Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 8

Aula 15 – Integral de Linha de Campo Vetorial

Objetivo

- Definir integrais de linha.
- Estudar algumas propriedades.

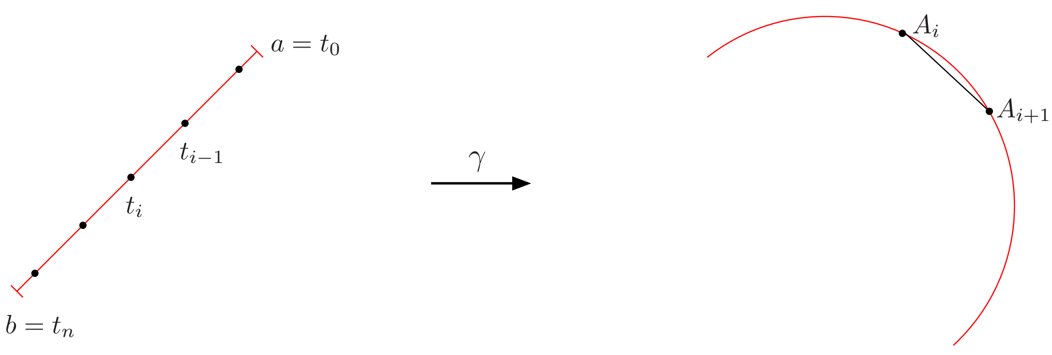
Integral de Linha de Campo Vetorial

Motivação

Considere uma partícula que se move ao longo de uma curva $C : \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a, b]$, sob a ação de um campo de forças $\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x, y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Queremos calcular o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}$, quando a partícula se desloca de $A = \gamma(a)$ até $B = \gamma(b)$.

Da física, temos, no caso em que $\overrightarrow{F}$ é constante e C é um segmento de reta, o trabalho dado pelo produto escalar $W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

No caso geral, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, de mesmo comprimento $\Delta_t = t_i - t_{i-1}$. Temos n subarcos $\gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big) = C_i$ e n segmentos $[A_{i-1}, A_i]$, $A_i = \gamma(t_i) = \big(x(t_i), y(t_i)\big)$, com $i = 1, \ldots, n$.



Supondo que $\overrightarrow{F}$ constante ao longo do segmento $[A_{i-1}, A_i]$, o trabalho ao longo de C_i é aproximadamente igual ao produto escalar

$$W_i \cong \overrightarrow{F}\big(\gamma(t_i)\big) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \overrightarrow{F}\big(\gamma(t_i)\big) \cdot (A_i - A_{i-1}) = P\big(x(t_i), y(t_i)\big)\Delta x + Q\big(x(t_i), y(t_i)\big)\Delta y,$$

onde $\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1})$ e $\Delta y = y(t_i) - y(t_{i-1})$.

Pelo Teorema do Valor Médio, temos $\Delta x = x'(t_i^*)\,\Delta t$, com $t_i^* \in]t_{i-1}, t_i[$ e $\Delta y = y'(t_i^{**})\,\Delta t$, com $t_i^{**} \in]t_{i-1}, t_i[$. Logo,

$$W_i \cong \Big[P\big(x(t_i), y(t_i)\big)x'(t_i^*) + Q\big(x(t_i), y(t_i)\big)y'(t_i^{**})\Big]\Delta t$$

portanto

$$W \cong \sum_{i=1}^{n} \Big[P\big(x(t_i), y(t_i)\big)x'(t_i^*) + Q\big(x(t_i), y(t_i)\big)y'(t_i^{**})\Big]\Delta t = S_n\,.$$

Assim, definimos $W = \lim\limits_{\Delta t \to 0} S_n$. Então

$$W = \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big]\,dt\,.$$

Esta motivação sugere a definição que se segue.

Definição:

Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular dada por uma parametrização $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, tal que $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in \big]a, b\big[$. Seja $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial contínuo sobre C. Então a integral de linha do campo $\overrightarrow{F}$ ao longo de C, denotado por $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, é definida por

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_a^b \overrightarrow{F}\,(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt\,.\end{aligned}$$

OBS.:

1. Seja C uma curva regular por partes: $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$. Então

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \ldots + \int_{C_n} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

2. A integral de linha de um campo vetorial $\overrightarrow{F}$, $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ não depende da parametrização de C, desde que não se inverta sua orientação. Isto é, denotando por C^- a curva C percorrida em outro sentido, então

$$\int_{C^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

OBS.:

3. Se C é uma curva fechada $(\gamma(a) = \gamma(b))$ e está orientada no sentido anti-horário, denotamos a integral de linha por $\displaystyle\oint_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

   Caso contrário, denotamos por $\displaystyle\oint_{C^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

Exemplo 1

Seja $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$. Temos a integral de linha $\overrightarrow{F}$ ao longo da hélice $C : \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ dada por

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}\,(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t))\ dt &= \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t + t)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} t\, dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2\,.\end{aligned}$$

Uma outra notação

Sabemos que $dx = x'(t)\ dt$, $dy = y'(t)\ dt$ e $dz = z'(t)\ dt$. Se usarmos a convenção $d\overrightarrow{r} = dx\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + dy\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + dz\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = (dx, dy, dz)$, temos

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_C (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz \\ &= \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big]\ dt\,.\end{aligned}$$

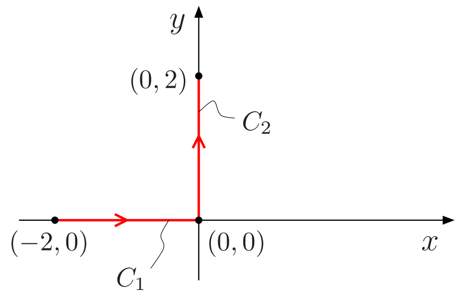
Logo, uma outra notação é $\displaystyle\int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$.

Exemplo 2

Calcule $\int_C y\,dx + (x^2+y^2)\,dy$, onde C é formado pelos segmentos que ligam $(-2,0)$ a $(0,0)$ e $(0,0)$ a $(0,2)$.

Solução:

O esboço de $C = C_1 \cup C_2$ está representado na figura ao lado.



C_1 e C_2 podem ser parametrizadas por

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0\,, \end{cases} , -2 \le t \le 0, \quad \text{portanto } dx = dt \text{ e } dy = 0\,.$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t\,, \end{cases} , 0 \le t \le 2, \quad \text{portanto } dx = 0 \text{ e } dy = dt\,.$$

Temos

$$\int_{C_1} y\,dx + \left(x^2+y^2\right)\,dy = \int_{-2}^{0} 0\,dt + \left(t^2+0^2\right)\cdot 0 = 0$$

$$\int_{C_2} y\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_0^2 t\cdot 0 + (0^2+t^2)\,dt = \int_0^2 t^2\,dt = \left[\tfrac{t^3}{3}\right]_0^2 = \tfrac{8}{3}\,.$$

Logo,

$$\int_C y\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0 + \tfrac{8}{3} = \tfrac{8}{3}\,.$$

Aula 16 – Campos Conservativos

Objetivo

- Estudar uma classe de campos vetoriais que tem a propriedade de que a integral de linha não depende do caminho.
- Cálculo de funções potenciais.

Campos Conservativos

Dizemos que $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(n = 2\,,\,3)$ é um **campo conservativo** ou um **campo gradiente** se existir um campo escalar diferenciável $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$ em D.

O campo escalar $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dito função potencial de $\overrightarrow{F}$ em D.

Exemplo 1

O campo vetorial $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (2x + 3yz)\overrightarrow{\mathbf{i}} + 3xz\overrightarrow{\mathbf{j}} + 3xy\overrightarrow{\mathbf{k}}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$, pois existe $\varphi(x, y, z) = x^2 + 3xyz$ diferenciável em $\mathbb{R}^3$, tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$ em $\mathbb{R}^3$.

A seguir, apresentaremos alguns resultados dos campos conservativos.

Teorema 1: Seja $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(n = 2\,,\,3)$ um campo vetorial de classe C^1. Se $\overrightarrow{F}$ é conservativo, então $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

Demonstração:

Suponhamos $n = 3$. Então, $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$. Se $\overrightarrow{F}$ é conservativo, existe $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$. Logo, $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \nabla \times (\nabla\varphi) = \overrightarrow{0}$ por propriedade dos operadores diferenciais.

■

Mais adiante, veremos um exemplo de um campo vetorial não conservativo, com rotacional nulo.

OBS.: O Teorema 1 também pode ser enunciado da seguinte maneira:

"Se $\text{rot}\,\overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{0}$ em D, então $\overrightarrow{F}$ não é conservativo em D" .

Exemplo 2

Temos que $\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{2y}{x^2+y^2}\overrightarrow{\mathbf{j}}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pois existe $\varphi(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, tal que $\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Exemplo 3

Temos que $\overrightarrow{F}(x, y) = -2y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ não é um campo conservativo. Ora, temos que

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F}(x, y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}} = (2 - (-2))\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = 4\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \neq \overrightarrow{0}.$$

Teorema 2: Seja $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(n = 2\,,\,3)$ de classe C^1. Se $\overrightarrow{F}$ é conservativo, isto é, $\overrightarrow{F} = \nabla\varphi$ em D, e se C é qualquer curva regular por partes com ponto inicial A e ponto final B, então

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(B) - \varphi(A)\,.$$

Demonstração:

A demonstração segue da definição de integral de linha e da regra da cadeia.

■

Este resultado é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha. É dele que concluímos que a integral de linha de um campo conservativo só depende dos pontos A e B e não depende da trajetória que os une.

Teorema 3: Se $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(n = 2\,,\,3)$ é conservativo, de classe C^1, então $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ qualquer que seja o caminho fechado.

Demonstração:

A demonstração segue do Teorema 2, pois C sendo um caminho fechado, o ponto final B coincide com o ponto inicial A, portanto $\varphi(B) - \varphi(A) = 0$. Assim, a integral de linha é zero.

■

Este Teorema também pode ser enunciado da seguinte maneira:

"Se $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \neq 0$ para alguma curva fechada C então $\overrightarrow{F}$ não é conservativo" .

Exemplo 4

Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde $\overrightarrow{F}(x,y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ e C é dada por $\gamma(t) = (\operatorname{arctg} t, \cos t^4)\ ,\ 0 \leq t \leq 1$.

Solução:

Observemos que $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$ com função potencial $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) &= \varphi(\operatorname{arctg} 1, \cos 1) - \varphi(\operatorname{arctg} 0, \cos 0)\\ &= \varphi\left(\tfrac{\pi}{4}, \cos 1\right) - \varphi(0,1)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi^2}{16} + \cos^2 1\right) - \tfrac{1}{2}\left(0^2 + 1^2\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi^2}{16} - 1 + \cos^2 1\right).\end{aligned}$$

A seguir exibiremos um campo vetorial não conservativo com rotacional $\overrightarrow{0}$, o que mostra que a recíproca do Teorema 1 é falsa.

Exemplo 5

Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $(x,y) \in D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (verifique!), rot $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ em D. Calculemos $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$, onde C é a circunferência $\gamma(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Temos

$$\begin{aligned}\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy &= \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{-a\operatorname{sen} t}{a^2}\right)(-a\operatorname{sen} t) + \left(\frac{a\cos t}{a^2}\right)(a\cos t)\right]dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)\,dt\\ &= 2\pi \neq 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

Se $\overrightarrow{F}$ fosse conservativo, teríamos encontrado, pelo Teorema 3, que $\oint_{C^+} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = 0$, o que contradiz (1). Logo, $\overrightarrow{F}$ não é conservativo.

Na aula 18, veremos, para o caso $n = 2$, que, impondo certas condições ao domínio de $\overrightarrow{F}$, a recíproca do Teorema 1 é verdadeira.

Cálculo de Funções Potenciais

Exemplo 6

Sabe-se que $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2y - 3xy^2 + 2)$ é um campo gradiente. Determine uma função potencial.

Solução:

Para determinar uma função potencial $\varphi(x, y)$, devemos ter

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^2 - y^3 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^2y - 3xy^2 + 2 \tag{3}$$

Integrando (2) em relação a x, temos

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + f(y) \tag{4}$$

Integrando (3) em relação a y, temos

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + g(x) \tag{5}$$

De (4) e (5), vemos que, tomando $f(y) = 2y$ e $g(x) = 0$, segue que uma função potencial é

$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y\,.$$

Exemplo 7

Sabe-se que $\overrightarrow{F}(x, y, z) = 2xy\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x^2 + z\cos(yz))\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + y\cos(yz)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ é um campo conservativo. Determine uma função potencial.

Solução:

Devemos ter:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + z\cos(yz) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y\cos(yz) \tag{8}$$

Integrando (6), (7) e (8) em relação a x, y e z respectivamente, temos

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + f(y, z) \tag{9}$$

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + \operatorname{sen}(yz) + g(x, z) \tag{10}$$

$$\varphi(x, y, z) = \operatorname{sen}(yz) + h(x, y) \tag{11}$$

De (9), (10) e (11), devemos ter $f(y, z) = \operatorname{sen}(yz)$, $g(x, z) = 0$ e $h(x, y) = x^2y$. Logo,

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + \operatorname{sen}(yz)$$

é uma função potencial de $\overrightarrow{F}$.

Exercício 1: Calcule $\displaystyle\int_C x\,dx + x^2\,dy$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$

a) ao longo do eixo x

b) ao longo de $C : \overrightarrow{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$, com $0 \leq t \leq \pi$.

c) ao longo da poligonal de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$.

Exercício 2: Calcule os valores de $\displaystyle\int_C -2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$ ao longo do caminho C, onde C é a

a) parte superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ de $(a, 0)$ a $(-a, 0)$;

b) parte superior da elipse $x^2 + 4y^2 = 2x$, orientada no sentido anti-horário.

Exercício 3: Calcule o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}(x, y) = (x, -y)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva fechada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde C_1: segmento de reta de $O = (0, 0)$ a $A = (1, 1)$; C_2: parte da curva $4x^2 - 12x + 4y^2 - 8y + 12 = 0$, com $y \geq 1$, do ponto $A = (1, 1)$ a $B = (2, 1)$; C_3: segmento de reta BO.

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\int_C 2x\ dx - 3y\ dy + z^2\ dz$, onde C é o segmento de reta que une $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, \pi/2)$.

Exercício 5: Determine o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3y + z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (y - 3x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (e^z + x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ para deslocar uma partícula ao longo da curva C interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 5$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Exercício 6: Calcule $\displaystyle\int_C z\ dx + y\ dy - x\ dz$, onde C é a interseção das superfícies $y + z = 8$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$, com $x \geq 0$, no sentido anti-horário quando vista de cima.

Exercício 7: Sabe-se que o campo $\overrightarrow{F} = (e^{x+y} + 1)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + e^{x+y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre uma função potencial para $\overrightarrow{F}$.

b) Calcule $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ onde C é o arco de circunferência $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, com $x \geq 1$ que vai de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

Exercício 8: Determine uma função potencial para cada campo conservativo.

a) $\overrightarrow{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2xy\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

b) $\overrightarrow{F}(x, y) = (cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy))\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (x^2 \operatorname{sen}(xy))\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

c) $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (6xy^3 + 2z^2\,, 9x^2y^2\,, 4xz + 1)$.