PARTE III – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Funções inversas. O que isso significa? A cada valor da imagem corresponde um e só um valor do domínio da função.

Afinal, as funções trigonométricas são invertíveis? Quando nos lembramos dos domínios das funções trigonométricas, das suas propriedades e das exigências para que uma função tenha inversa, respondemos: não, as funções trigonométricas não são invertíveis em seus domínios. É possível encontrar em todas elas, pontos distintos nos seus domínios com mesma imagem. Mas, sabemos que **podemos restringir o domínio de cada uma delas de forma que em seu novo domínio, menor, a "nova" função admita inversa**. É exatamente isso que será feito com cada uma delas.

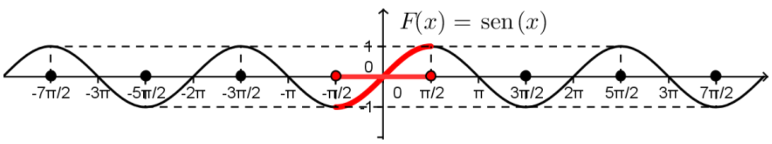
A inversa da função seno

Lembrando do gráfico e de algumas propriedades da função seno.

$F(x) = \operatorname{sen} x$

Domínio de F: $(-\infty, \infty)$

Imagem de F: $[-1,1]$



A função seno é ímpar, pois o domínio é simétrico em relação à origem e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Será que podemos restringir o domínio de F a algum subintervalo de forma que nesse intervalo a função F seja inversível? **A resposta é: SIM!**

Observando o gráfico, vemos que há vários intervalos contidos no domínio onde isso é possível. Percebemos que são intervalos onde a função F é monótona, ou seja, onde a função F é crescente ou onde a função F é decrescente. É usual chamar esses intervalos de "ramos de inversão", alguns deles são: $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Para cada um desses intervalos ou "ramos de inversão", podemos definir uma inversa da função F.

Apenas uma delas é considerada universalmente como a função inversa da função seno, é a função inversa correspondente ao intervalo ou "ramo de inversão" $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, e recebe uma notação especial, *"arcsen"* (leia-se *arco cujo seno é*). Veja no gráfico da função F o "ramo de inversão" $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e o correspondente gráfico, destacados em vermelho.

Assim, definimos:

a inversa da função $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é

a função $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$.

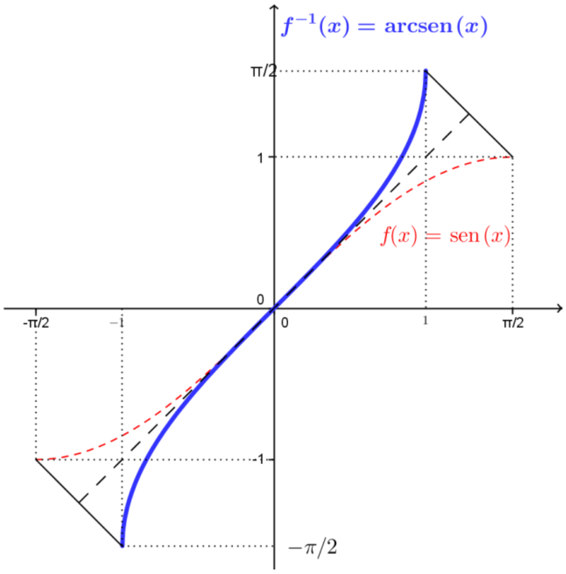
$Dom\ (f^{-1}) = Im(f) = [-1, 1]$

$Im(f^{-1}) = Dom(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Logo, $y = \text{arcsen}\, x$, é tal que:

$-1 \le x \le 1$ e $-\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}\, x \le \frac{\pi}{2}$.

O gráfico de $f^{-1}(x) = \text{arcsen}\, x$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ com relação à reta $y = x$ e está esboçado ao lado.



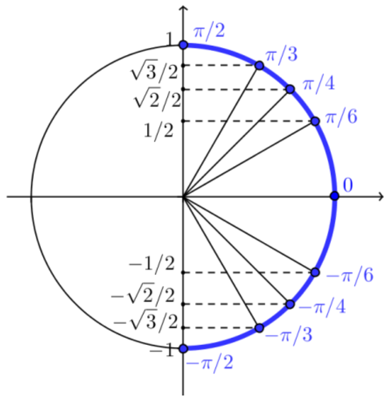
Como f e f^{-1} são inversas, sabemos que:

1. $y = \text{arcsen}\, x \iff x = \text{sen}\, y$ para $\forall x \in [-1, 1]$ e $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\text{sen}(\text{arcsen}\, x) = x$ para $\forall x \in [-1, 1]$
3. $\text{arcsen}(\text{sen}\, y) = y$ para $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Exemplo 1

1. Podemos observar no círculo trigonométrico para responder os itens abaixo.

Lembre que dado $y = \text{arcsen}\, x$, $x \in [-1, 1]$ e $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



(a) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ?$ $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$,

pois $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) $\text{arcsen}(-1) = ?$ $\text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$,

pois $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e $-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) $3\,\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

$3\,\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

Exemplo 2

Calcule, se possível.

(a) $\text{sen}(\text{arcsen}(-1/2))$ (b) $\text{arcsen}(\text{sen}(\pi/4))$ (c) $\text{arcsen}(\text{sen}(3\pi/4))$

(d) $\text{sen}(\text{arcsen}(2))$ (e) $\text{arcsen}(\text{sen}(5\pi/3))$ (f) $\text{arcsen}(\text{sen}(k\pi))$, k é inteiro.

Solução:

(a) Observando no círculo trigonométrico, vemos que $\operatorname{arcsen}(-1/2) = -\frac{\pi}{6}$

Donde, $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, ou seja, $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$.

(b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Observando no círculo trigonométrico, $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donde $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, ou seja, $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

(c) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Observando no círculo trigonométrico, $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donde $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Portanto, $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

OBSERVE que nesse caso $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \neq \frac{3\pi}{4}$. Isto acontece, porque $\frac{3\pi}{4}$ não está no intervalo de inversão escolhido para a função seno, que é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Sabemos que para calcular $\operatorname{arcsen} x$, precisamos $x \in [-1, 1]$.

Portanto, não é possível calcular $\operatorname{arcsen} 2$, pois $2 \notin [-1, 1]$.

Consequentemente, não é possível calcular $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(2))$.

(e) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donde $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Observando no círculo trigonométrico, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Portanto $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$.

OBSERVE que nesse caso $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{5\pi}{3}$. Isto acontece, pois $\frac{5\pi}{3}$ não está no intervalo de inversão escolhido para a função seno, que é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(f) $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$, para todo k inteiro.

Donde, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(k\pi)) = \operatorname{arcsen}(0)$, para todo k inteiro.

Observando no círculo trigonométrico, $\operatorname{arcsen}(0) = 0$, logo,

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(k\pi)) = \operatorname{arcsen}(0) = 0$, para todo k inteiro.

OBSERVE que nesse caso, também, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(k\pi)) \neq k\pi$, para todo k inteiro, $k \neq 0$.

Isto também acontece, porque para todo k inteiro, $k \neq 0$, $k\pi$ não está no intervalo de inversão escolhido para a função seno, que é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo 3 Vamos verificar que a função $\boldsymbol{f(x) = \operatorname{arcsen} x}$ **é uma função ímpar**.

Solução:

A primeira condição está satisfeita, pois sabemos que $Dom(f) = [-1, 1]$ é simétrico em relação à origem.

Agora precisamos verificar se $f(-x) = -f(x)$, ou seja se $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen}(x)$, para $\forall \ x \in [-1, 1]$.

Vamos lembrar inicialmente, que se $-1 \le x \le 1$, então $-1 \le -x \le 1$ e também que se $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, então $-\frac{\pi}{2} \le -y \le \frac{\pi}{2}$

Verificando: $y = \operatorname{arcsen}(-x) \implies \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-x)) \implies \operatorname{sen} y = -x \implies -\operatorname{sen} y = x$

$$\xRightarrow{a\ função\ seno\ é\ ímpar:\ -\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(-y)} \quad \operatorname{sen}(-y) = x \quad \implies \quad \operatorname{arcsen}\,(\operatorname{sen}(-y)) = \operatorname{arcsen} x$$

$$\xRightarrow{-\frac{\pi}{2} \le -y \le \frac{\pi}{2},\ \ \operatorname{arcsen}\,(\operatorname{sen}(-y)) = -y} \quad -y = \operatorname{arcsen} x \quad \implies \quad y = -\operatorname{arcsen} x$$

Assim verificamos que $y = \operatorname{arcsen}(-x) \implies y = -\operatorname{arcsen} x$. Portanto: $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x$.

Exemplo 4 Resolva a equação $\operatorname{arcsen}(2x - 7) = \frac{\pi}{6}$.

Solução: $\operatorname{arcsen}(2x - 7) = \frac{\pi}{6} \iff -1 \le 2x - 7 \le 1$ e $2x - 7 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Temos que:

$-1 \le 2x - 7 \le 1 \iff 6 \le 2x \le 8 \iff 3 \le x \le 4$ e

$2x - 7 = \frac{1}{2} \iff 2x = \frac{1}{2} + 7 \iff 2x = \frac{15}{2} \iff x = \frac{15}{4}$.

Como $3 \le \frac{15}{4} \le 4$, então $x = \frac{15}{4}$ é a solução da equação dada.

Exemplo 5 Esboçar o gráfico de $f(x) = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right)$, determinar o domínio e a imagem da função f.

Atenção: se você ainda não está estudando Cálculo I-A, não é preciso estudar esse exemplo, será útil voltar aqui quando estiver estudando Cálculo I-A.

Solução:

Uma possível sequência de transformações sobre o gráfico da função elementar $y = \operatorname{arcsen} x$ até obter o gráfico de f é:

$$y = \operatorname{arcsen} x \xrightarrow{(1)} y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) \xrightarrow{(2)} y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{3}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{(3)}$$

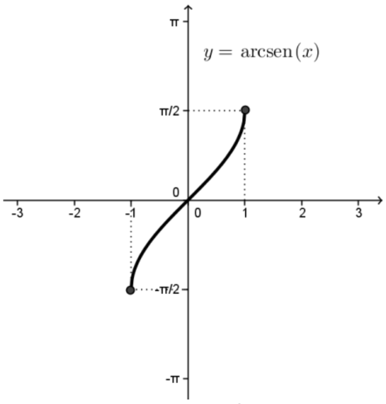
$$\xrightarrow{(3)} \mathrm{y} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{-x}{3}+\frac{1}{3}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right) \xrightarrow{(4)} \mathrm{y} = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right)$$

(1) Como $\frac{1}{3} < 1$, o gráfico de $\mathrm{y} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)$ é uma ampliação horizontal do gráfico de $y = \operatorname{arcsen}(x)$, por fator multiplicativo 3.

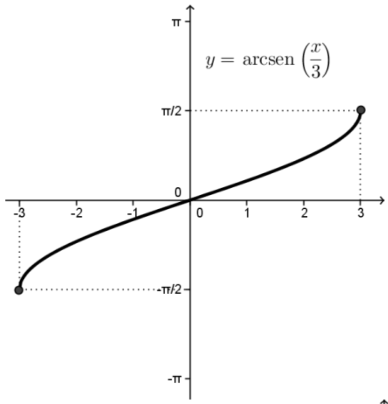
(2) O gráfico de $\mathrm{y} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{3}\right)$ é uma translação horizontal do gráfico de $\mathrm{y} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)$, de 1 unidade para esquerda.

(3) O gráfico de $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{-x}{3}+\frac{1}{3}\right)$ é uma reflexão no eixo y do gráfico de $\mathrm{y} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)$.

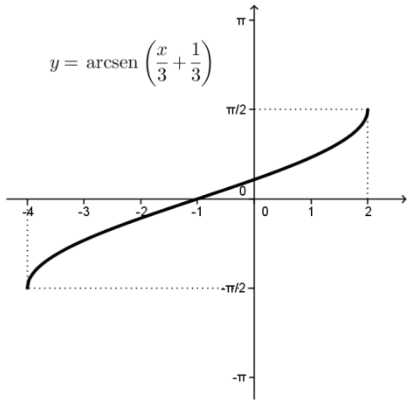
(4) Como $2 > 1$, o gráfico de $\mathrm{y} = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right)$ é uma ampliação vertical do gráfico de $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right)$, por fator multiplicativo 2.



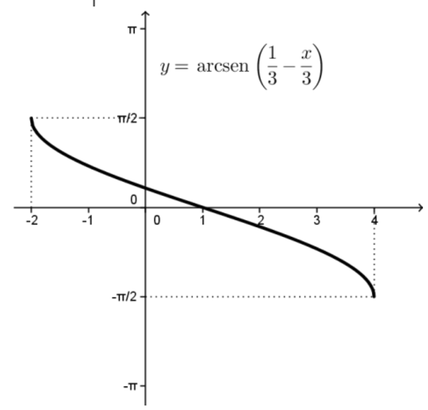
$\xrightarrow{(1)}$



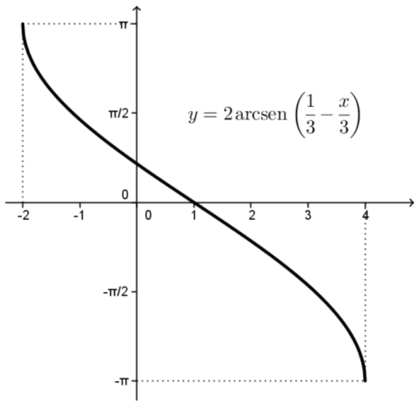
$\xrightarrow{(2)}$



$\xrightarrow{(3)}$



$\xrightarrow{(4)}$



Determinação do domínio:

No domínio de $y = \operatorname{arcsen} x$, $x \in [-1, 1]$, isso significa que $-1 \leq x \leq 1$.

No domínio de $y = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right) \in [-1, 1]$, isso significa que $-1 \leq \frac{1}{3}-\frac{x}{3} \leq 1$.

Resolvendo a inequação na variável x,

$$-1 \leq \frac{1}{3}-\frac{x}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -1-\frac{1}{3} \leq -\frac{x}{3} \leq 1-\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq -\frac{x}{3} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -4 \leq -x \leq 2 \Leftrightarrow 4 \geq x \geq -2$$

Portanto, o domínio da função f é:

$Dom\ (f) = \{\, x\ \in \mathbb{R}\,;\ -2 \leq x \leq 4\,\}$. Em forma de intervalo: $Dom\ (f) == [-2, 4]$.
Na imagem de $y = \operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arcsen} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, isso significa que $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen} x\ \leq \frac{\pi}{2}$.

Na imagem de $y = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right) \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -2 \cdot \frac{\pi}{2} \leq 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right) \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow -\pi \leq 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right) \leq \pi.$

Portanto $-\pi \leq f(x) \leq \pi$. Em forma de intervalo, $Im\ (f) = [-\pi, \pi]$.

OBSERVAÇÃO: também poderíamos ter visto diretamente no gráfico que $Dom\ (f) = [-2, 4]$ e $Im\ (f) = [-\pi, \pi]$.

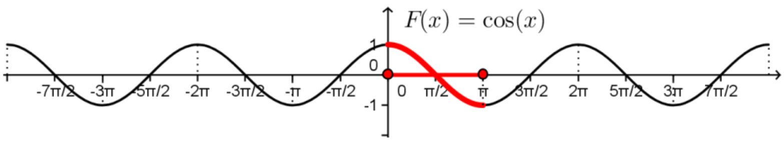
A inversa da função cosseno

Lembrando do gráfico e algumas propriedades da função cosseno:

$F(x) = \cos x$

Domínio de F: $(-\infty, \infty)$

Imagem de F: $[-1,1]$



A função cosseno é par, pois o domínio é simétrico em relação à origem e $\cos(-x) = \cos(x)$.

Será que podemos restringir o domínio de F a algum subintervalo de forma que nesse intervalo a função F seja inversível? **A resposta é: SIM!**

Observando o gráfico, vemos que há vários intervalos contidos no domínio onde isso é possível. Percebemos que são intervalos onde a função F é monótona, ou seja, onde a função F é crescente ou onde a função F é decrescente. É usual chamar esses intervalos de "ramos de inversão", alguns deles são: $[-3\pi, -2\pi]$; $[-2\pi, -\pi]$; $[-\pi, 0]$; $[0, \pi]$; $[\pi, 2\pi]$.

Para cada um desses intervalos ou "ramos de inversão", podemos definir uma inversa da função F.

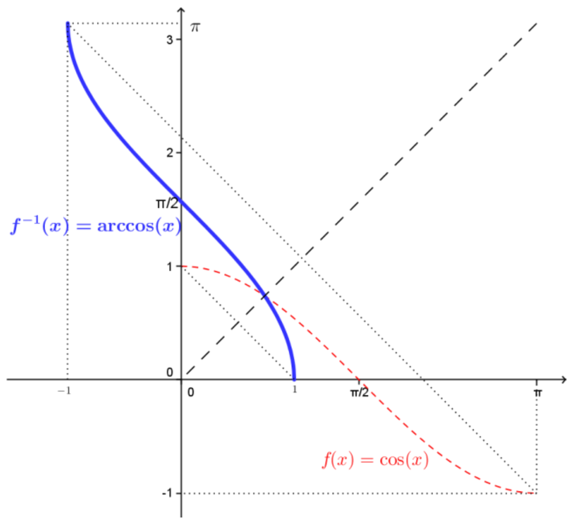
Apenas uma delas é considerada universalmente como a função inversa da função cosseno, é a função inversa correspondente ao intervalo ou "ramo de inversão" $[0, \pi]$, e recebe uma notação especial, *"arccos"* (leia-se *arco cujo cosseno é*). Veja no gráfico da função F o "ramo de inversão" $[0, \pi]$ e o correspondente gráfico, destacados em vermelho.

Assim, definimos:

a inversa da função $f(x) = \arccos(x)$ para $x \in\ [0, \pi]$ é a função $f^{-1}(x) = \arccos(x)$.

$Dom\ (f^{-1}) = Im(f) = [-1, 1]$

$Im(f^{-1}) = Dom(f) = [0, \pi]$



Logo, $y = \arccos x$, é tal que:

$-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq \arccos x \leq \pi$.

O gráfico de $f^{-1}(x) = \arccos x$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = \cos x$, com relação à reta $y = x$ e está esboçado ao lado.

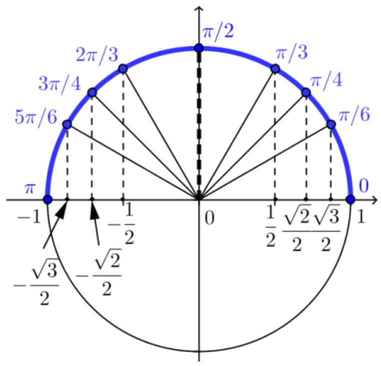
Como f e f^{-1} são inversas uma da outra, sabemos que:

1. $y = \arccos x \iff x = \cos y$ para $\forall\, x \in [-1, 1]$ e $\forall\, y \in [0, \pi]$
2. $\cos(\arccos x) = x$ para $\forall\, x \in [-1, 1]$
3. $\arccos(\cos y) = y$ para $\forall\, y \in [0, \pi]$

<u>Exemplo 1</u>

Podemos observar no círculo trigonométrico para responder os itens abaixo.

Lembre que dado $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$ e $y \in [0, \pi]$.



(a) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$ $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$,

pois $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$.

(b) $\arccos(-1) = ?$ $\arccos(-1) = \pi$,

pois $\cos(\pi) = -1$ e $\pi \in [0, \pi]$.

(c) $5 \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = ?$

$5 \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

Exemplo 2

Calcule, se possível.

(a) $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ (b) $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ (c) $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

(d) $\cos(\arccos(-3))$ (e) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)$, k é inteiro.

(f) $\operatorname{sen}\left(arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ (g) $\operatorname{arcsen}\left(\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right)$

<u>Solução</u>:

(a) Observando no círculo trigonométrico, vemos que $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Donde, $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, ou seja, $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

(b) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, Logo $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Observando no círculo trigonométrico, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Donde $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, ou seja, $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$.

(c) $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

OBSERVE que nesse caso $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \neq \frac{3\pi}{2}$.

Isto acontece porque $\frac{3\pi}{2}$ não está no intervalo de inversão escolhido para a função cosseno, que é $[0, \pi]$.

(d) Sabemos que para calcular $\arccos x$, precisamos $x \in [-1, 1]$.

Portanto, não é possível calcular $\mathbf{arccos}\ \mathbf{-3}$, pois $-3 \notin [-1, 1]$.

Consequentemente não é possível calcular $\cos(\arccos(-3))$.

(e) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Portanto $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

OBSERVE que nesse caso $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) \neq -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Isto acontece porque para todo k inteiro, $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ não está no intervalo de inversão escolhido para a função seno, que é $[0, \pi]$.

(f) $\operatorname{sen}\left(arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(g) $\operatorname{arcsen}\left(\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\cos\left(\frac{18\pi+2\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{arcsen}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ pois $\operatorname{arcsen} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo 3 Vamos verificar que a função $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{arccos}\, x}$ **não é uma função par, nem função ímpar.**

Solução:

A primeira condição está satisfeita, pois sabemos que $Dom(f) = [-1, 1]$ é simétrico em relação à origem.

A segunda condição não está satisfeita porque o gráfico dessa função não é simétrico em relação ao eixo y, nem em relação à origem.

Exemplo 4 Se $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$, calcule:

(a) $\operatorname{sen}(\theta)$ (b) $\tan(\theta)$ (b) $\sec(\theta)$

Solução:

(a) $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, isto é, θ é um ângulo do 2º. quadrante.

Da relação $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1\ e\ \cos\theta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{25} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$.

$\Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{24}{25} \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Como θ é um ângulo do 2º. quadrante, $\operatorname{sen}\theta > 0$ e concluímos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

(b) De (a) $\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}.$

(c) De (a) $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{1}{5}} = -5.$

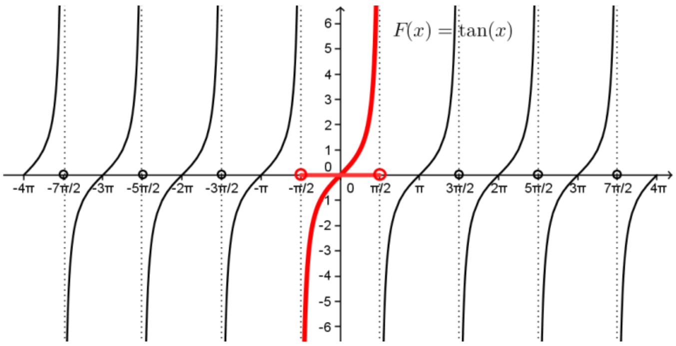
A inversa da função tangente

Lembrando do gráfico e algumas propriedades da função tangente.

$F(x) = \tan x$

Domínio de F: $(-\infty,\infty) - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem de F: $(-\infty,\infty)$



A função tangente é ímpar, pois o domínio é simétrico em relação à origem e $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Será que podemos restringir o domínio de F a algum subintervalo de forma que nesse intervalo a função F seja inversível? **A resposta é: SIM!**

Observando o gráfico, vemos que há vários intervalos onde a função F é inversível. Percebemos que todos os intervalos para os quais a função F está definida são do tipo $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, e a função é crescente em todos eles. Assim, temos vários intervalos, ou "ramos de inversão", alguns deles são: $\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para cada um desses intervalos ou "ramos de inversão", podemos definir uma inversa da função F.

Apenas uma delas é considerada universalmente como a função inversa da função tangente, é a função inversa correspondente ao intervalo ou "ramo de inversão" $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, e recebe uma notação especial, *"arctan"* (leia-se *arco cuja tangente é*). Veja no gráfico da função F o "ramo de inversão" $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e o correspondente gráfico, destacados em vermelho.

Assim, definimos:

a inversa da função $f(x) = \tan(x)$ para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é a função $f^{-1}(x) = \arctan(x)$.

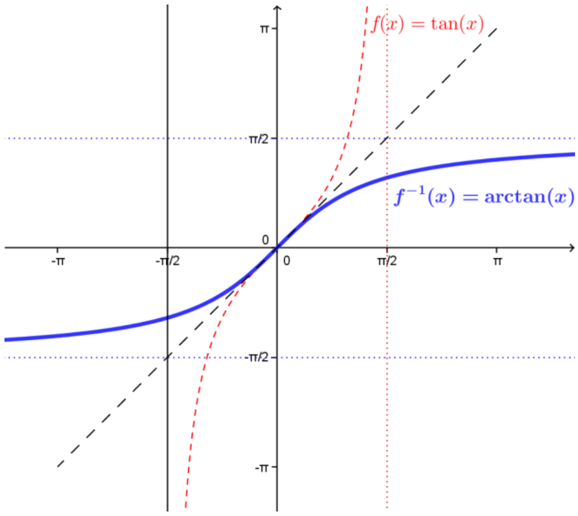
$Dom\,(f^{-1}) = Im(f) = (-\infty, \infty)$

$Im(f^{-1}) = Dom(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Logo, $y = \arctan x$, é tal que:

$-\infty \le x \le \infty$ e $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

O gráfico de $f^{-1}(x) = \arctan x$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = \tan x$ com relação à reta $y = x$ e está esboçado ao lado.



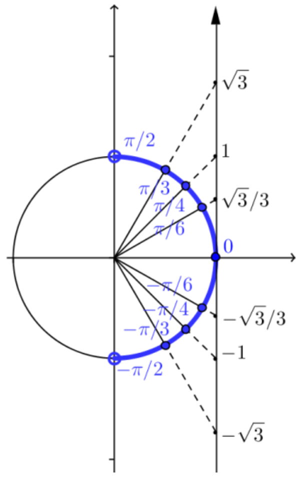
Como f e f^{-1} são inversas, sabemos que:

4. $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$ $\quad \forall x \in (-\infty, \infty)$ e $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
5. $\tan(\arctan x) = x$ $\quad \forall x \in (-\infty, \infty)$.
6. $\arctan(\tan y) = y$ se e só se $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo 1

2. Podemos observar no círculo trigonométrico para responder.

Lembre que dado $y = \arctan x$, $x \in (-\infty, \infty)$ e $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



(a) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = ?$ $\quad \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$,

pois $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) $\arctan(-1) = ?$ $\quad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$,

pois $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ e $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) $\arctan(-\sqrt{3}) - 2\arctan(1) + \frac{1}{5}\arctan 0 = ?$

$\arctan(-\sqrt{3}) - 2\arctan(1) + \frac{1}{5}\arctan 0 = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6}$

Exemplo 2

Calcule, se possível.

(a) $\tan\left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ (b) $\arctan(\tan(-\pi/4))$ (c) $\arctan(\tan(3\pi/4))$

(d) $\tan(\arctan(100))$ (e) $\tan(\text{arcsen}(1))$ (f) $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{18} + k\pi\right)\right)$, k é inteiro.

<u>Solução</u>:

(a) $\tan\left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, pois $\tan(\arctan x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$, pois $\arctan(\tan x) = x$ se e só se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \neq \frac{3\pi}{4}$, pois $\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nesse caso precisamos calcular $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Como o período da tangente é π, $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Portanto, $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(d) $\tan(\arctan(100)) = 100$, pois $\tan(\arctan x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) $\tan(\text{arcsen}(1)) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Mas, $\tan x$ não está definida em $x = \frac{\pi}{2}$, logo não é possível calcular $\tan(\text{arcsen}(1))$.

(f) $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{18} + k\pi\right)\right) \neq \frac{\pi}{18} + k\pi$ se $k \neq 0$, pois nesse caso $\frac{\pi}{18} + k\pi \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Nesse caso precisamos simplificar $\tan\left(\frac{\pi}{18} + k\pi\right)$.

Como o período da tangente é π, $\tan\left(\frac{\pi}{18} + k\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{18}\right)$. Logo,

$\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{18} + k\pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{18}\right)\right) = \frac{\pi}{18}$, pois $\arctan(\tan x) = x$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\frac{\pi}{18} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo 3 Vamos verificar que a função $\boldsymbol{f(x) = \arctan x}$ **é uma função ímpar**.

Solução:

A primeira condição está satisfeita, pois sabemos que o $Dom(f) = (-\infty, \infty)$ é simétrico em relação à origem.

Será que $f(-x) = -f(x)$?

Para responder é preciso verificar se $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Vamos lembrar inicialmente, que se $-\infty < x < \infty$, então $-\infty < -x < \infty$ e também que

se $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, então $-\frac{\pi}{2} < -y < \frac{\pi}{2}$

Verificando: $y = \arctan(-x) \Longrightarrow \tan y = \tan(\arctan(-x)) \Longrightarrow \tan y = -x \Longrightarrow -\tan y = x$

$\xRightarrow{a\ função\ tangente\ \text{é}\ ímpar:\ -\tan y = \tan(-y)} \quad \tan(-y) = x \quad \Longrightarrow \quad \arctan(\tan(-y)) = \arctan x$

$\xRightarrow{-\frac{\pi}{2}<-y<\frac{\pi}{2}} \; -y = \arctan x \quad \Longrightarrow \quad y = -\arctan x.$

Assim verificamos que $y = \arctan(-x) \Longrightarrow y = -\arctan x$

Portanto: $\arctan(-x) = -\arctan x.$ Isso significa que de fato a função é ímpar.

Exemplo 4 Resolva a equação $\arctan(2x^2 - x^3) = \frac{\pi}{4}$.

Solução: $\arctan(2x^2 - x^3) = \frac{\pi}{4} \iff 2x^2 - x^3 = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \iff 2x^2 - x^3 = 1 \iff$ $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

As possíveis raízes racionais dessa equação polinomial são 1 e -1. Substituindo 1 na equação, $1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, logo $x = 1$ é uma raiz. Dividindo $x^3 - 2x^2 + 1$ por $x - 1$, encontramos $x^2 - x - 1$, logo

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \iff$$

$$(x-1)(x^2 - x - 1) = 0 \iff$$

$$(x-1) = 0 \text{ ou } (x^2 - x - 1) = 0 \iff$$

Resolvendo a equação $(x^2 - x - 1) = 0$, $x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Portanto a solução da equação é $S = \left\{1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Exemplo 5 Esboçar o gráfico de $f(x) = 2\arctan(x+1)$, determinar o domínio e a imagem da função f.

Atenção: se você ainda não está estudando Cálculo I-A, não é preciso estudar esse exemplo, será útil voltar aqui quando estiver estudando Cálculo I-A.

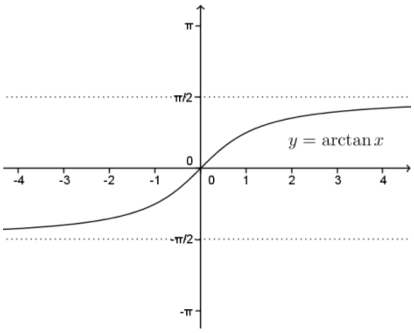
Solução:

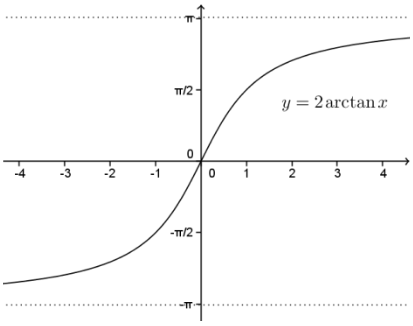
Uma possível sequência de transformações sobre o gráfico da função elementar $y = \arctan x$ até obter o gráfico de f é:

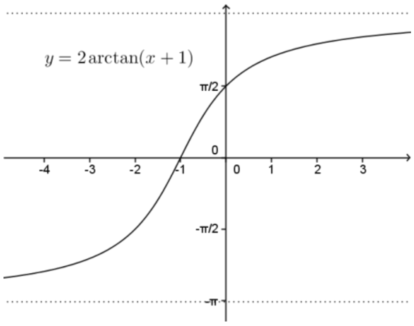
$$y = \arctan x \xrightarrow{(1)} y = 2\arctan x \xrightarrow{(2)} y = 2\arctan(x+1)$$

(5) Como $2 > 1$, o gráfico de $y = 2\arctan x$ é uma ampliação vertical do gráfico de $y = \arctan x$, por fator multiplicativo 2.

(6) O gráfico de $y = 2\arctan(x+1)$ é uma translação horizontal do gráfico de $y = 2\arctan x$, de 1 unidade para esquerda.







Pelo gráfico observamos que $Dom\ (f) = (-\infty, \infty)$ e $Im\ (f) = (-\pi\ ,\pi)$.

Determinação do domínio:

No domínio de $y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$,

No domínio de $y = 2\arctan(x+1)$, não há restrição para $x + 1$.

Portanto, $Dom\ (f) = \{\ x\ \in \mathbb{R}\ \} = \mathbb{R}$, em forma de intervalo, $Dom\ (f) = (-\infty, \infty)$.

Na imagem de $y = \arctan x$, $\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, isso significa que $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \implies -\frac{2\pi}{2} < 2\arctan x < \frac{2\pi}{2} \implies -\pi < 2\arctan x < \pi \implies -\pi < 2\arctan(x+1) < \pi$.

Portanto $-\pi < f(x) < \pi$. Em forma de intervalo, $Im\ (f) = (-\pi\ ,\pi)$.

A inversa da função cotangente

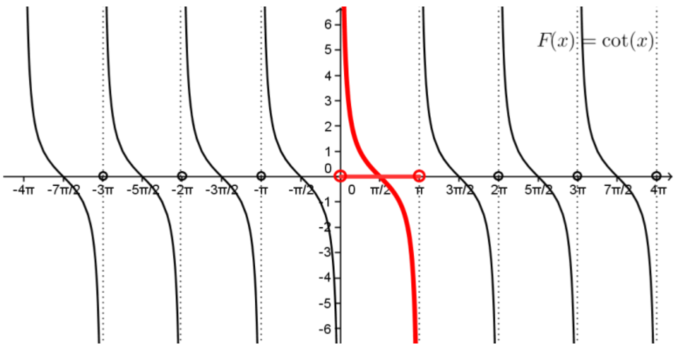
Lembrando do gráfico e algumas propriedades da função cotangente:

$F(x) = \cot x$

Domínio de F: $(-\infty, \infty) - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Imagem de F: $(-\infty, \infty)$

A função cotangente é ímpar, pois o domínio é simétrico em relação à origem e $\cot(-x) = \cot(x)$.

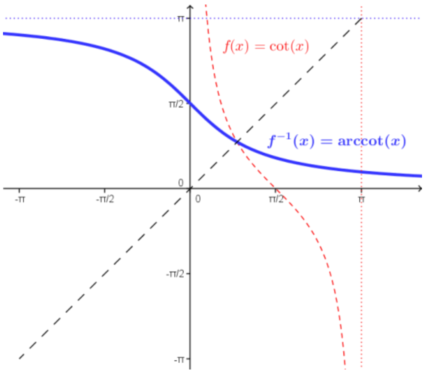


Será que podemos restringir o domínio de F a algum subintervalo de forma que nesse intervalo a função F seja inversível? **A resposta é: SIM!**

Observando o gráfico, vemos que há vários intervalos onde a função F é inversível. Percebemos que todos os intervalos para os quais a função F está definida são do tipo $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, e a função é decrescente em todos eles. Assim, temos vários intervalos, ou "ramos de inversão", alguns deles são: $(-2\pi, -\pi)$; $(-\pi, 0)$; $(0, \pi)$; $(\pi, 2\pi)$.

Para cada um desses intervalos ou "ramos de inversão", podemos definir uma inversa da função F.

Apenas uma delas é considerada universalmente como a função inversa da função cotangente, é a função inversa correspondente ao intervalo ou "ramo de inversão" $(0,\pi)$, e recebe uma notação especial, *"arccot"* (leia-se *arco cuja cotangente é*). Veja no gráfico da função F o "ramo de inversão" $(0,\pi)$ e o correspondente gráfico, destacados em vermelho.



Assim, definimos:
a inversa da função $f(x) = \cot(x)$ para $x \in (0,\pi)$

é a função $\quad f^{-1}(x) = \text{arccot}(x)$.

$Dom\ (f^{-1}) = Im(f) = (-\infty, \infty)$

$Im(f^{-1}) = Dom(f) = (0,\pi)$

Logo, $\ y = \text{arccot}\, x$, é tal que:

$-\infty < x < \infty \quad$ e $\quad 0 \leq \text{arccot}\, x \leq \pi$.

O gráfico de $f^{-1}(x) = \text{arccot}\, x$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = \cot x$, com relação à reta $y = x$ e está esboçado ao lado.

Como f e f^{-1} são inversas uma da outra, sabemos que:

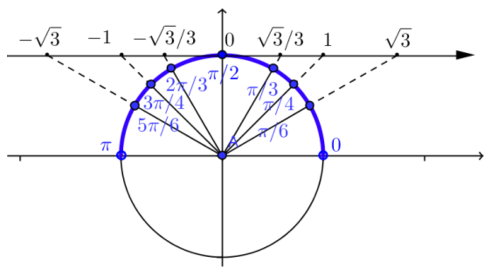
4. $y = \text{arccot}\, x \iff x = \cot y \qquad \forall\, x \in (-\infty, \infty) \quad$ e $\quad \forall\, y \in (0,\pi)$
5. $\cot(\text{arccot}\, x) = x \qquad \forall\, x \in (-\infty, \infty)$
6. $\text{arccot}(\cot y) = y \qquad$ se e só se $\quad y \in (0,\pi)$

Exemplo 1

Podemos observar no círculo trigonométrico para responder.

Lembre que dado $y = \text{arccot}\, x$,

$x \in (-\infty, \infty)$ e $y \in (0, \pi)$.



(a) $\text{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = ?$ $\text{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$,

pois $\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\pi}{3} \in (0, \pi)$.

(b) $\text{arccot}(-1) = ?$ $\text{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$,

pois $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ e $\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$.

(c) $2\,\text{arccot}(\sqrt{3}) - 3\,\text{arccot}(0) = ?$

$2\,\text{arccot}(-\sqrt{3}) - 3\text{arccot}(0) = 2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

Exemplo 2

Calcule, se possível.

(a) $\cot\left(\text{arccot}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ (b) $\text{arccot}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (c) $\text{arccot}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

(d) $\cot(\text{arccot}(100))$ (e) $\tan(\text{arccot}(100))$ (f) $\text{arccot}\left(\cot\left(\frac{7\pi}{12} + k\pi\right)\right)$, k é inteiro.

<u>Solução</u>:

(a) $\cot\left(\text{arccot}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, pois $\cot(\text{arccot}\, x) = x$ $\forall\, x \in (-\infty, \infty)$

(b) $\text{arccot}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \neq -\frac{\pi}{4}$, pois $\text{arccot}(\cot y) = y$ se e só se $y \in (0, \pi)$ e $-\frac{\pi}{4} \notin (0, \pi)$

Nesse caso, precisamos calcular $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, ou seja,

$\text{arccot}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \text{arccot}\left(\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$, pois $\text{arccot}(\cot y) = y$ se e só se $y \in (0, \pi)$ e $\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$.

(c) $\text{arccot}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \text{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

(d) $\cot(\text{arccot}(100)) = 100$ pois $\cot(\text{arccot}\, x) = x$ $\forall\, x \in (-\infty, \infty)$

(e) Sabemos que $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$, $\forall \theta \neq \frac{k\pi}{2}$, logo $\tan(\text{arccot}(100)) = \frac{1}{\cot(\text{arccot}(100))} = \frac{1}{100}$, pois $\cot(\text{arccot}\, x) = x$ $\forall\, x \in (-\infty, \infty)$

(f) Como o período da cotangente é π então se k é inteiro temos que:

$\text{arccot}\left(\cot\left(\frac{7\pi}{12} + k\pi\right)\right) = \text{arccot}\left(\cot\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \frac{7\pi}{12}$

pois, $\operatorname{arccot}(\cot y) = y$ se e só se $y \in (0, \pi)$ e $\frac{7\pi}{12} \in (0, \pi)$.

Exemplo 3 Vamos verificar que a função $\boldsymbol{f(x) = \operatorname{arccot} x}$ **não é uma função par, nem ímpar.**

Solução:

A primeira condição está satisfeita, pois sabemos que $Dom(f) = (-\infty, \infty)$ é simétrico em relação à origem.

Mas observamos que o gráfico de $f(x) = \operatorname{arccot} x$ não é simétrico em relação ao eixo y, isso significa que $f(-x) \neq f(x)$, portanto não é par.

Também não é simétrico em relação à origem, logo $f(-x) \neq -f(x)$, portanto não é ímpar.

Exemplo 4 Vamos verificar que $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

Essa é uma importante propriedade, também pode ser escrita como $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.

Solução:

Sabemos que $y = \operatorname{arccot} x \iff \cot y = x \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty)$ e $\forall\, y \in (0, \pi)$.

$$\cot y = x \xRightarrow{\cot y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x \Rightarrow \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = \arctan x \qquad (*)$$

Agora, note que $y \in (0, \pi)$, ou seja,

$$0 < y < \pi \Rightarrow -\pi < -y < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \pi < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2} + 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2}$$

Logo, $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = \frac{\pi}{2} - y$, pois $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2}$. Voltando em (*).

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = \arctan x \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y = \arctan x \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Mas $y = \operatorname{arccot} x$, portanto $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ c.q.d.

OBSERVAÇÃO

Muitos programas computacionais, como, por exemplo, o GEOGEBRA, não possuem a função $f(x) = \operatorname{arccot} x$ na lista de funções. Se queremos usar a função $f(x) = \operatorname{arccot} x$ nesses programas, teremos que escrever $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Naturalmente, como já provamos a propriedade do exemplo 3, tudo vai funcionar bem.

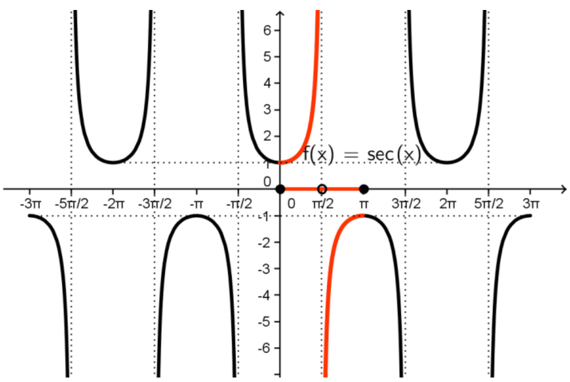
A inversa da função secante

Lembrando do gráfico e algumas propriedades da função secante.

$F(x) = \sec x$

Domínio de F: $(-\infty, \infty) - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem de F: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



A função secante é par, pois o domínio é simétrico em relação à origem e $\sec(-x) = \sec(x)$.

Será que podemos restringir o domínio de F a algum subintervalo de forma que nesse intervalo a função F seja inversível? **A resposta é: SIM!**

Observando o gráfico, vemos que há vários intervalos onde a função F é inversível. Percebemos que os intervalos para os quais a função F está definida são do tipo $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, mas em cada um desses intervalos a função não é um a um. Se queremos os maiores subconjuntos possíveis onde a função secante é um a um, há várias possibilidades, podemos considerar a união de dois intervalos, um com o gráfico da função acima da reta $y = 1$ e o outro com o gráfico da função abaixo da reta $y = -1$. Observe que os intervalos não são necessariamente consecutivos. Algumas possibilidades são:

$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para cada uma dessas uniões de dois intervalos ou "ramos de inversão", podemos definir uma inversa da função F.

Não há unanimidade na escolha da união dos intervalos para a função inversa da função secante, em alguns livros a escolha é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, em outros é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. As razões para tal divergência é que dependendo da escolha, algumas propriedades decorrentes da definição ficam mais simples com a primeira opção de escolha e outras propriedades ficam mais simples com a segunda escolha. Essas propriedades serão estudadas em Cálculo I, por enquanto não precisa se preocupar com isso. Em qualquer livro de Cálculo, se aparecer a função inversa da secante, é preciso procurar na definição qual foi a escolha do livro.

A nossa escolha é a 1ª. opção $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Assim, a função inversa será definida nos intervalos ou "ramos de inversão" $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, e recebe uma notação especial, *"arcsec"* (leia-se *arco cuja secante é*). Veja no gráfico da função F os "ramos de inversão" $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e o correspondente gráfico, destacados em vermelho.

Assim, definimos:

a inversa da função $f(x) = \sec(x)$ para

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é a função $f^{-1}(x) = \text{arcsec}(x)$.

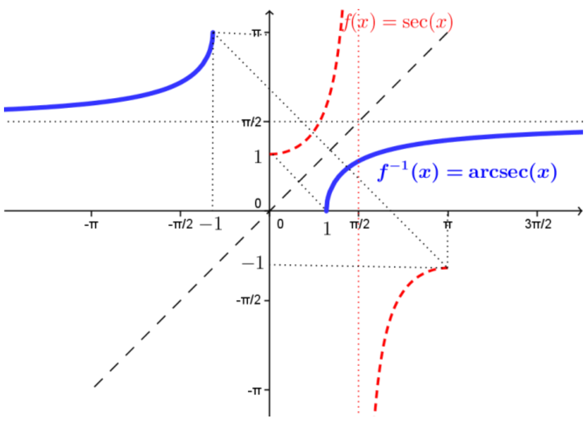
$Dom\,(f^{-1}) = Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$Im(f^{-1}) = Dom(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Logo, $y = \text{arcsec}\, x$, é tal que:

$$-\infty < x \leq -1 \quad ou \quad 1 \leq x < \infty$$

$$0 \leq \text{arcsec}\, x < \frac{\pi}{2} \quad ou \quad \frac{\pi}{2} < \text{arcsec}\, x \leq \pi$$



O gráfico de $f^{-1}(x) = \text{arcsec}\, x$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = \sec x$ com relação à reta $y = x$ e está esboçado acima.

Como f e f^{-1} são inversas, sabemos que:

(1) $y = \text{arcsec}\, x \iff x = \sec y$ $\quad\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e $\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(2) $\sec(\text{arcsec}\, x) = x$ se e só se $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

(3) $\text{arcsec}(\sec y) = y$ se e só se $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Exemplo 1: Vamos verificar que $\text{arcsec}\, x = \arccos \frac{1}{x}$ $\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Essa é uma propriedade fundamental, será usada para cálculos em ângulos notáveis e na resolução equações e inequações.

Solução:

Como sabemos, $y = \text{arcsec}\, x$ onde $(x \leq -1$ ou $x \geq 1)$ e $\left(0 \leq y < \frac{\pi}{2} \;\; ou \;\; \frac{\pi}{2} < y \leq \pi\right)$.

Durante a resolução do nosso exercício vamos precisar do **seguinte resultado**:

$$\boldsymbol{x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1}$$

De fato, usando as propriedades de ordem dos números reais:

- De $x \leq -1$ seguem as implicações:

$$x \leq -1 < 0 \;\Rightarrow\; -x \geq 1 \;\; e \;\; x < 0 \;\Rightarrow\; 0 < 1 \leq -x \;\; e \;\; x < 0 \;\Rightarrow$$
$$\frac{1}{1} \geq -\frac{1}{x} \;\; e \;\; x < 0 \;\Rightarrow\; -1 \leq \frac{1}{x} \;\; e \;\; \frac{1}{x} < 0 \;\Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x} < 0$$

- De $x \geq 1$ seguem as implicações:

$$x \geq 1 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \leq 1 \;\; e \;\; x > 0 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{x} \leq 1$$

Assim, concluímos que $x \leq -1$ ou $x \geq 1 \;\Rightarrow\; -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$

Voltando, ao exercício:

$$y = \text{arcsec}\, x \;\Rightarrow\; \sec y = \sec(\text{arcsec}\, x) \;\Rightarrow\; \sec y = x \;\xRightarrow{\sec y = \frac{1}{\cos y}}\; \frac{1}{\cos y} = x \;\Rightarrow$$

$$\cos y = \frac{1}{x} \;\xRightarrow{-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1}\; \arccos(\cos y) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \;\xRightarrow{\left(0 \leq y < \frac{\pi}{2} \;\; ou \;\; \frac{\pi}{2} < y \leq \pi\right)}\; y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Assim, $y = \text{arcsec}\, x \;\Rightarrow\; y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \;\Rightarrow\; y = \text{arcsec}\, x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ c.q.d.

Exemplo 2

Podemos observar no círculo trigonométrico do cosseno dos ângulos notáveis, para responder.

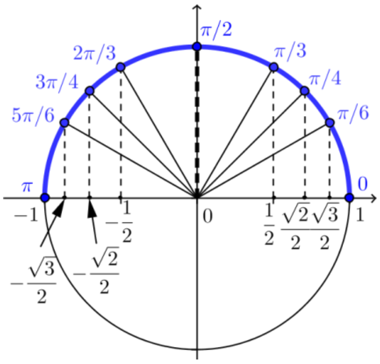
Lembre que $y = \text{arcsec } x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,

$\left(x \leq -1, \ -1 < \frac{1}{x} < 0 \ \ e \ \ \frac{\pi}{2} < y \leq \pi\right)$ ou

$\left(x \geq 1, \ \ 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \ \ e \ \ 0 \leq y < \frac{\pi}{2}\right)$,

(a) $\text{arcsec } \sqrt{2} = ?$ $\text{arcsec}\sqrt{2} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

(b) $\text{arcsec}(-1) = ?$ $\text{arcsec}(-1) = \arccos\left(\frac{1}{-1}\right) = \arccos(-1) = \pi$



Exemplo 3

Calcule, se possível.

(a) $\sec\left(\text{arcsec}\left(\sqrt{10}\right)\right)$ (b) $\text{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

(c) $\text{arcsec}\left(\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (d) $\sec(\text{arcsec}(0{,}3))$

<u>Solução</u>:

(a) $\sec\left(\text{arcsec}\left(\sqrt{10}\right)\right) = \sqrt{10}$ pois $\sqrt{10} \in [1, \infty)$ e $\sec(\text{arcsec}\, x) = x$ $\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

(b) $\text{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \neq -\frac{\pi}{3}$, pois $-\frac{\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e

$\text{arcsec}(\sec y) = y$ se e só se $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Calculando $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, a função secante é par, $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Logo, $\text{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \text{arcsec}(2) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ (observando no círculo do cosseno)

(c) $\text{arcsec}\left(\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$ pois $\frac{2\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e

$\text{arcsec}(\sec y) = y$ se e só se $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(d) Como $(0{,}3) \notin (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, não é possível calcular $\text{arcsec}(0{,}3)$, consequentemente não é possível calcular $\sec(\text{arcsec}(0{,}3))$.

Exemplo 4 Resolva a equação $\text{arcsec}(2x - \sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

Solução:

$\text{arcsec}(2x - \sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2x - \sqrt{3} = \sec\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x - \sqrt{3} = \frac{1}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow 2x - \sqrt{3} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$2x = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{-2+3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Exemplo 5 Esboçar o gráfico de $f(x) = 2\,\text{arcsec}(x + 3)$, para $x \geq -2$. Dê a imagem de f.

Atenção: se você ainda não está estudando Cálculo I-A, não é preciso estudar esse exemplo, será útil voltar aqui quando estiver estudando Cálculo I-A.

Solução:

Uma possível sequência de transformações sobre o gráfico da função elementar $y = \operatorname{arcsec} x$ até obter o gráfico de f é:

$$y = \operatorname{arcsec} x \xrightarrow{(1)} \mathrm{y} = 2 \operatorname{arcsec} x \xrightarrow{(2)} \mathrm{y} = 2 \operatorname{arcsec}(x+3)$$

(1) Como $2 > 1$, o gráfico de $\mathrm{y} = 2 \operatorname{arcsec} x$ é uma ampliação vertical do gráfico de $y = \operatorname{arcsec} x$, por fator multiplicativo 2.

(2) O gráfico de $\mathrm{y} = 2\operatorname{arcsec}(x+3)$ é uma translação horizontal do gráfico de $\mathrm{y} = 2 \operatorname{arcsec} x$, de 3 unidades para esquerda.

Foi pedido o gráfico de $f(x) = 2 \operatorname{arcsec}(x+3)$, para $x \geq -2$.

Para atender essa exigência no domínio de f, que valores do domínio da função inicial $\mathrm{y} = \operatorname{arcsec} x$ devemos considerar?

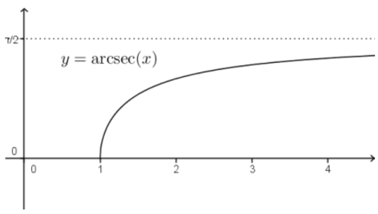
Fazendo uma mudança de variável, $t = x + 3$, em qual intervalo deve estar a variável t?

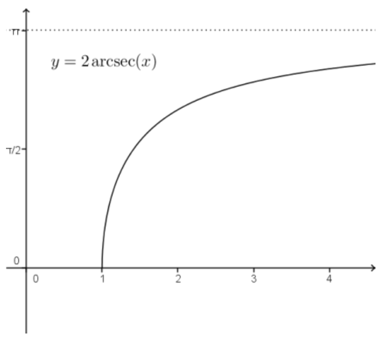
$x \geq -2 \Longrightarrow x + 3 \geq -2 + 3 \Longrightarrow x + 3 \geq 1 \Longrightarrow t \geq 1$.

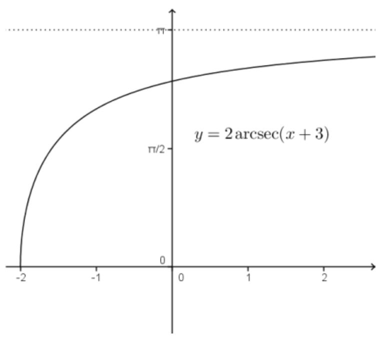
Logo, no gráfico da função $y = 2f(x+3) = 2f(t) = 2 \operatorname{arcsec} t$ temos que $t \geq 1$.

Agora, na transformação (1) não houve alteração no domínio da variável, ou seja o domínio de $y = \operatorname{arcsec} t$ é o mesmo domínio de $y = 2\operatorname{arcsec} t$, portanto o domínio a ser considerado para a variável t de

$y = \operatorname{arcsec} t$ para atender a exigência de $x \geq -2$ deverá ser $t \geq 1$.

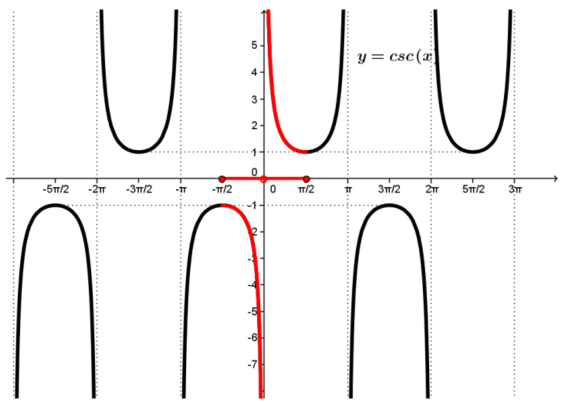






Pelo gráfico de f observamos que $Dom\,(f) = [-2, \infty)$ e $Im\,(f) = [0, \pi)$.

A inversa da função cossecante



Lembrando do gráfico e algumas propriedades da função cossecante.

$F(x) = \csc x$

Domínio de F: $(-\infty, \infty) - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Imagem de F: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

A função cossecante é ímpar, pois o domínio é simétrico em relação à origem e $\csc(-x) = -\csc(x)$.

Será que podemos restringir o domínio de F a algum subintervalo de forma que nesse intervalo a função F seja inversível? **A resposta é: SIM!**

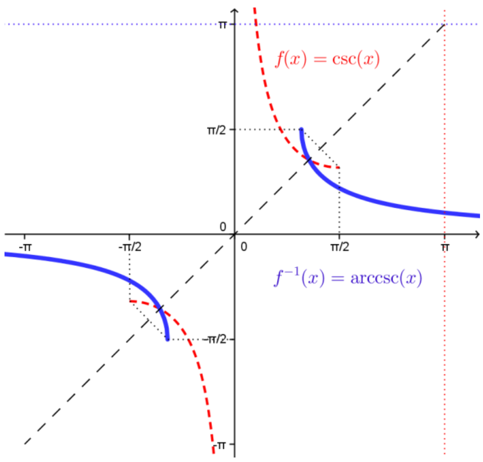
Observando o gráfico, vemos que há vários intervalos onde a função F é inversível. Percebemos que os intervalos para os quais a função F está definida são do tipo $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, mas em cada um desses intervalos a função não é um a um. Se queremos os maiores subconjuntos possíveis onde a função cossecante é um a um, há várias possibilidades, podemos considerar a união de dois intervalos, um com o gráfico da função acima da reta $y = 1$ e o outro com o gráfico da função abaixo da reta $y = -1$. Observe que os intervalos não são necessariamente consecutivos. Algumas possibilidades são:

$\left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$; $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Para cada uma dessas uniões de dois intervalos ou "ramos de inversão", podemos definir uma inversa da função F.

Apenas uma delas é considerada universalmente como a função inversa da função cossecante, é a função inversa definida na união dos intervalos ou "ramos de inversão" $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

Assim, a função inversa será definida nos intervalos ou "ramos de inversão"$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, e recebe uma notação especial, *"arccsc"* (leia-se *arco cuja cossecante é*). Veja no gráfico da função F os "ramos de inversão" $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ e o correspondente gráfico, destacados em vermelho.



Assim, definimos:

a inversa da função $f(x) = \csc(x)$ para

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ é a função

$f^{-1}(x) = \mathrm{arccsc}(x)$.

$Dom\ (f^{-1}) = Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$Im(f^{-1}) = Dom(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Logo, $y = \mathrm{arccsc}\, x$, é tal que:

$$-\infty < x \le -1 \quad ou \quad 1 \le x < \infty$$

$$\frac{\pi}{2} \le \mathrm{arccsc}\, x < 0 \quad ou \quad 0 \le \mathrm{arccsc}\, x \le \frac{\pi}{2}$$

O gráfico de $f^{-1}(x) = \mathrm{arccsc}\, x$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = \csc x$ com relação à reta $y = x$ e está esboçado acima.

Como f e f^{-1} são inversas, sabemos que:

(1) $y = \mathrm{arccsc}\, x \iff x = \csc y$ $\quad \forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
(2) $\csc(\mathrm{arccsc}\, x) = x$ se e só se $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
(3) $\mathrm{arccsc}(\csc y) = y$ se e só se $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Exemplo 1 Vamos verificar que $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arccsc}\frac{1}{x} \qquad \forall x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

Essa é uma propriedade fundamental, será usada para cálculos em ângulos notáveis e na resolução equações e inequações.

<u>Solução</u>:

Consideremos, $y = \operatorname{arccsc} x$ onde $(x \le -1$ ou $x \ge 1)$ e $\left(\frac{\pi}{2} \le y < 0 \;\; ou \;\; 0 < y \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Já foi provado anteriormente que, $x \le -1$, ou $x \ge 1 \implies -1 \le \frac{1}{x} \le 1$.

Temos as seguintes implicações;

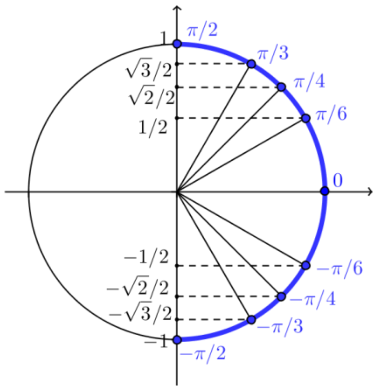
$$y = \operatorname{arccsc} x \implies \csc y = \csc(\operatorname{arccsc} x) \implies \csc y = x \xRightarrow{\csc y = \frac{1}{\operatorname{sen} y}} \frac{1}{\operatorname{sen} y} = x \implies \operatorname{sen} y = \frac{1}{x}$$

$$\xRightarrow{-1 \le \frac{1}{x} \le 1} \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) \xRightarrow{\left(\frac{\pi}{2} < y \le 0 \;\; ou \;\; 0 \le y < \pi\right)} y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Portanto, $y = \operatorname{arccsc} x \implies y = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right) \implies y = \operatorname{arccsc} x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right)$ c.q.d.

Exemplo 2

Podemos observar no círculo trigonométrico do seno dos ângulos notáveis, para responder.



Lembre que $y = \operatorname{arccsc}\; x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$,

$\left(x \le -1, \;\; -1 < \frac{1}{x} < 0 \;\; e \;\; -\frac{\pi}{2} \le y < 0\right)$) ou

$\left(x \ge 1, \;\; 0 < \frac{1}{x} \le 1 \;\; e \;\; 0 < y \le \frac{\pi}{2}\right)$,

a) $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2}) \;=?$

$\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2}) = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

(b) $\operatorname{arccsc}(1) =?$ $\quad \operatorname{arccsc}(1) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$

Exemplo 3

Calcule, se possível.

(a) $\csc(\operatorname{arccsc}(1-\sqrt{5}))$ (b) $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

(c) $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (d) $\sec(\operatorname{arccsc}(0.3))$

<u>Solução</u>:

(a) Vamos verificar se $1-\sqrt{5} < -1$.

$1-\sqrt{5} < -1 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 4 < 5$, A última desigualdade é verdadeira e todas são equivalentes, então a primeira desigualdade também é verdadeira.

$\csc(\operatorname{arccsc}(1-\sqrt{5})) = 1-\sqrt{5}$ pois $1-\sqrt{5} \in (-\infty,-1]$ e $\csc(\operatorname{arcc} x) = x \quad \forall x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$.

(b) $\text{arccsc}\left(\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$ pois $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e

$\text{arccsc}(\csc y) = y$ se e só se $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) $\text{arccsc}\left(\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ pois $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. e

$\text{arccsc}(\csc y) = y$ se e só se $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$..

Calculando $\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right) == \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} =$

Logo, $\text{arccsc}\left(\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \text{arccsc}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

(d) Como $(0,3) \notin (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, não é possível calcular $\text{arccsc}(0,3)$, consequentemente não é possível calcular $\sec(\text{arccsc}(0,3))$.