Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 5

Aula 9 – Mudança de Variáveis na Integral Tripla

Objetivo

- Aprender a fazer mudança de variáveis em integrais triplas.
- Estudar a mudança de variáveis cilíndricas.

Aqui temos um resultado similar à mudança de variáveis em integral dupla:

$$\iiint\limits_{W} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{W_{uvw}} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)|J|\, dudvdw$$

onde

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

é o jacobiano da mudança de variáveis

$$\varphi(u,v,w) = (x,y,z) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$$

e $W_{uvw} = \varphi(W)$.

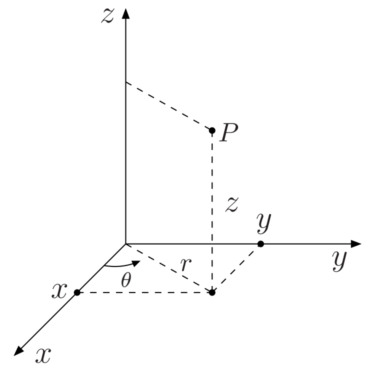
Um caso particular de mudança de variáveis

Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas (r, θ, z) são definidas por

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \quad \therefore \quad x^2 + y^2 = r^2$$

com $r \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum θ_0 e $z \in \mathbb{R}$.



As coordenadas r e θ são as mesmas que as coordenadas polares e, portanto, as suas variações são encontradas na projeção de W no plano xy. A variação de z é encontrada diretamente no sólido. Supondo que $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, então a variação de z será

$$z_1(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) \leq z \leq z_2(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,.$$

Calculando o jacobiano da transformação cilíndrica, encontramos

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r \quad \text{(Verifique!)}$$

Logo,

$$\boxed{\iiint\limits_W f(x, y, z)\; dxdydz = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} f\,(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\; drd\theta dz}$$

é a fórmula da integral tripla em coordenadas cilíndricas.

Exemplo 1

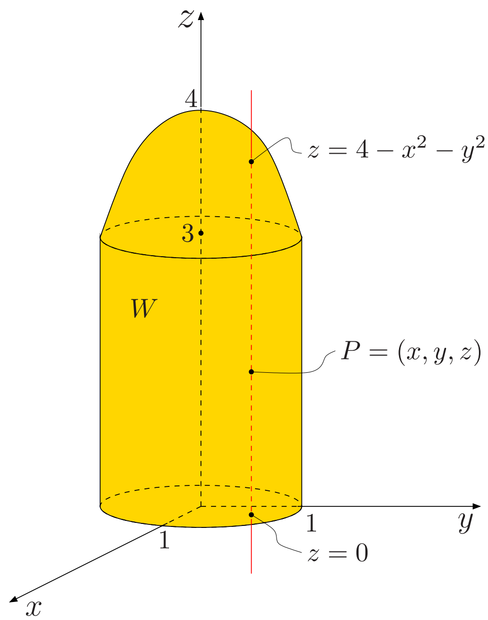
Calcule $\iiint\limits_W (zx^2 + zy^2)\; dxdydz$, sendo W o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solução:

De $z = 4 - x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$, temos $z = 3$. Isso significa que as superfícies apresentam interseção no plano $z = 3$. O esboço de W é:

Passando para coordenadas cilíndricas, temos

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\operatorname{sen}\theta \\ z = & z \\ dxdydz = & r\; drd\theta dz \\ x^2 + y^2 = & r^2 \end{cases} .$$



Seja $P = (x, y, z) \in W$. Uma reta por P, paralela ao eixo z, intercepta a fronteira de W em $z = 0$ e $z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$. Logo, $0 \leq z \leq 4 - r^2$. Como a projeção de W no plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, então $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo o conjunto $W_{r\theta z}$ é dado por:

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases} .$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_W \left(zx^2 + zy^2\right) dxdydz &= \iiint\limits_W z\left(x^2 + y^2\right) dxdydz \\
&= \iiint\limits_{W_{r\theta z}} zr^2 \cdot r \, drd\theta dz \\
&= \iiint\limits_{W_{r\theta z}} zr^3 \; drd\theta dz \\
&= \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} z \, dzd\theta dr \\
&= \int_0^1 r^3 \left[\tfrac{z^2}{2}\right]_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr \\
&= \pi \int_0^1 r^3 (4 - r^2)^2 \, dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_0^1 \left(16r^3 - 8r^5 + r^7\right) dr \\
&= \pi \left[4r^4 - \tfrac{4r^6}{3} + \tfrac{r^8}{8}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{67\pi}{24}\,.
\end{aligned}
$$

Aula 10 – Integral Tripla em Coordenadas Esféricas.

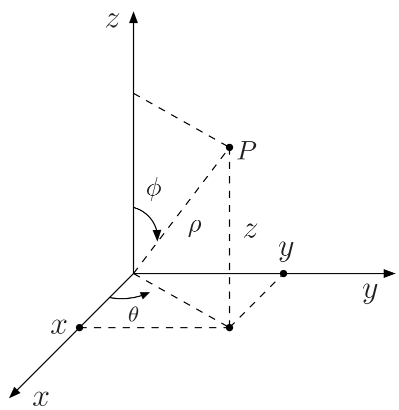
Objetivo

- Estudar a mudança de variáveis esféricas.

As coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) são definidas por

$$
\begin{cases}
x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\
y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\
z = \rho \cos \phi
\end{cases}
\quad \therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2
$$

com $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum θ_0.



A coordenada ρ mede a distância do ponto P à origem (portanto $\rho \geq 0$). A coordenada θ é a mesma que a coordenada cilíndrica e sua variação é encontrada na projeção de W no plano xy. A coordenada ϕ é o ângulo entre o eixo z positivo (onde $\phi = 0$) e a semirreta OP. A variação máxima de ϕ é $0 \leq \phi \leq \pi$.

Calculando o jacobiano da transformação esférica, temos:

$$
J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \quad \text{(Verifique!)}
$$

Logo,

$$
\boxed{\iiint\limits_W f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} f\left(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi\right) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho d\phi d\theta}
$$

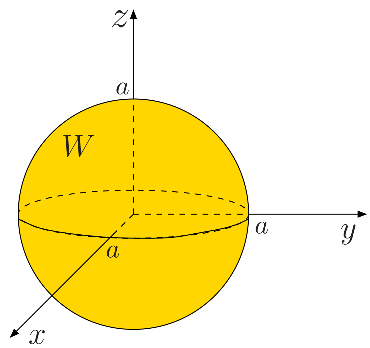
é a fórmula da integral tripla em coordenadas esféricas.

Exemplo 1

Calcule o volume da esfera $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $(a > 0)$.

Solução:

O esboço de W é:



Passando para coordenadas esféricas, temos

$$\begin{cases} x = & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = & \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = & \rho \cos \phi \\ dV = dxdydz = & \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = & \rho^2 \end{cases} .$$

A equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ fica $\rho = a$. Logo, o conjunto $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} .$$

Como $V(W) = \iiint\limits_W dxdydz$ então:

$$\begin{aligned}
V(W) &= \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^a \rho^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi d\rho \\
&= 2\pi \int_0^a \rho^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\rho \\
&= 2\pi \big[-\cos\phi \big]_0^\pi \int_0^a \rho^2 \, d\rho \\
&= 4\pi \left[\tfrac{\rho^3}{3} \right]_0^a \\
&= \tfrac{4\pi a^3}{3} \ \text{u.v.}
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule o volume do elipsoide $W : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, $(a, b, c > 0)$.

Solução:

Façamos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

Temos

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0 \,.$$

Logo,

$$dxdydz = |J| \; dudvdw = abc \, dudvdw \,.$$

O elipsoide $W : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ é transformado na esfera $W_{uvw} : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. Como $V(W) = \iiint\limits_W dxdydz$, então:

$$V(W) = \iiint\limits_{W_{uvw}} |J| \, dudvdw = abc \iiint\limits_{W_{uvw}} dudvdw = abc \, V\left(W_{uvw}\right) = abc \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi abc \,.$$

Exercício 1: Calcule $\displaystyle\iiint_W \left(x^2+y^2\right)\, dV$, onde W é a região interior ao cilindro $x^2+y^2=1$ e à esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\, dV$, onde W é a região limitada por $z=x^2+y^2-4$ e $z=4-x^2-y^2$.

Exercício 3: Use a integral tripla para calcular o volume do sólido W acima do paraboloide $z=x^2+y^2$ e abaixo do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\iiint_W \left(x^2+y^2+z^2\right)\, dV$, sendo W a região limitada superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e inferiormente pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercício 5: Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$.

Exercício 6: Faça o esboço do sólido W cujo volume é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\theta d\phi$$

e calcule essa integral.

Exercício 7: Verificar que o centro de massa de uma esfera de raio 1 coincide com o seu centro, sabendo-se que a sua distribuição de massa é homogênea.

Exercício 8: Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido limitado por $z=4-x^2-y^2$ e $z=0$, sabendo que a densidade em um ponto é proporcional à distância de P ao plano xy.