(1) (a) $\sqrt[5]{x^{10}} = x^2$ e $\sqrt[3]{x^9} = x^3$

Precisa contra-exemplo para $x^2 < x^3$, $x>0$, $x \neq 1$.

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ e $x^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

Logo $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$.

(b) $\exists\, x \in \mathbb{R};\ \sqrt{x^{30}} = -x^{15}$

Sabe-se que $\sqrt{x^{30}} = \sqrt{(x^{15})^2} = |x^{15}| = -x^{15}$ apenas para $x<0$. Logo qualquer exemplo tal que $x<0$ é um exemplo onde $\sqrt{x^{15}} = -15$ é verdadeiro

$\sqrt{x^{40}} = \sqrt{(x^{20})^2} = |x^{20}| = x^{20}$, pois $x^{20} \geq 0\ \forall x$.

(c) $p:\ (x-1)(4-x) \geq 0$

(i) ~~não~~ p = $\sim p$: $(x-1)(4-x) < 0$

$q:\ y^2 < 2y$

(ii) ~~não~~ q $= \sim q$; $y^2 \geq 2y$

(iii) não $(p \text{ e } q) = \sim(p \text{ e } q) = \sim p$ ou $\sim q$

Logo, $\sim(p \text{ e } q)$: $(x-1)(4-x) < 0$ ou $y^2 \geq y$.

(d) $|x-2|^3 = (2-x)^3 \Rightarrow (2-x)^3 \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x$.

Logo a afirmação é falsa pois:

$2 \geq x \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x<2$ ou $x = 2 \not\Rightarrow x<2$.

(e) $x^{12} \geq x^7 \iff x^{12} - x^7 \geq 0 \iff x^7(x^5-1) \geq 0$.

$\not\Leftrightarrow x^5 \geq 1$, pois, contra-exemplo:

Contra-exemplo: $x = -1$, $(-1)^{12} = 1$ e $(-1)^7 = -1$

$1 > -1 \Rightarrow$ nesse exemplo $x^{12} > x^7$ é verdadeiro

e $x^5 = (-1)^5 = -1$, $-1 < 1$, nesse exemplo $x^5 \geq 1$ é falso

Conclusão: $x^{12} \geq x^7 \not\Leftrightarrow x^5 \geq 1$.

(2) $$E(x) = \frac{\frac{2}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}}{\frac{3-x}{\sqrt{x-1}}}$$

Restrições: I) $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$

II) $x-2 \neq 0 \iff x \neq 2$

III) $3-x \neq 0 \iff x \neq 3$

Resposta: $(1,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty) = D$

2) (b) $$\frac{\dfrac{2}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}}{\dfrac{3-x}{\sqrt{x-1}}} = \frac{\dfrac{2(x-2) - \sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-2)(\sqrt{x-1})}}{\dfrac{3-x}{\sqrt{x-1}}} =$$

$$= \frac{2x-4-(x-1)}{(x-2)\cancel{\sqrt{x-1}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{x-1}}}{3-x} = \frac{(x-3)}{(x-2)} \times \frac{1}{3-x} =$$

$$= \frac{-1}{x-2} \Rightarrow \quad E(x) = \frac{-1}{x-2}, \quad x \in D.$$

(c) $\dfrac{-1}{x-2} < \dfrac{3}{4-x^2}$, $x \in D$ e $x \neq \pm 2$ $\iff$

$$\frac{-1}{x-2} - \frac{3}{4-x^2} < 0 \iff \frac{-1}{x-2} + \frac{3}{x^2-4} < 0$$

$$\iff \frac{-1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x+2)} < 0 \iff \frac{-(x+2)+3}{x^2-4} < 0$$

$$\iff \frac{-x-2+3}{x^2-4} < 0 \iff \frac{-x+1}{x^2-4} < 0$$

		-2		1		2	
$-x+1$	+	+	+	0	−	−	−
x^2-4	+	0	−	−	−	0	+
$E(x)$	nd	nd	nd	nd	+	nd	−

Solução: $x > 2$, $x \in D$, resposta: $(2,3) \cup (3,\infty)$ //

(3) $f(x) = |2x+1| - |3x-2|$

$2x+1 > 0 \iff x > -1/2$

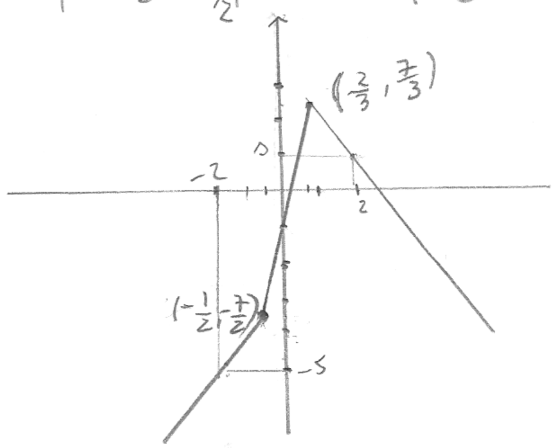
$3x-2 > 0 \iff x > 2/3$

$2 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$

$-\frac{3}{2} - 2 = -7/2$

	$x < -1/2$	$-1/2$	$-\frac{1}{2} < x < 2/3$	$2/3$	$x > 2/3$
$A = \lvert 2x+1 \rvert$	$-2x-1$	0	$2x+1$	$7/3$	$2x+1$
$B = \lvert 3x-2 \rvert$	$-3x+2$	$7/2$	$-3x+2$	0	$3x-2$
$A - B$	$x-3$	$-7/2$	$5x-1$	$7/3$	$-x+3$

(a)



$x = 2 \Rightarrow f(2) = -2 + 3 = 1$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -2 - 3 = -5$

(3) b) $|2x+1| - |3x-2| \geq 0$

Observando o gráfico, bastaria analisar para $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ e $x \geq \frac{2}{3}$.

Mas vamos analisar em todos os intervalos:

$\boxed{x < -\frac{1}{2}}$ $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$, $S_1 \neq \emptyset$

$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ $|2\times(-\frac{1}{2})+1| - |3\times(-\frac{1}{2}) - 2| = -\frac{7}{2} < 0$, $S_2 = \emptyset$

$\boxed{-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}}$ $5x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{5}$; $S_3 = [\frac{1}{5}, \frac{2}{3})$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{3}$

$\boxed{x = \frac{2}{3}}$ $|2\times\frac{2}{3}+1| - |3\times\frac{2}{3} - 2| = \frac{7}{3} > 0 \Rightarrow S_4 = \{\frac{2}{3}\}$

$x > \frac{2}{3}$; $-x + 3 \geq 0 \iff -x \geq -3 \iff x \leq 3$

$\frac{2}{3}$ 3

$S_5 = (\frac{2}{3}, 3]$.

Solução $= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 = [\frac{1}{5}, 3]$.

(c) $|2x+1| - |3x-2| = x$

$x < -\frac{1}{2}$: $x - 3 = x \iff -3 = 0$, não há solução.

$x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = -\frac{7}{2} \neq -\frac{1}{2}$, não é solução

$-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$, $5x - 1 = x \iff 4x = 1 \iff \boxed{x = \frac{1}{4}}$ é solução

$x = \frac{2}{3}$, $f(x) = +\frac{7}{3} \neq x$, não é solução

$x > \frac{2}{3}$, $-x + 3 = x \iff 2x = 3 \iff \boxed{x = \frac{3}{2}}$ é solução.

Solução $= \{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\}$

(d) $|2x+1| - |3x-2| = -x$

$x < -\frac{1}{2}$: $x - 3 = -x \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$, não é solução

$x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = -\frac{7}{2} \neq +\frac{1}{2} \Rightarrow$ não é solução

$-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$, $5x - 1 = -x \iff 6x = 1 \iff \boxed{x = \frac{1}{6}}$ é solução.

$x = \frac{2}{3}$, $f(x) = \frac{7}{3} \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow$ não é solução.

$x > \frac{2}{3}$, $-x + 3 = -x \iff 3 = 0$, não há solução

Solução $= \{\frac{1}{6}\}$

(4) (a) $4x^2 + y^2 - 8x - 10y + 36 = 0$.

$4x^2 - 8x + y^2 - 10y + 36 = 0$

$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) + 36 - 4 - 25 = 0$

$4(x-1)^2 + (y-5)^2 = -7$

Sabemos que $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow 4(x-1)^2 \geq 0$

$(y-5)^2 \geq 0 \quad \forall y$

Logo a soma $4(x-1)^2 + (y-5)^2 \geq 0 \quad \forall x, \forall y$.

Portanto não há x e não há y, com resultado da soma sendo negativo.

4) (b) $E(x) = \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x^3} - \frac{4}{x}} = \dfrac{\frac{2x-3}{x^2}}{\frac{5-4x^2}{x^3}} = \dfrac{(2x-3)}{x} \times \dfrac{x^3}{5-4x^2}$

$E(x) = \dfrac{x(2x-3)}{5-4x^2}$, domínio: $x \neq 0$

$5 - 4x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$x^2 \neq \frac{5}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

	$x<-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$-\sqrt{5}/2$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<0$	0	$0<x<\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}/2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3}{2}$	$3/2$	$x>3/2$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$5-4x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$E(x)$	$-$	nd	$+$	nd	$-$	nd	$+$	0	$-$

$\frac{3}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$

$E(x)$ está definida em $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$

$E(x) = 0$ em $x = 3/2$

$E(x) < 0$ em $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

$E(x) > 0$ em $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}\right)$