(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln(1-\cos x)} = e^{0\cdot(-\infty)}$, ind.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1-\cos x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{\infty}$, indet

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1-\cos x}\cdot \operatorname{sen} x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^2 \operatorname{sen} x}{1-\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1/2}} = \dfrac{-0}{\frac{1}{2}} = 0$

$\left\{ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x} = \dfrac{1}{2} \right.$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x)^x = e^{0} = 1$ //

---

(2) $f(x) = 8x - \frac{8}{\pi}\arctan x$

a) $f'(x) = 8 - \dfrac{8}{\pi}\times\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{8\pi x^2 + 8\pi - 8}{\pi(1+x^2)} > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

pois $8\pi x^2 \geq 0$ $8\pi - 8 > 0$ e $\pi(1+x^2) > 0$

Portanto, pelo teorema da função inversa f é diferenciável p/ $x\in\mathbb{R}$.

$(f^{-1})'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{\pi}{8\pi - 4}$ //

$\left\{ f'(1) = 8 - \dfrac{8}{\pi}\times\dfrac{1}{2} = 8 - \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{8\pi - 4}{\pi} \right.$

(b) f é diferenciável em $(-\infty,\infty)$ portanto

$\left.\begin{array}{l} f \text{ é contínua em } [-1,1] \\ f \text{ é diferenciável em } (-1,1) \end{array}\right\}$ hipóteses do Teorema do Valor Médio (TVM)

Pelo TVM, $\exists c\in(-1,1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$.

$f'(c)$ é o coef. da reta tangente que contém $(-1, f(-1))$ e $(1, f(1))$.

$f(1) = 8 - \dfrac{8}{\pi}\arctan 1 = 8 - \dfrac{8}{\pi}\times\dfrac{\pi}{4} = 8 - 2 = 6$

$f(-1) = -8 - \dfrac{8}{\pi}\arctan(-1) = -8 - \dfrac{8}{\pi}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -8 + 2 = -6$

$f'(c) = \dfrac{6-(-6)}{1-(-1)} = \dfrac{12}{2} = 6$

$f'(x) = 8 - \dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2} = 6$

$\dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2} = 2$

$\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}$

$1 + x^2 = \dfrac{\pi}{4}$

$x^2 = \dfrac{\pi}{4} - 1 = \dfrac{\pi - 4}{4}$

$x = \pm\dfrac{\sqrt{\pi - 4}}{4}$

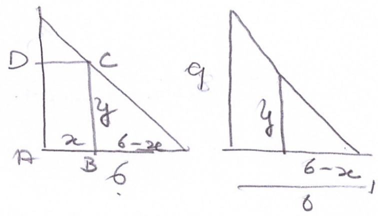
Logo $c = \dfrac{\sqrt{\pi-4}}{\pi}$ ou $c = -\dfrac{\sqrt{\pi-4}}{4}$ //

(3) $\overline{AB} = x$ $\overline{AD} = y$

Por semelhança de triângulos,

$\frac{y}{9} = \frac{6-x}{6} \implies y = 9(1 - \frac{x}{6})$

$y = 9 - \frac{3}{2}x$



Volume da caixa $= \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot h = x(9 - \frac{3}{2}x) \cdot x$

$V(x) = x^2(9 - \frac{3}{2}x) = 9x^2 - \frac{3}{2}x^3$ | $0 \leq x \leq 6$

$V'(x) = 18x - \frac{9}{2}x^2 = 0$ (pontos críticos?)

$36x - 9x^2 = 0$

$9x(4-x) = 0 \iff x = 0$ ou $4 - x = 0 \implies x = 4$

único ponto crítico no intervalo $(0,4)$ é $x = 4$.

$V(0) = 0$

$V(6) = 36(9 - \frac{3}{2} \cdot 6) = 0$

$V(4) = 16(9 - \frac{3}{2} \cdot 4) = 16(9-6) = 48$

$x = 4$ é ponto de máximo relativo, como é o único ponto crítico é ponto de máximo absoluto.

$y = 9 - \frac{3}{2} \cdot 4 = 3$

$\overline{AB} = 4$

$\overline{AD} = 3$

---

4) $\int \left(\frac{3\sqrt{x} + 4x}{x^2} + 2\operatorname{sech}^2 x\right)dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}-2} + 4x^{-1} + 2\operatorname{sech}^2 x\right)dx$

$= \int \left(3x^{-3/2} + \frac{4}{x} + 2\operatorname{sech}^2 x\right)dx = 3\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + 4\ln|x| + 2\tanh x + C$

$= -6x^{-1/2} + 4\ln|x| + 2\tanh x + C$

(5) $a(t) = 8 - 2t$

$x''(t) = 8 - 2t$

$\int (x'(t))' dt = \int (8-2t)dt$

$x'(t) = 8t - \frac{2t^2}{2} + C$, $x'(t) = v(t)$

$v(t) = 8t - t^2 + C$, $v(0) = 2$

$v(0) = 0 - 0 + C = 2 \implies \boxed{C = 2}$

$\boxed{v(t) = 8t - t^2 + 2}$

(6) $f(x) = (6-x)\, e^{\frac{x}{2}}$, dom $f = \mathbb{R}$

f é contínua em $\mathbb{R} \Rightarrow f$ não tem AV.

$\lim\limits_{x \to \infty} (6-x)\, e^{x/2} = -\infty \cdot \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (6-x)\, e^{x/2} = \infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$, ind.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6-x}{e^{-x/2}} = \dfrac{\infty}{e^{\infty}} = \dfrac{\infty}{\infty}$, ind

$\stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{-\frac{1}{2} e^{-x/2}} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

$\Rightarrow \; y = 0$ é AH.

Pontos críticos: $f'(x) = 0$ ou $\nexists f'(x)$

$f'(x) = (6-x) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - 1\, e^{x/2} = (3 - \frac{x}{2} - 1)\, e^{x/2}$

$f'(x) = (2 - \frac{x}{2})\, e^{x/2} = 0$

$2 - \frac{x}{2} = 0 \iff 4 - x = 0 \iff \boxed{x = 4}$

$x = 4$ é o único ponto crítico.

	$(-\infty, 4)$	4	$(4, \infty)$
$(2 - \frac{x}{2})$	$+$	0	$-$
$e^{x/2}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
crescimento de f	↗		↘

$\Rightarrow$ $x = 4$ é ponto de máximo relativo
Não tem ponto de mínimo relativo.

$f''(x) = (2 - \frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{x/2}$

$= (1 - \frac{x}{4} - \frac{1}{2})\, e^{x/2} = (\frac{1}{2} - \frac{x}{4})\, e^{x/2}$

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, \infty)$
$\frac{1}{2} - \frac{x}{4}$	$+$	0	$-$
$e^{x/2}$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	∪ p/cima		∩ p/baixo

$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} = 0$

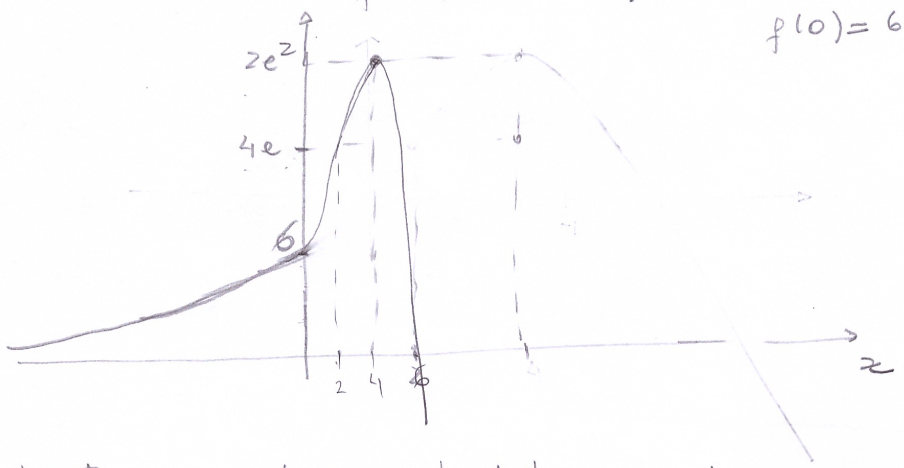
$x = 2$

$\Rightarrow x = 2$ é ponto de inflexão.

Gráfico: $f(4) = (6-4)\, e^{\frac{4}{2}} = 2e^2$

$f(2) = (6-2)\, e^{\frac{2}{2}} = 4e$

$f(0) = 6e^0 = 6$



ponto de máximo absoluto: $x = 4$

valor máximo absoluto $= f(4) = 2e^2$

não tem mín absoluto pois $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

imagem $= (-\infty, 2e^2]$.