



Cálculo III-A –Módulo 3

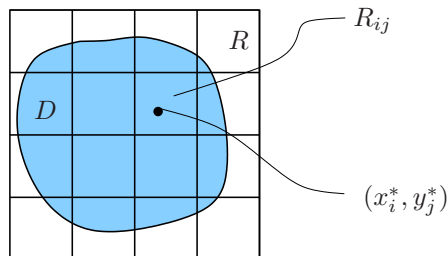
Aula 5 – Aplicações da Integrais Duplas

Objetivo

- Estudar algumas aplicações físicas como massa, centro de massa e momento de inércia.

1. Massa

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, uma região compacta, representando uma lâmina plana delgada. Suponhamos que a função contínua e positiva $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ representa a densidade superficial de massa (massa por unidade de área).



Considerando-se n^2 subretângulos R_{ij} de algum retângulo R que contém D e uma escolha $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$, observamos que a soma

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

é uma aproximação da massa M de D , onde $\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$ se $(x_i^*, y_j^*) \notin D$. Logo, é razoável definir a massa M de D com

$$M = \iint_D \delta(x, y) dx dy.$$



OBS.: Se $\delta(x, y)$ for constante e igual a k , então a massa M será igual a $kA(D)$. Neste caso, dizemos que a lâmina D é homogênea.

2. Centro de Massa

a) Seja um sistema finito de partículas $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, com massas $m_i, i = 1, \dots, n$, respectivamente. Lembrando da Física que os momentos de massa desse sistema, em relação aos eixos x e y , são definidos por:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad \text{e} \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

O centro de massa do sistema é o ponto (\bar{x}, \bar{y}) , que se comporta como se a massa total $M = \sum_{i=1}^n m_i$ do sistema estivesse concentrada nesse ponto. Logo,

$$M\bar{x} = M_y \quad \text{e} \quad M\bar{y} = M_x$$

ou

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

b) Se considerarmos no lugar de um sistema finito de partículas, uma lâmina plana D , com densidade superficial de massa dada por uma função contínua e positiva $\delta(x, y)$, fazemos uma partição de algum retângulo R contendo D , obtendo subretângulos R_{ij} . Escolhemos $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$. Logo, a massa de R_{ij} pode ser aproximada por $\delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A$, onde $\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$ se $(x_i^*, y_j^*) \notin D$. Então

$$M_x \simeq \sum_{i,j=1}^n y_j^* \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad \text{e} \quad M_y \simeq \sum_{i,j=1}^n x_i^* \delta(x_i^*, y_j^*) \Delta A.$$

Logo, definimos M_x e M_y por

$$M_x = \iint_D y \delta(x, y) \, dA \quad \text{e} \quad M_y = \iint_D x \delta(x, y) \, dA.$$

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) da lâmina D é definido por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) \, dA}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) \, dA}{M}.$$

OBS.: Se $\delta(x, y) = k$, k constante, o ponto (\bar{x}, \bar{y}) é dito centroide e temos as seguintes fórmulas



$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, dx dy}{\iint_D dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \, dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

3. Momento de Inércia

O momento de inércia de uma lâmina D em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iint_D r^2(x, y) \delta(x, y) \, dx dy$$

onde $r(x, y)$ é a distância de (x, y) ao eixo E .

Assim, os momentos de inércia de D em relação aos eixos x e y , respectivamente, são dados por

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) \, dx dy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) \, dx dy.$$

O momento de inércia polar em relação à origem é dado por

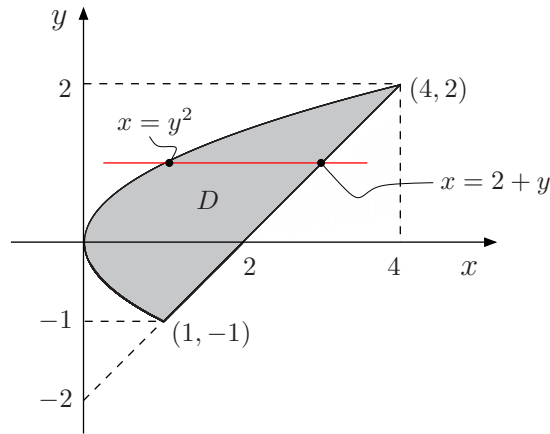
$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) \, dx dy = I_x + I_y.$$

Exemplo 1

Determine o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo x , da região D , limitada por $x = y^2$ e $x - y = 2$, sendo $\delta(x, y) = 3$.

Solução:

As curvas se interceptam quando $y^2 - y - 2 = 0$, logo $y = -1$, $y = 2$. Assim, o esboço de D é:



Descrevemos D como tipo II : $D = \{(x, y); -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2 + y\}$. A massa de D é:

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D \delta(x, y) dA = \iint_D 3 dA = 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} dx dy = 3 \int_{-1}^2 (2 + y - y^2) dy \\
 &= 3 \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 \\
 &= 3 \left[\left(4 + 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] \\
 &= \frac{27}{2}.
 \end{aligned}$$

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dA}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dA}{M}.$$

Cálculo de $\iint_D x \delta(x, y) dA$:

$$\begin{aligned}
 \iint_D x \delta(x, y) dA &= 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} x dx dy = 3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^{2+y} dy = \frac{3}{2} \int_{-1}^2 (4 + 4y + y^2 - y^4) dy \\
 &= \frac{3}{2} \left[4y + 2y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^2 \\
 &= \frac{3}{2} \left[\left(8 + 8 + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} \right) - \left(-4 + 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right] \\
 &= \frac{3}{2} \times \frac{72}{5} = \frac{108}{5}.
 \end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_D y \delta(x, y) dA$:

$$\begin{aligned}
\iint_D y \delta(x, y) dA &= 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} y dx dy = 3 \int_{-1}^2 y (2 + y - y^2) dy = 3 \int_{-1}^2 (2y + y^2 - y^3) dy \\
&= 3 \left[y^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{-1}^2 \\
&= 3 \left[\left(4 + \frac{8}{3} - 4 \right) - \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] \\
&= \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{\frac{108}{5}}{\frac{27}{2}} = \frac{8}{5}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{27}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Assim, o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) está localizado em $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$.

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_D y^2 \delta(x, y) dA = 3 \iint_D y^2 dA = 3 \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{2+y} y^2 dx dy = 3 \int_{-1}^2 y^2 (2 + y - y^2) dy \\
&= 3 \int_{-1}^2 (2y^2 + y^3 - y^4) dy \\
&= 3 \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^2 \\
&= 3 \left[\left(\frac{16}{3} + 4 - \frac{32}{5} \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \right] \\
&= \frac{189}{20}.
\end{aligned}$$

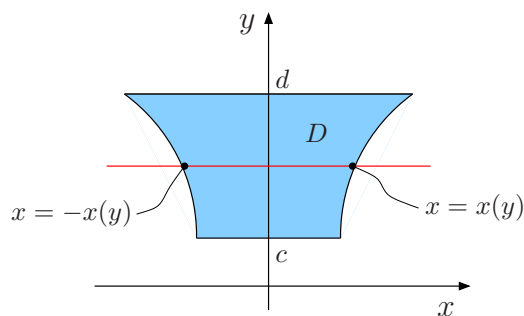
Aula 6 – Simetria em Integral Dupla

Objetivo

- Explorar simetrias em integrais duplas.

Simetria em Integral Dupla

1) Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, simétrica em relação ao eixo y e $f(x, y)$ ímpar na variável x , isto é, $f(-x, y) = -f(x, y)$. Então, $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$. Com efeito, como D tem simetria em relação ao eixo y , observamos que D está limitada à direita pela curva $x = x(y)$ e à esquerda pela curva $x = -x(y)$. Supondo que a projeção de D sobre o eixo y seja o intervalo $[c, d]$, temos o seguinte esboço para D :



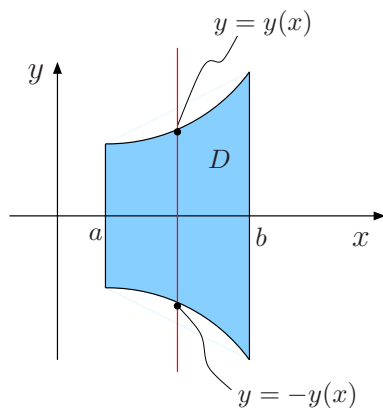
Então,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \underbrace{\left[\int_{-x(y)}^{x(y)} f(x, y) \, dx \right]}_{= 0 (*)} \, dy = \int_c^d 0 \, dy = 0.$$

(*) Aqui, usamos um fato do Cálculo II:

$$\int_{-a}^a g(x) \, dx = 0 \text{ se } g(x) \text{ é uma função ímpar.}$$

2) Analogamente, se D tem simetria em relação ao eixo x e $f(x, y)$ é ímpar na variável y , então $\iint_D f(x, y) \, dx dy = 0$. Veja o esboço para D na figura que se segue.



Exemplo 1

Calcule

$$I = \iint_D (xy^6 + (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y + 1) \, dx dy,$$

onde D é o disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, ($a > 0$).

Solução:

Por propriedade da integral dupla, temos que

$$I = \underbrace{\iint_D xy^6 dx dy}_{I_1} + \underbrace{\iint_D (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y dx dy}_{I_2} + \underbrace{\iint_D dx dy}_{I_3}.$$

- Como $f(x, y) = xy^6$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y , então $I_1 = 0$.
- Como $g(x, y) = (x^4 + y^4) \operatorname{sen} y$ é ímpar na variável y e D tem simetria em relação ao eixo x , então $I_2 = 0$.
- Como $\iint_D dx dy = A(D)$, então $I_3 = \pi a^2$. Logo,

$$I = 0 + 0 + \pi a^2 = \pi a^2.$$

RECOMENDAÇÃO

Nas integrais duplas, busque as simetrias e as funções ímpares. Não calcule cegamente!!!

OBS.:

1. Se a densidade $\delta(x, y)$ é uma função par na variável x (isto é, $\delta(-x, y) = \delta(x, y)$), então $x\delta(x, y)$ é ímpar na variável x . Se D tem simetria em relação ao eixo y , então $\iint_D x\delta(x, y) dx dy = 0$ e, portanto, $\bar{x} = 0$.

Analogamente, se $\delta(x, y)$ é uma função par na variável y e se D tem simetria em relação ao eixo x , então $\bar{y} = 0$.

2. Se D é uma lâmina homogênea e tem simetria em relação ao eixo y , então $\bar{x} = 0$.

Analogamente, se D é homogênea e tem simetria em relação ao eixo x , então $\bar{y} = 0$.



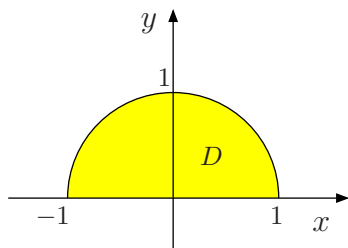
Exemplo 2

Uma lâmina delgada D ocupa a região $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, de modo que a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto à origem. Determine

- a) a massa M de D ;
- b) o centro de massa.

Solução:

O esboço de D é:



Como a distância de (x, y) à origem é $\sqrt{x^2 + y^2}$ então a densidade é dada por

$$\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde k é uma constante.

a) Como $M = \iint_D \delta(x, y) \, dx \, dy$, então $M = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$. Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx \, dy = r \, dr \, d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} .$$

Além disso, $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} .$$

Então,

$$M = k \iint_{D_{r\theta}} r \cdot r \, dr \, d\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \, dr \, d\theta = k \int_0^1 r^2 \int_0^\pi d\theta \, dr = k\pi \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{k\pi}{3} \, u.m.$$

b) Como $\delta(x, y)$ é uma função par e D tem simetria em relação ao eixo y , então $\bar{x} = 0$. Sabemos que

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) \, dx \, dy}{M} ,$$

onde

$$\begin{aligned}
 \iint_D y \delta(x, y) \, dx dy &= k \iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy \\
 &= k \iint_{D_{r\theta}} r \operatorname{sen} \theta \cdot r \cdot r \, dr d\theta \\
 &= k \iint_{D_{r\theta}} r^3 \operatorname{sen} \theta \, dr d\theta \\
 &= k \int_0^1 r^3 \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta dr \\
 &= k [-\cos \theta]_0^\pi \int_0^1 r^3 \, dr \\
 &= 2k \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{k}{2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{y} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}.$$

Portanto, o centro de massa está localizado em $(0, \frac{3}{2\pi})$.

Exercício 1: Calcule a massa total M , o centro da massa (\bar{x}, \bar{y}) de uma lâmina triangular, com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$ se a função densidade é $\delta(x, y) = 1 + 3x + y$.

Exercício 2: A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância do centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Exercício 3: Determine os momentos de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D , com densidade $\delta(x, y) = \delta$, centro na origem e raio a .

Exercício 4: Uma lâmina delgada tem a forma da região D , que é interior à circunferência $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Calcule a massa da lâmina se a densidade é dada por $\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$.

Exercício 5: Uma placa fina está limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e tem densidade $\delta(x, y) = \frac{a^2}{a^2 + x^2 + y^2}$. Mostre que o seu momento de inércia polar é dado por $I_0 = Ma^2 \left(\frac{1 - \ln 2}{\ln 2} \right)$, onde M é a sua massa.

Exercício 6: Uma lâmina tem a forma semicircular $x^2 + y^2 \leq a^2$, com $y \geq 0$. A densidade é diretamente proporcional à distância do eixo x . Ache o momento de inércia em relação ao eixo x .

Exercício 7: Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles, com lados iguais de comprimento a . Ache a massa, se a densidade em um ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa.