



Cálculo III-A – Módulo 6

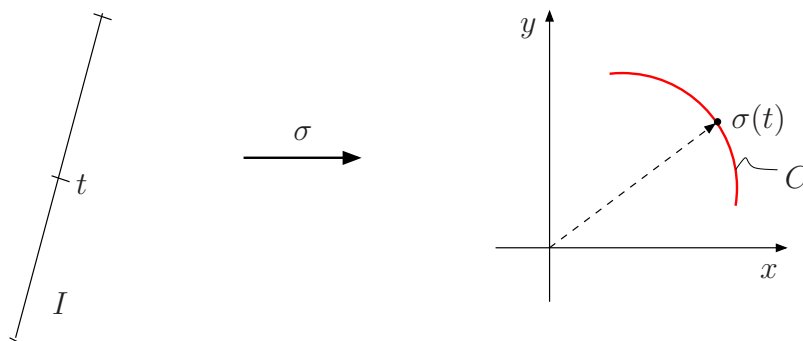
Aula 11 – Curvas Parametrizadas

Objetivo

- Parametrizar curvas planas e espaciais.
-

Parametrização de curvas

Parametrizar uma curva $C \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) consiste em apresentar uma função vetorial $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), onde I é um intervalo e $\sigma(I) = C$.



Exemplo 1

Seja $A, B \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), parametrize o segmento de reta C de extremidade inicial A e final B .

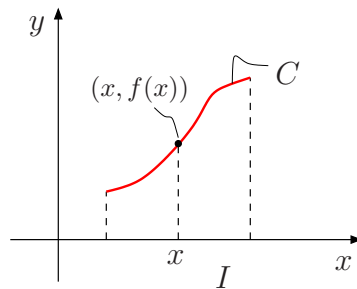
Solução:

Se $P \in C$, então $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$, $0 \leq t \leq 1$ ou $P - 0 = A - 0 + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$ ou $P = A + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$. Logo, uma parametrização do segmento C é dada por

$$\sigma(t) = A + t(B - A), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Exemplo 2

Seja $C \subset$ plano xy , o gráfico de uma função $y = f(x)$, $x \in I$.

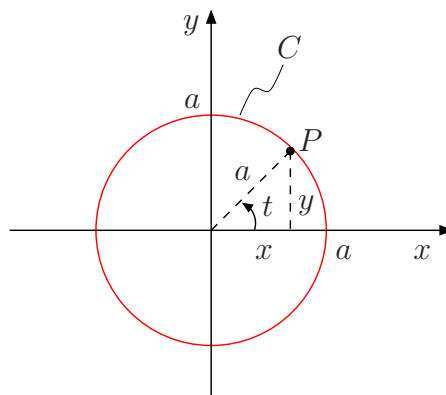


Então, uma parametrização de C é dada por

$$\sigma(t) = (t, f(t)), t \in I.$$

Exemplo 3

Seja C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$; $P = (x, y) \in C$ e t o ângulo em radianos entre o eixo positivo x e a semirreta OP .



Observe que quando t aumenta de 0 a 2π , o ponto $P = (x, y) = (a \cos t, a \sin t)$ se move, uma vez sobre C no sentido anti-horário a partir do ponto $(a, 0)$. Logo, uma parametrização de C é

$$\sigma_1(t) = (a \cos t, a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Observe que $\sigma_2(t) = (a \sin t, a \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é também uma parametrização de C , pois $x^2 + y^2 = a^2$. Neste caso, quando t aumenta de 0 a 2π , o ponto P se move uma vez ao longo de C no sentido horário, a partir do ponto $(0, a)$.

Observe que $\sigma_3(t) = (a \cos(2\pi - t), a \sin(2\pi - t)) = (a \cos t, -a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é outra parametrização de C , e P se move ao longo de C no sentido horário a partir do ponto $(a, 0)$.

Exemplo 4

Seja a circunferência $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, de centro (x_0, y_0) e raio a . Efetuando uma mudança de variáveis $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$, temos

$$u^2 + v^2 = a^2$$

que é uma circunferência no plano uv , de centro $(0, 0)$ e raio a . Logo,

$$\begin{cases} u = a \cos t \\ v = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Substituindo acima, temos

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por

$$\sigma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Exemplo 5

Seja uma elipse $C : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Fazendo $u = \frac{x-x_0}{a}$ e $v = \frac{y-y_0}{b}$, mostramos que

$$\sigma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma parametrização de C .

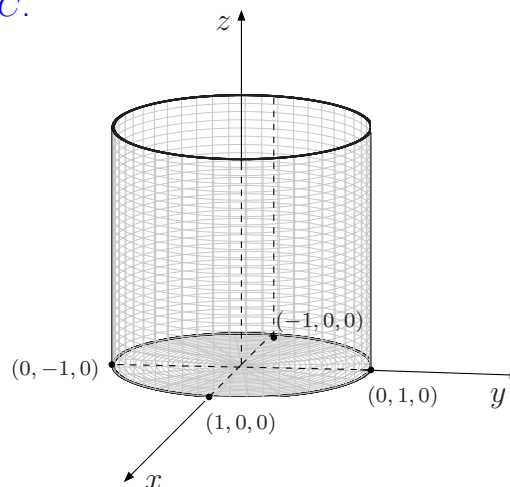
Exemplo 6

Seja C uma curva do espaço dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 2$.

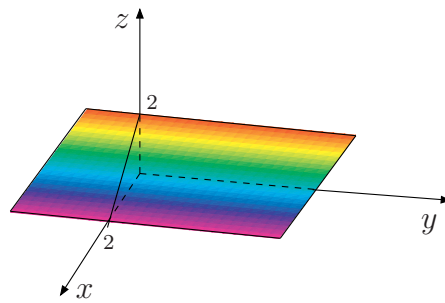
- Esboce C .
- Apresente uma parametrização diferenciável para C .

Solução:

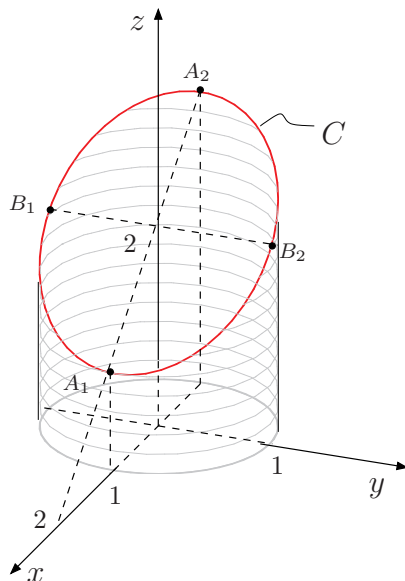
a) Inicialmente, façamos o esboço do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Desenhemos, no plano xy , a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Pelos pontos $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ tracemos paralelas ao eixo z .



Para esboçar o plano $x + z = 2$, traçamos a reta $x + z = 2$ no plano xz . Observe que a equação do plano não contém a variável y . Por isso, por pontos da reta traçamos paralelas ao eixo y .



Agora, juntemos as duas figuras, procurando destacar alguns pontos de interseção. A reta $x + z = 2$ intercepta o cilindro nos pontos A_1 e A_2 . Por outro lado, a reta do plano, paralela ao eixo y , passando por $(0, 0, 2)$, intercepta o cilindro nos pontos B_1 e B_2 . A curva C passa por A_1 , B_1 , A_2 e B_2 .



b) Seja $(x, y, z) \in C$. Logo, x e y satisfazem $x^2 + y^2 = 1$. Assim, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $z = 2 - x$, então $z = 2 - \cos t$. Logo,

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

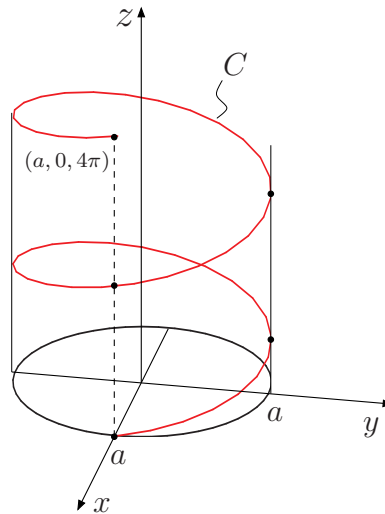
é uma parametrização de C .

Exemplo 7

Seja C a curva no espaço representada pela função vetorial $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 4\pi$, $a > 0$, $b > 0$. Esboce C , dita hélice circular.

Solução:

De $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, temos $x^2 + y^2 = a^2$. Isso significa que C está contida no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Como $z = bt$, quando t vai de 0 a 4π , o ponto (x, y, z) percorre a hélice contida no cilindro.

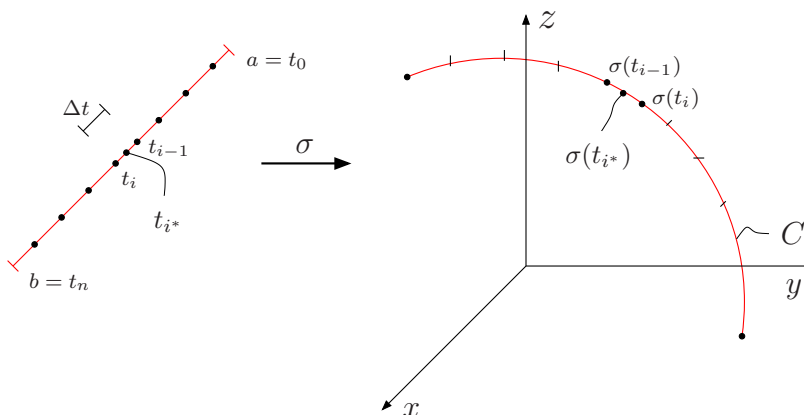


Aula 12 – Integral de Linha de Campo Escalar

Objetivo

- Compreender a noção de integral de linha de campo escalar;
- Estudar algumas propriedades.

Nesta aula definiremos uma integral similar a uma integral definida. Sejam dados um campo escalar em \mathbb{R}^3 ou uma função real de três variáveis $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva C em \mathbb{R}^3 , dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, com σ de classe C^1 .



Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos I_i , $i = 1, \dots, n$, de mesmo comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Logo, a curva C fica dividida em n subarcs de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, onde $\Delta s_i \simeq \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$ para algum $t_i^* \in I_i$. Formemos a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t,$$

Definimos a integral de linha de f sobre C por

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$$

se o limite existir.

OBS.:

1) Se f é uma função contínua, então o limite existe e portanto

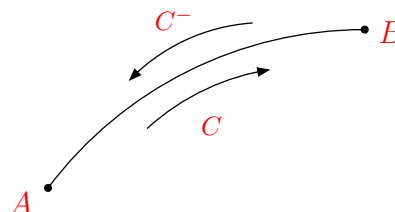
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(\sigma(t)) \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{ds} dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

2) Se $f(x, y)$ é uma função contínua em \mathbb{R}^2 e C uma curva em \mathbb{R}^2 , dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, com σ de classe C^1 , então definimos

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{ds} dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

3) Se $f(x, y) = 1$ (ou $f(x, y, z) = 1$), então

$$\int_C f ds = \text{comprimento de } C.$$



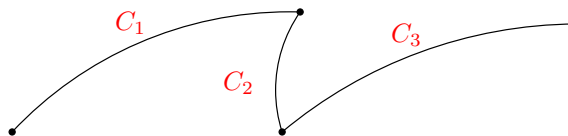
- 4) A integral de linha de um campo escalar f não depende da parametrização de C e nem de sua orientação, isto é, denotando por C^- a curva C percorrida em outro sentido, então

$$\int_{C^-} f ds = - \int_C f ds.$$

- 5) Se C é uma curva dada por uma parametrização $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), C^1 por partes, isto é, σ é contínua e existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ de modo que $\sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é de classe C^1 , $i = 1, \dots, n$, então

$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds$$

onde $C_i = \sigma_i([t_{i-1}, t_i])$.



Exemplo 1

Seja C a interseção do cilindro parabólico $x = y^2$ com a parte do plano $z = y$, tal que $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\int_C y ds$.

Solução:

Façamos $y = t$. Logo, $x = t^2$ e $z = t$. Como $0 \leq y \leq 1$, então $0 \leq t \leq 1$. Assim, uma parametrização de C é dada por $\sigma(t) = (t^2, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, logo $\sigma'(t) = (2t, 1, 1)$. Como, $ds = \|\sigma'(t)\| dt$, então $ds = \sqrt{4t^2 + 1 + 1} dt = \sqrt{2 + 4t^2} dt$. Logo,

$$\int_C y ds = \int_0^1 t \sqrt{2 + 4t^2} dt = \int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2} t dt.$$

Observe que $d(2 + 4t^2) = 8t dt$, portanto $t dt = \frac{d(2+4t^2)}{8}$. Logo,

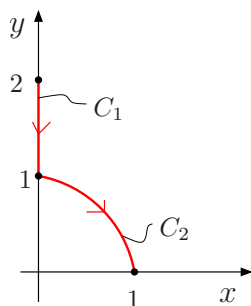
$$\int_C y ds = \frac{1}{8} \int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2} d(2 + 4t^2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (2 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (6^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{1}{6} (3\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Exemplo 2

Calcule $\int_C x \, ds$, onde C é formado pelo segmento de reta C_1 de $(0, 2)$ a $(0, 1)$, seguido do arco C_2 da parábola $y = 1 - x^2$ de $(0, 1)$ a $(1, 0)$.

Solução:

O esboço de C está representado na figura que se segue.



Como $C = C_1 \cup C_2$, temos:

$$\int_C x \, ds = \int_{C_1} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds = \int_{C_1^-} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds.$$

Cálculo de $\int_{C_1^-} x \, ds$

Uma parametrização de C_1^- é dada por $\sigma(t) = (0, t)$, $1 \leq t \leq 2$. Logo, $\sigma'(t) = (0, 1)$, logo $\|\sigma'(t)\| = 1$ e, portanto, $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = dt$.

Assim,

$$\int_{C_1^-} x \, ds = \int_1^2 0 \, dt = 0.$$

Cálculo de $\int_{C_2} x \, ds$

Uma parametrização de C_2 é dada por $\sigma(t) = (t, 1 - t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, portanto $\sigma'(t) = (1, -2t)$. Logo $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$. Então,

$$\int_{C_2} x \, ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \int_0^1 (1 + 4t^2)^{1/2} \, dt.$$

Observe que $t \, dt = \frac{d(1+4t^2)}{8}$. Logo,

$$\int_{C_2} x \, ds = \frac{1}{8} \int_0^1 (1 + 4t^2)^{1/2} \, d(1 + 4t^2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

Portanto,

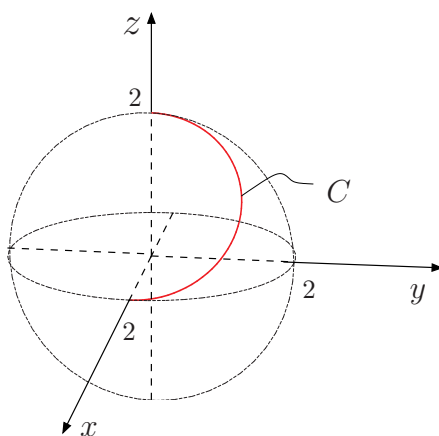
$$\int_C x \, ds = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

Exemplo 3

Seja a curva C obtida como interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$. Calcule $\int_C f(x, y, z) \, ds$, onde $f(x, y, z)$ é dada por $f(x, y, z) = xy$.

Solução:

O esboço de C é:



Seja $(x, y, z) \in C$. Então $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \geq 0$ e $x + z = 2$. Logo, $x^2 + y^2 + (2 - x)^2 = 4, y \geq 0$ ou $2x^2 - 4x + y^2 = 0, y \geq 0$ ou $2(x - 1)^2 + y^2 = 2, y \geq 0$ ou $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1, y \geq 0$. Logo, a projeção de C sobre o plano xy é a semi-elipse de centro $(1, 0)$ e semi-eixos 1 e $\sqrt{2}$. Então,

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \\ z = 2 - (1 + \cos t) = 1 - \cos t \end{cases}.$$

Como $y \geq 0, \sqrt{2} \operatorname{sen} t \geq 0$, portanto $0 \leq t \leq \pi$. Logo, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi.$$

Temos

$$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t, \operatorname{sen} t)$$

portanto

$$ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2 \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \, dt = \sqrt{2} \, dt.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) ds &= \int_C xy ds = \int_0^\pi (1 + \cos t) (\sqrt{2} \sin t) \sqrt{2} dt = 2 \int_0^\pi (\sin t + \sin t \cos t) dt \\ &= 2 \left[-\cos t + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^\pi \\ &= 4.\end{aligned}$$

Exercício 1: Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

- a) C é o segmento de $(1, 2)$ a $(-2, 8)$.
- b) C é a parte da parábola $y = 3x^2$ de $(-1, 3)$ a $(2, 12)$.
- c) C é o gráfico de $y^3 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
- d) C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.
- e) C é o gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
- f) C é o arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$, com $x \geq 0$.
- g) C é a curva $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$.
- h) C é a curva $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$.

Exercício 2: Apresente uma parametrização diferenciável para a curva C em \mathbb{R}^3 , interseção das superfícies dadas por

- a) $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$.
- b) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante.
- c) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $x + z = 1$.
- d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y = 1$.
- e) $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ e $x = y^2$ do ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, \sqrt{2})$.
- f) $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$ e $2x + 3z = 6$ de $(3, 1, 0)$ a $(3, -1, 0)$.
- g) $z = 3x^2 + y^2$ e $z + 6x = 9$.
- h) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$.

Exercício 3: Calcule $\int_C (xy + y + z) ds$ ao longo da curva $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t\vec{j} + (2 - 2t)\vec{k}$, com $0 \leq t \leq 1$.

Exercício 4: Calcule $\int_C (x + \sqrt{4y}) ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Exercício 5: Calcule a integral $\int_C (x^2 + y^2) ds$, onde C é a quarta parte da circunferência $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, situada no primeiro octante.

Exercício 6: Calcule a integral $\int_C \sqrt{3}xyz ds$, onde C é a curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$, situada no primeiro octante.