Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 1

Prezado aluno,

Seja bem-vindo à nossa disciplina. Este texto possui - salvo algumas modificações - o mesmo conteúdo do material preparado pela professora Rioco para o curso de Cálculo IV do Cederj.

Boa sorte!

Rioco K. Barreto e M. Lucia S. Menezes

Coordenadoras de Cálculo III-A

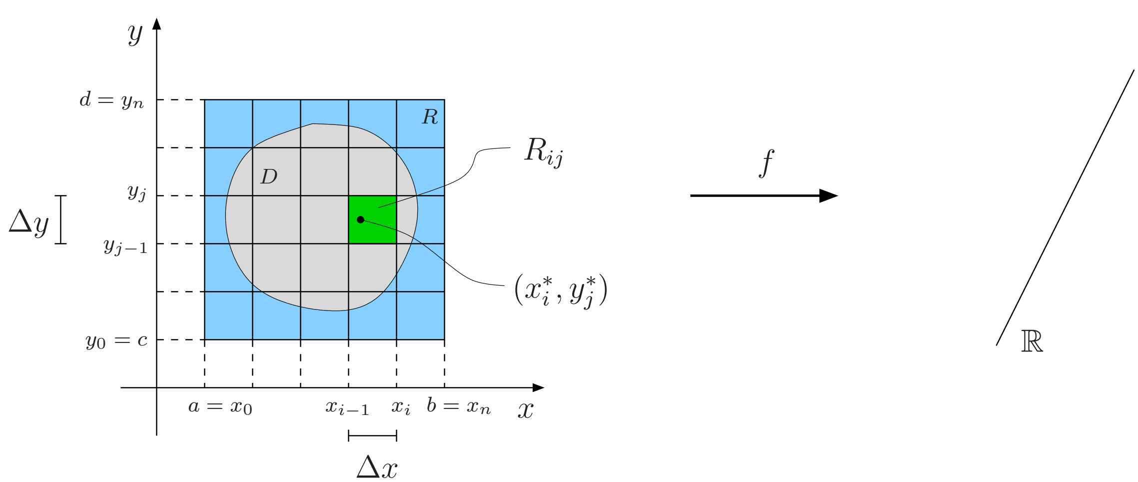
Aula 1 – Integrais Duplas

Objetivos

- Compreender a noção de integral dupla;
- Estudar algumas de suas propriedades;
- Estudar o Teorema de Fubini para retângulos.

Em Cálculo II-A, você aprendeu as integrais definidas. Agora, em Cálculo III-A, pretendemos que você compreenda as integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis.

Então consideremos uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde D é um conjunto fechado e limitado (também conhecido como conjunto compacto). Como D é limitado, então existe um retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$, tal que $D \subset R$.



Vamos dividir o retângulo R em subretângulos R_{ij} da seguinte maneira: dividimos os intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, respectivamente;

traçamos retas verticais e horizontais pelas extremidades desses subintervalos. Vamos escolher $\left(x_i^*, y_j^*\right) \in R_{ij}$, para formarmos a soma

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_j^*\right) \Delta x \Delta y = \sum_{i,j=1}^{n} f\left(x_i^*, y_j^*\right) \Delta A$$

onde $f\left(x_i^*, y_j^*\right) = 0$ se $\left(x_i^*, y_j^*\right) \notin D$.

Esta soma é dita *soma de Riemann de* f. Se existir o $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$, dizemos que f é integrável e que o número L é dito integral de f sobre D e é indicado por $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ ou $\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ ou $\iint\limits_D f\,dA$. Assim,

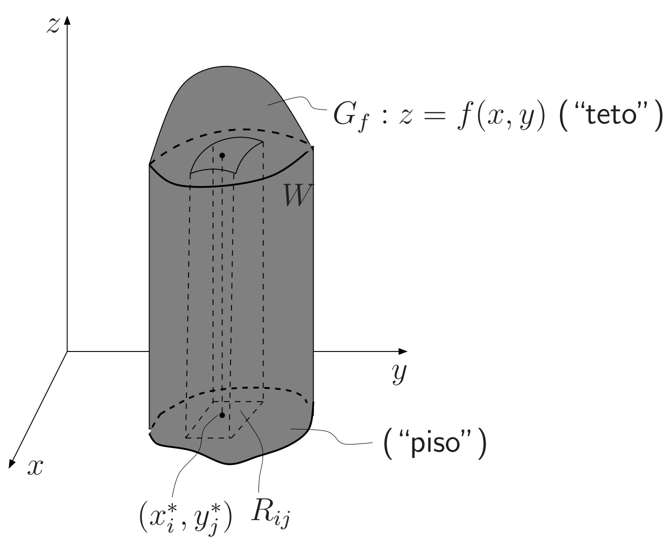
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} f\left(x_i^*, y_j^*\right) \Delta x \Delta y\,.$$

OBS.:

1. Prova-se que se f é contínua em D, então f é integrável.
2. Se $f(x,y) \geq 0$ é contínua em D, então o gráfico de f (G_f) está acima do plano xy. Então o volume do sólido W que está abaixo de G_f e acima de D é dado por

$$V(W) = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

Logo, para encontrar o volume do sólido W, integramos $f(x,y)$ (o "teto") sobre D (o "piso").



3. Se $f(x,y) = 1$ em D então

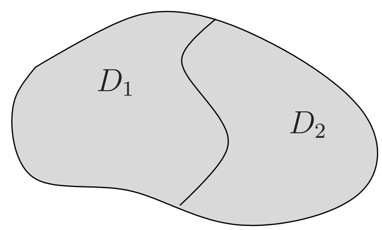
$$\iint_D 1\, dxdy = \iint_D dxdy = A(D) = \text{ área de } D\,.$$

4. Propriedades

(i) $\displaystyle\iint_D (f+g)\, dA = \iint_D f\, dA + \iint_D g\, dA$

(ii) $\displaystyle\iint_D kf\, dA = k\iint_D f\, dA, \quad k \in \mathbb{R}$

(iii) $\displaystyle D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow \iint_D f\, dA = \iint_{D_1} f\, dA + \iint_{D_2} f\, dA$



Um Método Prático para Calcular Integrais Duplas

Teorema de Fubini: Se $f(x,y)$ é contínua no retângulo $D = [a,b] \times [c,d]$, então

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy$$

ou

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \underbrace{\int_a^b\int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\, dxdy}_{\text{integrais iteradas ou repetidas}}$$

Exemplo 1

Calcule $\displaystyle\iint_D xy^2\, dxdy$, sendo $D = [0,1] \times [-1,0]$.

Solução:

Temos
$$\iint\limits_D xy^2\,dxdy = \int_0^1\int_{-1}^0 xy^2\,dydx\,.$$

Primeiro, calculamos a integral interna. Logo,

$$\iint\limits_D xy^2\,dxdy = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}\int_0^1 x[0-(-1)]\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\,.$$

Aula 2 – Cálculo de Integrais Duplas em Regiões mais Gerais

Objetivos

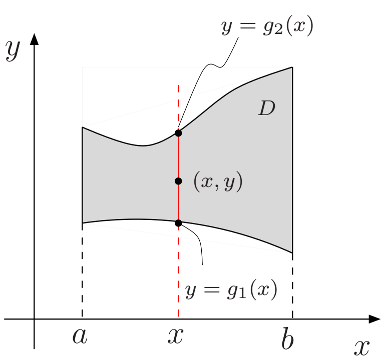
- Estudar uma versão mais geral do Teorema de Fubini;
- Calcular área e volume.

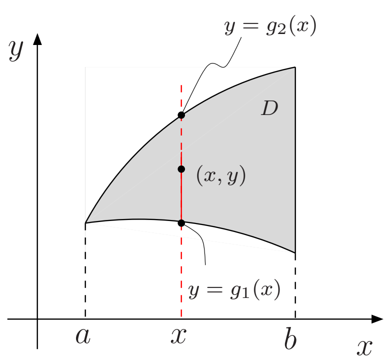
Suponhamos agora, que D seja diferente do retângulo $[a,b]\times[c,d]$. Então vamos definir dois tipos de região.

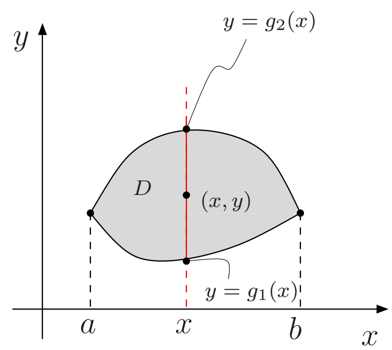
Definição 1

Dizemos que D é uma *região do tipo I* ou uma *região simples vertical* se D for limitada à esquerda pela reta vertical $x=a$, à direita pela reta vertical $x=b$, inferiormente pela curva de equação $y=g_1(x)$ e superiormente pela curva $y=g_2(x)$, onde g_1 e g_2 são contínuas.

As figuras que se seguem ilustram regiões do tipo I.







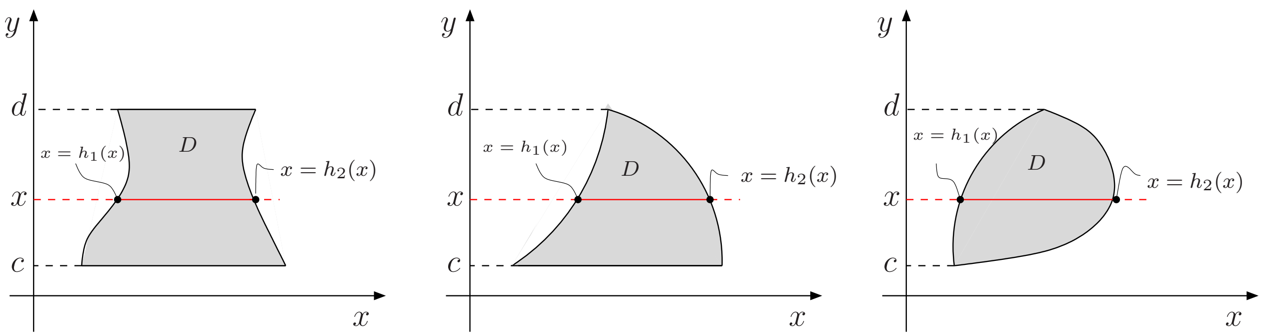
Logo, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b$ e $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Prova-se que:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx\,.$$

Definição 2

Dizemos que D é uma *região do tipo II* ou uma *região simples horizontal*, se D for limitada inferiormente e superiormente pelas retas horizontais $y = c$ e $y = d$, respectivamente, à esquerda pela curva $x = h_1(y)$ e à direita pela curva $x = h_2(y)$, onde h_1 e h_2 são contínuas.

As figuras que se seguem ilustram regiões do tipo II:



Logo, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d$ e $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$. Prova-se que:

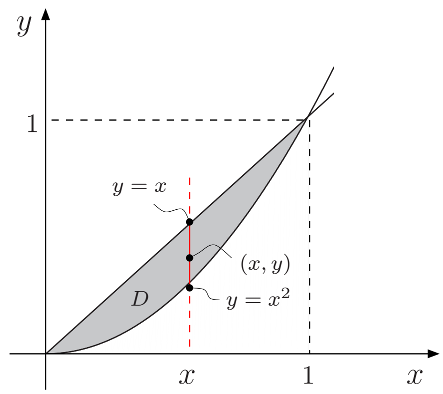
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Exemplo 1

Calcule por meio dos dois métodos a integral de $f(x, y) = xy$ sobre a região D limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

Solução:

As curvas se interceptam quando $x^2 = x$ ou $x(x - 1) = 0$. Então $x = 0$ ou $x = 1$. Assim, os pontos de interseção são $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Logo, o esboço de D é:

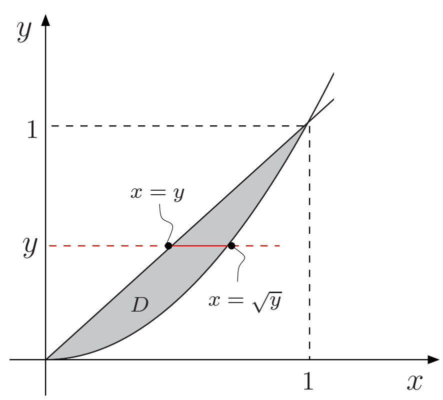


Método 1

Enquadrando D como tipo I, temos $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq x\}$. Então:

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1\int_{x^2}^{x} xy\,dydx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x^2 - x^4\right) dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3 - x^5\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{24}\,.\end{aligned}$$

Método 2



Enquadrando D como tipo II, temos $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1 \text{ e } y \leq x \leq \sqrt{y}\right\}$. Então,

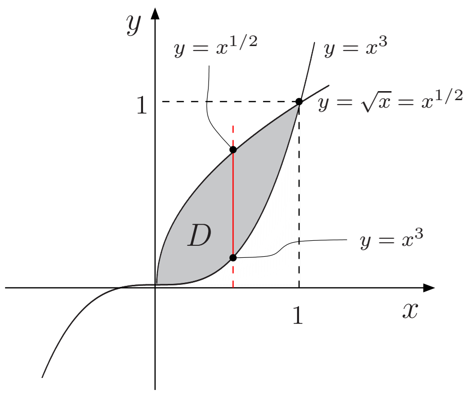
$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1\int_{y}^{\sqrt{y}} xy\,dxdy = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y}^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(y - y^2\right) dy &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^2 - y^3\right) dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{24}\,.\end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule, por meio de integral dupla, a área da região plana D limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução:

O esboço de D é:



Podemos descrever D por

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x^{1/2} \end{cases}$$

Então,

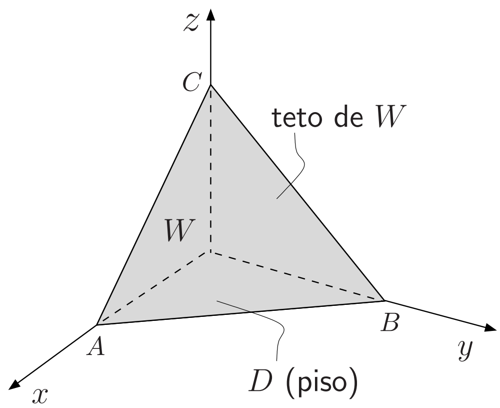
$$A(D) = \iint\limits_D dxdy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^{1/2}} dydx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^3\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ u.a.}$$

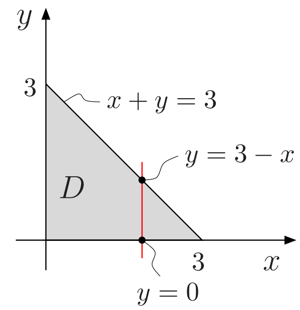
Exemplo 3

Calcule o volume do tetraedo W com faces nos planos coordenados e no plano $x + y + z = 3$.

Solução:

O plano $x + y + z = 3$ passa pelos pontos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ e $C = (0, 0, 3)$. Assim, o esboço de W é:





Observemos que o teto de W é a porção do plano $x+y+z=3$ ou $z=3-x-y=f(x,y)$ e que o piso de W é o triângulo D. Então,

$$\begin{aligned}
V(W) &= \iint_D f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_D (3-x-y)\,dxdy \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-x} (3-x-y)\,dydx \\
&= \int_0^3 \left[3y - xy - \tfrac{y^2}{2}\right]_0^{3-x} dx \\
&= \int_0^3 \left[3(3-x) - x(3-x) - \tfrac{(3-x)^2}{2}\right] dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^3 (9-6x+x^2)\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\left[9x - 3x^2 + \tfrac{x^3}{3}\right]_0^3 \\
&= \tfrac{9}{2}\ \text{u.v.}
\end{aligned}$$

Exercício 1: Calcule as integrais iteradas:

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^2 y e^{xy}\,dxdy$ b) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^x \frac{x^2}{y^2}\,dydx$

Exercício 2: Esboce a região de integração e calcule as integrais:

a) $\displaystyle\iint_D xy^3\,dxdy,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\le x\le 2\,,\ 0\le y\le 2x\};$

b) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|\le\pi/2\,,\ 0\le y\le\cos x\}$, $f(x,y)=y\,\mathrm{sen}\,x$.

Exercício 3: Esboce a região de integração e inverta a ordem das integrais iteradas em:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y f(x,y)\ dxdy$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dxdy$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dydx$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{3x} f(x,y)\ dydx$

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_{2y}^2 4e^{x^2}dxdy$.

Exercício 5: Calcule $\displaystyle\int_1^5\int_x^5 \frac{y}{x\ln y}\ dydx\,.$

Exercício 6: Use a integral dupla para calcular a área da região D limitada pelas curvas $y=4x-x^2$ e $y=x$.

Exercício 7: Encontre o volume do sólido W limitado pelos planos $y=0$, $z=0$ $y=4$ e pelo cilindro parabólico $z=4-x^2$.

Exercício 8: Encontre o volume do sólido W limitado pelas superfícies $z=1-y^2$, $z\ge 0$, $x=0$, $z=0$ e $x-y=2$.