e $\csc(-x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\csc x$.

2. $|\operatorname{sen} x| \le 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

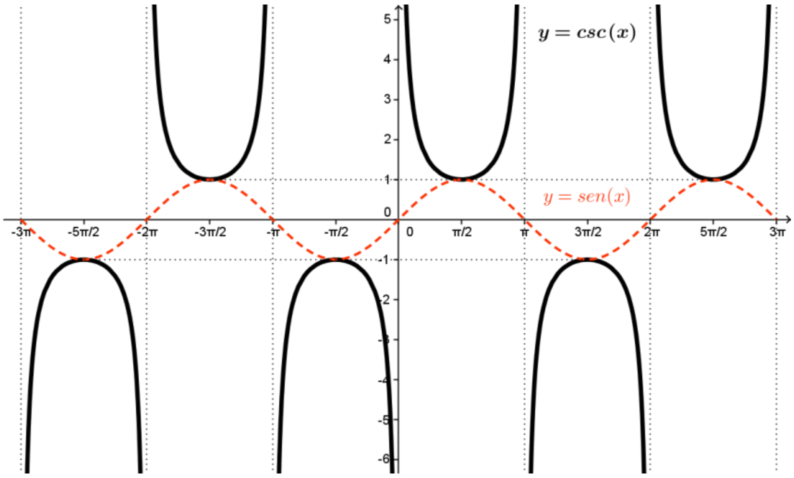
   Consequentemente, $|\operatorname{sen} x| \le 1 \xRightarrow{\times\, |\operatorname{sen} x| > 0} 1 \le \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \Rightarrow |\csc x| \ge 1$.

   Assim, $|\csc x| \ge 1$, $\forall x \ne k\pi$, isto é, $\csc x \le -1$ ou $\csc x \ge 1$, $\forall x \ne k\pi$, k inteiro.

Para terminar de construir o gráfico vamos usar as propriedades:

- a **<u>cossecante é uma função ímpar</u>**, isso significa que podemos refletir o gráfico em relação à origem (é o mesmo que refletir no eixo y, em seguida refletir no eixo x).
- a **cossecante tem período $\boldsymbol{2\pi}$**, isso significa que podemos repetir o gráfico nos intervalos do domínio:

$$(2k\pi, \pi + 2k\pi) \text{ e } (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \text{ onde } k \text{ é um inteiro.}$$


$y = csc(x)$
$y = sen(x)$
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π