(1) a) $\dfrac{|x|}{|x-2|} < \dfrac{-2}{|x|}$

Sabemos de $|x|>0$ e $|x-2|>0$ $\forall x \neq 0$ e $x \neq 2$

Logo $\dfrac{|x|}{|x-2|} > 0$ $\forall x \neq 2$ e $x \neq 0$

$-\dfrac{2}{|x|} < 0$ $\forall x \neq 0$

Logo $-\dfrac{2}{|x|} < 0 < \dfrac{|x|}{|x-2|} \Rightarrow -\dfrac{2}{|x|} < \dfrac{|x|}{|x-2|}$ $\forall x \neq 2, x \neq 0$

que torna a afirmação ~~falsa~~ para $\forall x \in \mathbb{R}$,

isto é, $\nexists x;\ \dfrac{|x|}{|x-2|} < -\dfrac{2}{|x|}$. $x \neq 0$, $x \neq 2$

Mas para $x=2$ ou $x=0$, nenhuma das 2 está definida

(b) $x^2 < x^3$ $\forall x > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$x^2 < x^3$, $x^2 > 0 \xRightarrow{\div x^2} 1 < x \Rightarrow x > 1$

logo vamos considerar um exemplo onde $0 < x \leq 1$

$x = \frac{1}{2}$; $x^2 = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$, neste exemplo

$x^3 = \frac{1}{8}$ $x^3 < x^2$ e $x > 0$

isto é $x^2 < x^3$ é falso.

(c) p: $\exists n \in \mathbb{N}$; $n > 100$ e n é ímpar.

$\sim p$: $\forall x \in \mathbb{N}$; $n \leq 100$ ou n não é ímpar.

(obs; n não é ímpar $\Leftrightarrow$ n é par)

(d) $a^6 = b^{10} \Rightarrow a^3 = b^3$.

Falso. Contra-exemplo, $a = 1$, $b = -1$ $a^6 = 1^6 = 1$, $b^{10} = (-1)^{10} = 1$

Nesse exemplo $a^6 = b^{10}$ é verdadeira.

$a^3 = 1^3 = 1$, $b^3 = (-1)^3 = -1$ Nesse exemplo, a Tese $a^3 = b^3$ é falsa.

(e) $x^6 = x^{10} \Leftrightarrow x^{10} - x^6 = 0 \Leftrightarrow x^6(x^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x^4 - 1) = 0$ ou $x^6 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1$ ou $x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $\underbrace{x^2 = -1}_{\text{impossível}}$ ou $x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x = 0$

Logo a resposta é verdadeira.

2) (a) $$\frac{\frac{1}{x}-\frac{x}{4}}{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{4}} = \frac{\frac{4-x^2}{4x}}{\frac{16-x^4}{4x^2}} = \frac{4-x^2}{4\cancel{x}} \times \frac{4x^{\cancel{2}}}{16-x^4} = \frac{(4-x^2)\,x}{(4-x^2)(4+x^2)} = \frac{x}{x^2+4}$$

logo $$\frac{\frac{1}{x}-\frac{x}{4}}{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{x^2+4},$$ $\forall x$ não anula os denominadores.

$x \neq 0$, $16 - x^4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ e $x^4 \neq 16$

$x^4 \neq 16 \Longleftrightarrow x^2 \neq 4$ e $\underbrace{x^2 \neq -4}_{\forall x \in \mathbb{R}} \Longleftrightarrow x \neq 2$ e $x \neq -2$

Logo a identidade é verdadeira para

$\forall x;\ x \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq -2.$

(b) $\sqrt{(1-x)(x-3)(x-2)^2} = (x-2)\sqrt{x-1}\,\sqrt{3-x}$

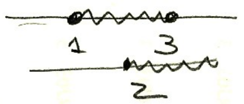
$(1-x)(x-3) = (x-1)(3-x)$, logo

$\sqrt{(1-x)(x-3)} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{3-x}$ $\forall x;\ x-1 \geq 0$ e $3-x \geq 0$

$\Longleftrightarrow x \geq 1$ e $3 \geq x \Longleftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

$\sqrt{(x-2)^2} = x-2$ $\forall x;\ x-2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 2$

Assim



A identidade é verdadeira para $\boxed{2 \leq x \leq 3}$

(3) $|x-1| + |x-3| = 2\sqrt{2x-4}$

	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$\|x-1\|$	$-x+1$	0	$x-1$	2	$x-1$
$\|x-3\|$	$-x+3$	2	$-x+3$	0	$x-3$
$\|x-1\|+\|x-3\|$	$-2x+4$	2	2	2	$2x-4$

Solução:

$x = 5/2$

$x = 4$

$x<1$: $-2x+4 = 2\sqrt{2x-4}$, impossível

como precisamos $2x-4 \geq 0$ e $-2x+4 \geq 0$,

só é possível se $2x-4 = -2x+4 = 0 \Longleftrightarrow x = 2 > 1$

$1 \leq x \leq 2$: $2\sqrt{2x-4} = 2$

$\Longleftrightarrow \sqrt{2x-4} = 1 \Longleftrightarrow$

$2x-4 = 1$

$2x = 5$

$\boxed{x = \frac{5}{2}}$ é solução mais $1 < \frac{5}{2} < 3$

$x > 2$: $2x-4 = 2\sqrt{2x-4} \Longleftrightarrow$

$(2x-4)^2 = 4(2x-4) \Longleftrightarrow$

$(2x-4)^2 - 4(2x-4) = 0 \Longleftrightarrow$

$(2x-4)(2x-4-4) = 0 \Longrightarrow$

$2x-4=0$ ou $2x-8=0$

$x = 2 < 3$ $\boxed{x = 4 > 3}$

4)(a) $|x-1| \geq \frac{3}{4} \iff$

$x-1 \geq \frac{3}{4}$ ou $x-1 \leq -\frac{3}{4}$

$x \geq 1+\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ ou $x \leq 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\boxed{x \geq \frac{7}{4}}$ ou $\boxed{x \leq \frac{1}{4}}$

em notação de intervalo: $S_1 = (-\infty, \frac{1}{4}] \cup [\frac{7}{4}, \infty)$

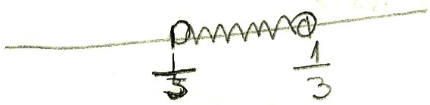
$|4x-1| < x \iff \underbrace{-x < 4x-1}_{\mathrm{I}} \underbrace{< x}_{\mathrm{II}}$

$-x < 4x-1$ e $4x-1 < x$

$-x-4x < -1$ e $4x-x < 1$

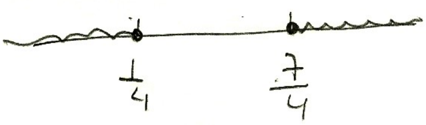
$-5x < -1$ e $3x < 1$

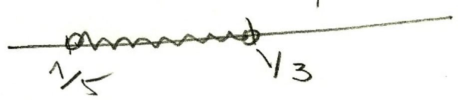
$\boxed{x > \frac{1}{5}}$ e $\boxed{x < \frac{1}{3}}$



em notação de intervalo: $S_2 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$

x tais que $|x-1| \geq \frac{3}{4}$ e $|4x-1| \leq x$

S_1


S_2


$S_1 \cap S_2 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$

4) (b) $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{28 - x^2}{x(x-2)} \iff$

$\dfrac{28-x^2}{x(x-2)} - \dfrac{1}{x} \geq 0 \iff$

$\dfrac{28 - x^2 - (x-2)}{x(x-2)} \geq 0 \iff$

$\dfrac{-x^2 - x + 30}{x(x-2)} \geq 0 \iff$

$\dfrac{x^2 + x - 30}{x(x-2)} \leq 0$

$x^2 + x - 30 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1 \pm 11}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{2} = 5 \\ \dfrac{-12}{2} = -6 \end{cases}$

$-6, 5, 0, 2$

	$x<-6$	-6	$-6<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<5$	5	$x>5$
x^2+x-30	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2+x-30}{x(x-2)}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Solução: $[-6, 0) \cup (2, 5]$