Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

# Cálculo III-A – Módulo 14

## Aula 25 – Teorema de Stokes

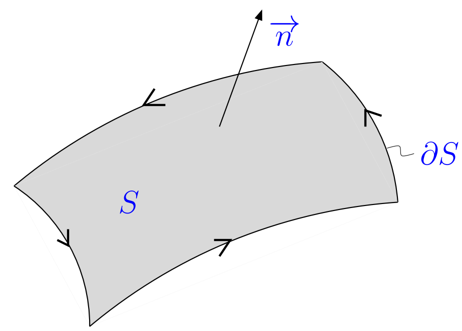
### Objetivo

- Estudar um teorema famoso que generaliza o teorema de Green para o espaço.

### O Teorema de Stokes

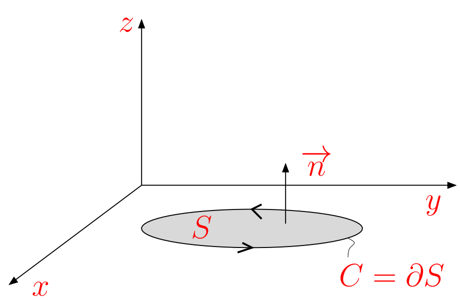
Seja $U$ um aberto conexo de $\mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe $C^1$ em $U$. Seja $S \subset U$, uma superfície regular por partes, orientada pelo campo normal unitário $\overrightarrow{n}$. Seja $\partial S$ o bordo de $S$, com a orientação induzida pela de $S$. Então,

$$\underbrace{\iint\limits_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS}_{\text{fluxo do rotacional}} = \underbrace{\oint\limits_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}}_{\text{circulação de}\,\overrightarrow{F}}$$




OBS.: Seja $S$ uma superfície plana contida no plano $xy$, orientada com $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$. Então $S : z = 0$, $(x, y) \in D$. Logo, $dS = dxdy$. Seja $\overrightarrow{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, então,

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \text{rot}(P, Q, 0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}\,.$$



Logo, pelo teorema de Stokes, temos

$$\oint_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy = \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\,dS$$

$$= \iint_D \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot (0,0,1)\,dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Isto prova que o teorema de Stokes generaliza o teorema de Green.

Como consequência do teorema de Stokes, temos:

*"Se $U = \text{dom}\,\overrightarrow{F}$ é um conjunto simplesmente conexo, isto é, $U$ é o $\mathbb{R}^3$ ou $U$ é o $\mathbb{R}^3$, exceto um número finito de pontos, e se rot $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{F}$ é conservativo".*

O teorema das quatro equivalências é dado por: Seja $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe $C^1$ em um conjunto simplesmente conexo do $\mathbb{R}^3$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ para toda curva fechada $C$;

(2) $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ é independente do caminho;

(3) $\overrightarrow{F}$ é um campo gradiente, isto é, $\overrightarrow{F} = \nabla\varphi$ para algum campo escalar $\varphi$;

(4) rot $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

Exemplo 1

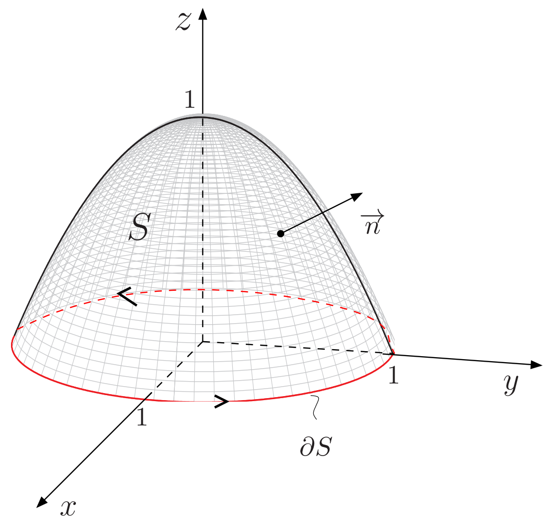
Verifique o teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado, para

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = -y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

e $S$ o paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e $\overrightarrow{n}$ a normal unitária exterior a $S$.

*Solução:*

O esboço de $S$ é:




Pela regra da mão direita, com o polegar no de sentido $\overrightarrow{n}$ e movimentando os dedos, vemos que a curva bordo de $S$, $\partial S$, fica orientada no sentido anti-horário, quando vista de cima. Então uma parametrização de $\partial S$ é, $\partial S : x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = 0$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, portanto $dx = -\operatorname{sen} t\ dt$, $dy = \cos t\ dt$ e $dz = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_C -y\ dx + x\ dy + z\ dz \\
&= \int_0^{2\pi} \big[(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t)\big]\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)\ dt \\
&= 2\pi\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,1+1) = (0,0,2)\,.$$

Temos, $S : z = 1 - x^2 - y^2 = f(x,y)$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Um vetor normal a $S$ é dado por $\overrightarrow{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ que é exterior a $S$. Logo,

$$\overrightarrow{n} = \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \quad \text{e} \quad dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy\,.$$

Então,

$$\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_D (0,0,2)\cdot(2x,2y,1)\ dx\ dy = 2\iint_D dx\ dy = 2\,A(D) = 2\pi \cdot 1^2 = 2\pi\,.$$

Assim, o teorema de Stokes está verificado para este caso.

Exemplo 2

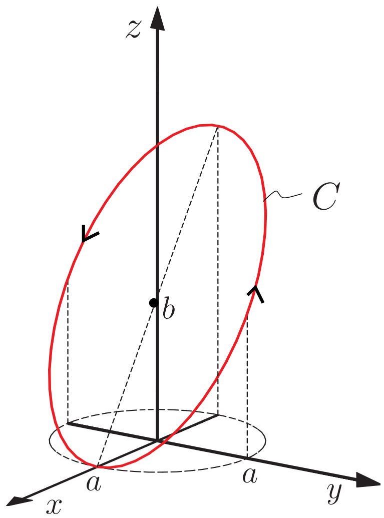
Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$, onde

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=(y-x+\operatorname{sen}x,\ z-x+\cos y,\ x-y+e^z)$$

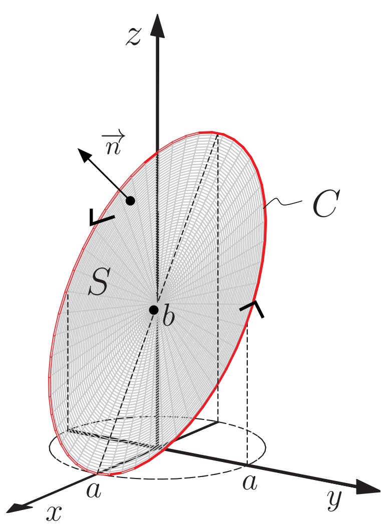
e $C$ é a interseção do cilindro $x^2+y^2=a^2$ com o plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$, sendo $a>0$, $b>0$, orientada no sentido anti-horário quando vista da parte superior do eixo $z$.

*Solução:*

O esboço de $C$ está representado na figura que se segue.




Para aplicar o teorema de Stokes, precisamos de uma superfície $S$, cujo bordo seja a curva $C$. Então, consideremos a porção do plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$, limitada por $C$.




Pela regra da mão direita, vemos que $\overrightarrow{n}$ aponta para cima. Logo, podemos descrever $S$ por $S: z=b-\frac{bx}{a}=f(x,y)$, com $(x,y)\in D: x^2+y^2\leq a^2$. Um vetor normal a $S$ é

$$\overrightarrow{N}=(-f_x,-f_y,1)=\left(\frac{b}{a},0,1\right)$$

que aponta para cima. Então, $\overrightarrow{n} = \frac{\left(\frac{b}{a},0,1\right)}{\|\overrightarrow{N}\|}$ e $dS = \|\overrightarrow{N}\|\, dxdy$. Temos

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - x + \operatorname{sen} x & z - x + \cos y & x - y + e^z \end{vmatrix} = (-1-1, 0-1, -1-1) = (-2,-1,-2)\,.$$

Do teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned} \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS \\ &= \iint_D (-2,-1,-2) \cdot \left(\frac{b}{a}, 0, 1\right)\; dx\; dy \\ &= \left(\frac{-2b}{a} - 2\right) \iint_D dx\; dy \\ &= -2\left(\frac{b+a}{a}\right)\pi ab \\ &= -2\pi b(b+a)\,. \end{aligned}$$

---

Exemplo 3

Seja $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3x^2z + y^3, 3xy^2 + e^z, x^3 + ye^z)$.

a) $\overrightarrow{F}$ é conservativo? Por quê?

b) Seja $C$ a curva obtida como interseção da superfície $z = x^2 + y^2 - 4$, $z \leq 1$ com o plano $y = -1$. Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, especificando a orientação escolhida.

*Solução:*

a) Temos $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = (e^z - e^z,\; 3y^2 - 3y^2,\; 3y^2 - 3y^2) = \overrightarrow{0}$ e $\text{dom}\,\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^3$ que é um conjunto simplesmente conexo. Então, pelo teorema das equivalências em $\mathbb{R}^3$, segue que $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo.

b) Logo, existe uma função potencial $\varphi(x,y,z)$, tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2z + y^3 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3xy^2 + e^z \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^3 + ye^z \tag{3}$$

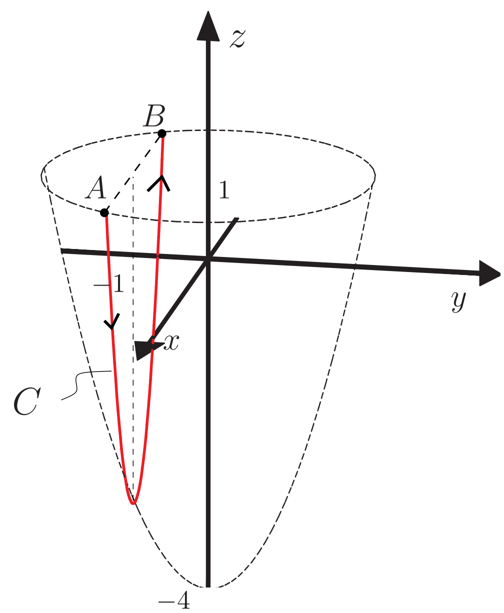
Integrando (1), (2) e (3) em relação a $x$, $y$ e $z$, respectivamente, temos:

$$\varphi(x,y,z) = x^3z + xy^3 + f(y,z) \tag{4}$$

$$\varphi(x,y,z) = xy^3 + ye^z + g(x,z) \tag{5}$$

$$\varphi(x,y,z) = x^3z + ye^z + h(x,y) \tag{6}$$

Comparando (4), (5) e (6), vemos que $f(y,z) = ye^z$, $g(x,z) = x^3z$ e $h(x,y) = xy^3$. Logo, $\varphi(x,y,z) = x^3z + xy^3 + ye^z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é uma função potencial de $\overrightarrow{F}$. O esboço de $C$ está representado na figura que se segue.




Escolhamos a orientação de $A = (2,-1,1)$ para $B = (-2,-1,1)$. Então,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(-2,-1,1) - \varphi(2,-1,1) = (-8+2-e) - (8-2-e) = -12\,.$$

---

**Exercício 1:** Verifique o teorema de Stokes, calculando a integral de linha e a integral de superfície para o campo $\vec{F}$ e a superfície $S$.

a) $\vec{F}(x,y,z) = 2y\,\vec{\mathbf{i}} - z\,\vec{\mathbf{j}} + 3\,\vec{\mathbf{k}}$, $S$ é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2z, x, 3y)$, e $S$ a porção do plano $x - z = 0$, contida no cilindro $x^2 + y^2 = 4$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

---

**Exercício 2:** Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

a) $\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{\mathbf{i}} + xy\,\vec{\mathbf{j}} + xz\,\vec{\mathbf{k}}$ e $C$ é o quadrado de vértices $(0,0,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$ e $(0,1,2)$, orientado no sentido anti-horário quando visto de cima;

b) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{\mathbf{i}} + z\,\vec{\mathbf{j}} + x\,\vec{\mathbf{k}}$ e $C$ é a fronteira do triângulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, percorrido nessa ordem;

c) $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ e $C$ é a curva interseção do cilindro $x^2+y^2=1$, com o plano $x+z=1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima;

d) $\vec{F}(x,y,z) = \left(z+y^2, e^{y^2}+1, \ln(z^2+1)+y\right)$ e $C$ é parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 4-2\operatorname{sen} t)$, com $t \in [0,2\pi]$.

---

**Exercício 3:** Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2e^{yz}\,\vec{\mathbf{i}} + y^2e^{x^2}\,\vec{\mathbf{j}} + z^2e^{xy}\,\vec{\mathbf{k}}$, $S$ é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$ e com orientação para cima;

b) $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2, x, z^3)$ e $S$ qualquer superfície cujo bordo seja a curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t, 1)$, com $0\leq t\leq 2\pi$, com a normal apontando para cima.

---

**Exercício 4:** Seja $\vec{F}(x,y,z) = (8x^3+z^2, -3z, 2xz-3y)$.

a) $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$? Por quê?

b) Se $C$ é o segmento de reta que liga $(0,0,0)$ a $(2,1,3)$, calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

---

**Exercício 5:** A integral

$$\int_C 2xe^{2y}\,dx + 2\left(x^2e^{2y} + y\cos z\right)\,dy - y^2\operatorname{sen} z\,dz$$

é independente do caminho? Calcule o valor da integral para a curva $C$ obtida como interseção da superfície $z = 9-x^2-y^2$, $z\geq 5$ com o plano $x=1$, orientada no sentido de crescimento de $y$.