Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A –Módulo 4

Aula 7 – Integrais Triplas

Objetivo

- Compreender a noção de integral tripla.

Na aula 1, você aprendeu a noção de integral dupla. Agora, você verá o conceito de integral tripla.

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, onde W é uma região sólida do $\mathbb{R}^3$ (região limitada e fechada de $\mathbb{R}^3$). Como W está limitada, então existe um paralelepípedo (ou caixa) $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, contendo W. Dividimos R em n^3 subcaixas R_{ijk}, por planos paralelos aos planos coordenados, todas de mesmo volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, escolhemos $\left(x_i^*, y_j^*, z_k^*\right) \in R_{ijk}$ e formamos a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_i^*, y_j^*, z_k^*\right) \Delta V$$

onde $f\left(x_i^*, y_j^*, z_k^*\right) = 0$ se $\left(x_i^*, y_j^*, z_k^*\right) \notin W$, dita *soma de Riemann de* f.

Se existir $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L$, dizemos que f é integrável e o número L é dito integral tripla de f sobre o sólido W e é indicado por

$$\iiint\limits_W f(x, y, z)\, dxdydz \ \text{ ou}$$

$$\iiint\limits_W f(x, y, z)\, dV \ \text{ ou}$$

$$\iiint\limits_W f\, dV \,.$$

OBS.:

1) Se f é contínua em W então f é integrável.

2) Se $f(x,y,z) = 1$ em W, então $\iiint\limits_W dxdydz = V(W)$.

3) $\iiint\limits_W (f+g)\,dV = \iiint\limits_W f\,dV + \iiint\limits_W g\,dV$.

4) $\iiint\limits_W kf\,dV = k\iiint\limits_W f\,dV\,,\ \ k \in \mathbb{R}$.

5) Se $\delta(x,y,z)$ é contínua e positiva em W, e representa a densidade volumétrica de massa (massa por unidade de volume), então a massa M de W é dada por

$$M = \iiint\limits_W \delta(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

6) O centro de massa $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ é dado por:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iiint\limits_W x\cdot\delta(x,y,z)\,dV}{M}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iiint\limits_W y\cdot\delta(x,y,z)\,dV}{M}$$

$$\overline{z} = \frac{\displaystyle\iiint\limits_W z\cdot\delta(x,y,z)\,dV}{M}\,.$$

7) O momento de inércia em relação a um eixo E é dado por:

$$I_E = \iiint\limits_W r^2(x,y,z)\cdot\delta(x,y,z)\,dV$$

onde $r(x,y,z) =$ distância de (x,y,z) ao eixo E.

Se eixo $E =$ eixo z, então $I_z = \iiint\limits_W (x^2+y^2)\delta\,(x,y,z)\;dV$.

Se eixo $E =$ eixo y, então $I_y = \iiint\limits_W (x^2+z^2)\delta\,(x,y,z)\;dV$.

Se eixo $E =$ eixo x, então $I_x = \iiint\limits_W (y^2+z^2)\delta\,(x,y,z)\;dV$.

Aula 8 – Redução do Cálculo de uma Integral Tripla a uma Integral Dupla

Objetivo

- Reduzir o cálculo de uma integral tripla a uma integral dupla.

Observamos que um domínio de integração pode ser descrito como uma reunião de regiões dadas por:

$$W_1 = \{(x,y,z);\ (x,y) \in D_{xy} \text{ e } z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$$

onde $D_{xy} = \text{proj}_{xOy}^{W_1}$ (projeção de W_1 sobre o plano xy) e $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ contínuas;

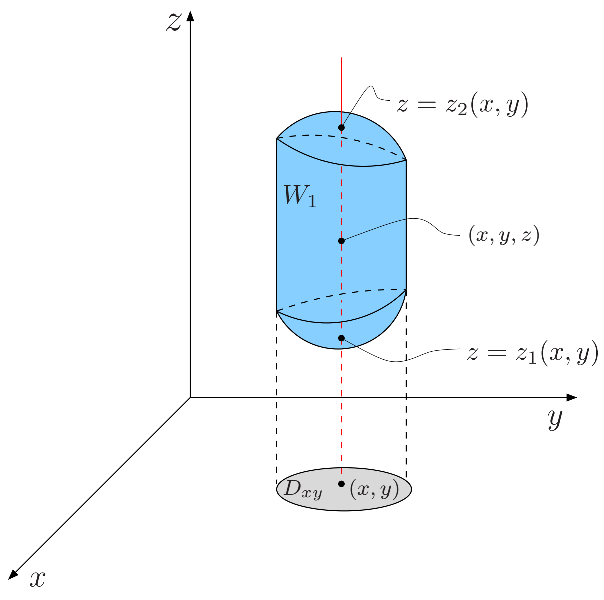
$$W_2 = \{(x,y,z);\ (x,z) \in D_{xz} \text{ e } y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z)\}$$

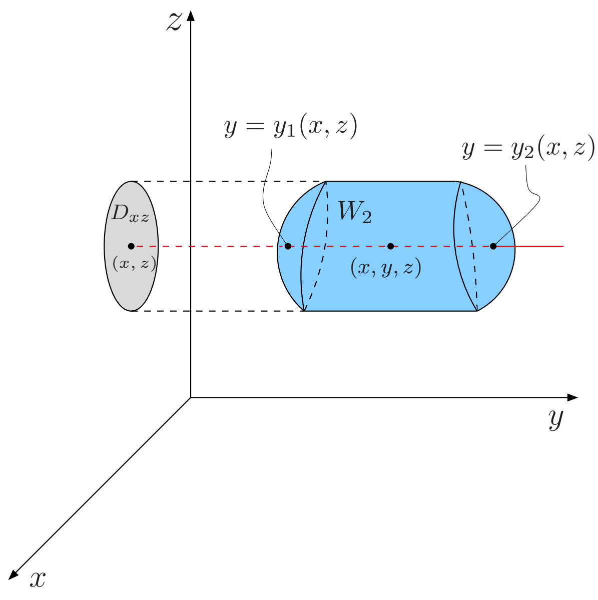
onde $D_{xz} = \text{proj}_{xOz}^{W_2}$ e $y_1(x,z)$, $y_2(x,z)$ contínuas;

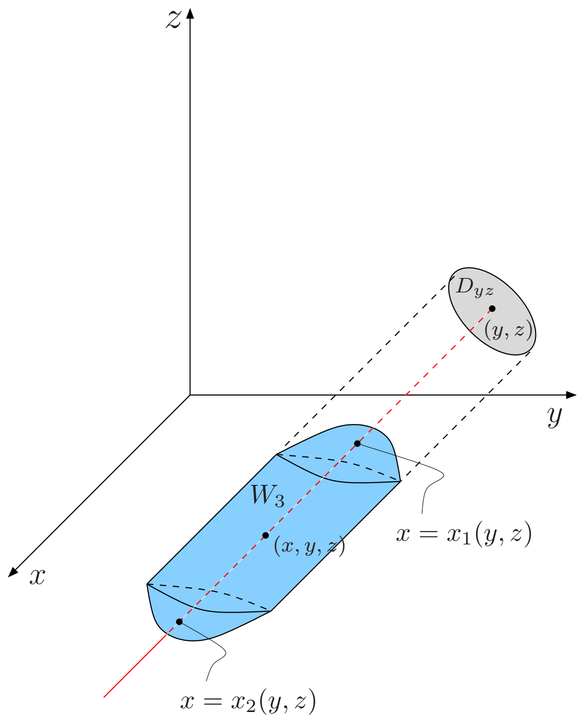
$$W_3 = \{(x,y,z);\ (y,z) \in D_{yz} \text{ e } x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z)\}$$

onde $D_{yz} = \text{proj}_{yOz}^{W_3}$ e $x_1(y,z)$, $x_2(y,z)$ contínuas.

Os esboços de W_1, W_2 e W_3 são:







Prova-se que

$$\iiint\limits_{W_1} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dxdy$$

$$\iiint\limits_{W_2} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xz}} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dxdz$$

$$\iiint\limits_{W_3} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dydz\,.$$

Exemplo 1

Calcule $\displaystyle\iiint\limits_{W} e^{x^2} dxdydz$ onde W é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq 1$.

Solução:

Definimos W por:

$$W = \left\{(x,y,z);\ (x,z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq x\right\}$$

onde $D_{xz} = [0,1] \times [0,1]$. Logo,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_W e^{x^2}\,dxdydz &= \iint\limits_{D_{xz}} \left[\int_0^x e^{x^2}\,dy\right] dxdz \\
&= \iint\limits_{D_{xz}} xe^{x^2}\,dxdz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 xe^{x^2}\,dxdz \\
&= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 \int_0^1 dz \\
&= \frac{e-1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 2

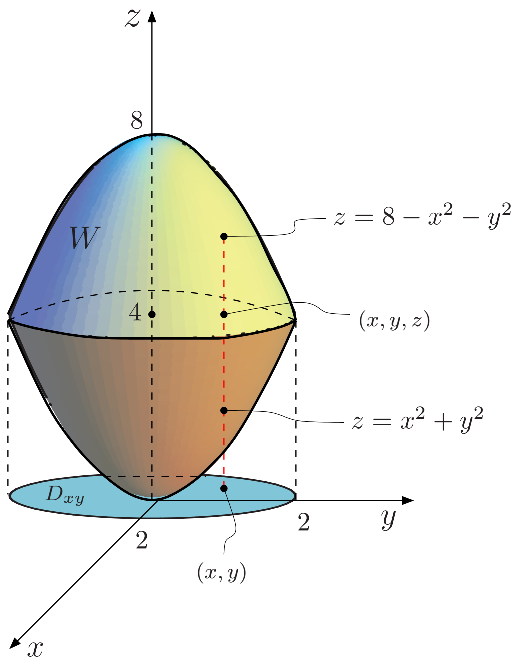
Calcule o volume do sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$.

Solução:

Inicialmente, calculemos a interseção das superfícies:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 8 - x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + y^2\right) = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4\,.$$

Logo, a interseção dos paraboloides é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, situada no plano $z = 4$.



Descrevemos W por:

$$W = \left\{(x,y,z);\ (x,y) \in D_{xy} \text{ e } x^2 + y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2\right\}$$

onde D_{xy} é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

Como $V(W) = \iiint\limits_W dxdydz$, então

$$V(W) = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz \right] dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left[8 - 2(x^2+y^2) \right] dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

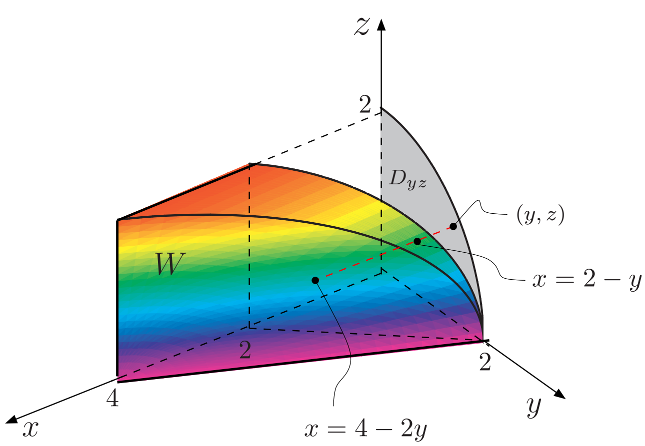
$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (8 - 2r^2) r \, d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^2 \left(8r - 2r^3\right) dr \\ &= 2\pi \left[4r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^2 \\ &= 2\pi(16 - 8) \\ &= 16\pi \ \textit{u.v.} \end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule a massa do sólido W, no primeiro octante, limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $x + 2y = 4$ e o cilindro $y^2 + z^2 = 4$, sendo a densidade igual à distância de (x, y, z) ao plano xz.

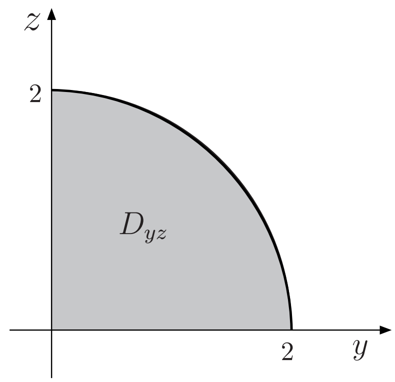
Solução:

O esboço de W é:



Podemos definir W por:

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (y, z) \in D_{yz} \text{ e } 2 - y \leq x \leq 4 - 2y \right\}$$



onde D_{yz} é tal que $y^2+z^2 \leq 4$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

Como $M = \iiint\limits_W \delta(x,y,z)\,dxdydz$, onde $\delta(x,y,z) = |y| = y$, pois $y \geq 0$, então:

$$\begin{aligned} M &= \iiint\limits_W y\,dxdydz \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} \left[\int_{2-y}^{4-2y} y\,dx\right] dydz \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} y(4-2y-2+y)\,dydz \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} \left(2y-y^2\right) dydz\,. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} y = & r\cos\theta \\ z = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dydz = & rdrd\theta \end{cases}$$

e $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta)\, r\, drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \left(2r^2\cos\theta - r^3\cos^2\theta\right)\, drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{2r^3}{3}\cos\theta - \tfrac{r^4}{4}\cos^2\theta\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\tfrac{16}{3}\cos\theta - 4\cos^2\theta\right)\, d\theta \\
&= \left[\tfrac{16}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta - \tfrac{4}{2}\left(\theta + \tfrac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{16}{3}(1-0) - 2\cdot\tfrac{\pi}{2} \\
&= \tfrac{16}{3} - \pi \ \ \textit{u.m.}
\end{aligned}$$

Exercício 1: Calcule a integral iterada $\displaystyle\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\, dxdzdy$.

Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iiint_W e^{x^2}\, dxdydz$, onde W é o conjunto $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq x$ e $0\leq z\leq 1$.

Exercício 3: Escreva as seis integrais triplas iteradas para o volume do sólido W limitado pelos planos $y+z=1$, $y=x$, $x=0$ e $z=0$. Calcule uma das integrais.

Exercício 4: Esboce o sólido W cujo volume é dado pela integral iterada

$$I = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y^2} dzdydx$$

e reescreva na ordem $dxdydz$.

Exercício 5: Use a integral tripla para encontrar o volume do sólido

a) W limitado pelo cilindro $x=y^2$ e os planos $z=0$ e $x+z=1$;

b) W limitado pelos planos $z+y=8$, $z-y=8$, $x=0$, $x=4$ e $z=0$.

Exercício 6: Calcule a massa do sólido W no primeiro octante limitado por $y=x^2$, $y=9$, $z=0$, $x=0$ e $y+z=9$ se a densidade é dada por $\delta(x,y,z)=x$.

Exercício 7: Seja W um sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $z \geq 0$ e pelos planos $y = z$ e $z = 0$ com função densidade $\delta(x, y, z) = y$. Calcule:

a) A massa de W.

b) O momento de inércia em relação ao eixo z.

Exercício 8: Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto de raio de base a e altura h. Determine o momento de inércia do sólido em relação ao eixo de simetria se a densidade no ponto P é proporcional à distância de P até a base do sólido.