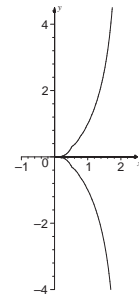


uff Universidade Federal Fluminense
 EGM - Instituto de Matemática
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 9 - 2008-1
 Função implícita
 Taxas relacionadas

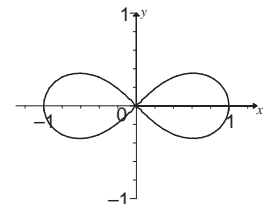
- Determine a expressão de pelo menos duas funções $y = y(x)$ definidas implicitamente pela equação $xy^2 + x + y = 1$. Explícite seus domínios.
- Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $\sec^2(x + y) - \cos^2(x + y) = \frac{3}{2}$. Calcule $f'(\frac{\pi}{4})$, sabendo que $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.
- Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2 - x\sqrt{xy} + 2y^2 = 10$. Encontre o coeficiente angular da reta normal ao gráfico da função f no ponto $(4, 1)$.
- Considere $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^4 - xy + y^4 = 1$. Calcule $f'(0)$, sabendo que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Considere a curva da figura ao lado conhecida por cissóide de Diocles cuja equação é $(2 - x)y^2 = x^3$.



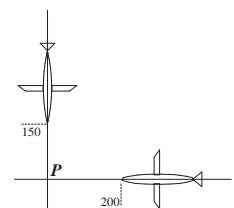
- Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da curva em $(1, 1)$;
- Obtenha as equações das retas tangentes ao gráfico da curva nos pontos em que $x = \frac{3}{2}$.

- Considere a lemniscata de equação $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (figura ao lado). Determine os quatro pontos da lemniscata em que as retas tangentes são horizontais. Ache, em seguida, os dois pontos em que as tangentes são verticais.

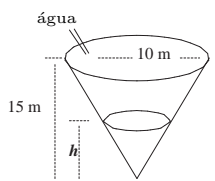


- Cascallho está caindo e formando uma pilha cônica que aumenta a uma taxa de $3 \text{ m}^3/\text{min}$, de modo que o raio do cone é sempre igual a sua altura. Encontre a taxa de variação da altura da pilha quando a altura é de 3 m.
- Uma câmara de televisão no nível do solo está filmando a subida de um ônibus espacial que está subindo verticalmente de acordo com a equação $s = 15t^2$, sendo s a altura e t o tempo. A câmara está a 600 m do local de lançamento. Encontre a taxa de variação da distância entre a câmara e a base do ônibus espacial, 10 seg após o lançamento (suponha que a câmara e a base do ônibus estão no mesmo nível no tempo $t = 0$).

- Num determinado instante, um controlador de tráfego aéreo vê dois aviões na mesma altura voando a velocidades constantes, em trajetórias ortogonais que se cruzam num ponto P (veja figura). Neste instante, um dos aviões está a 150 milhas do ponto P e se aproxima de P à 450 milhas por hora, enquanto o outro está a 200 milhas do ponto P e se movendo à 600 milhas por hora, também em direção ao ponto P .



- Antes do ponto P , a distância entre os aviões está diminuindo? a que taxa?
- Os aviões correm risco de choque? em caso afirmativo, quanto tempo o controlador tem para fazer com que um dos aviões mude a sua trajetória?

10. Um ponto move-se ao longo da elipse $x^2 + 4y^2 = 1$. A abscissa x está variando a uma velocidade $\frac{dx}{dt} = \text{sen } 4t$. Mostre que (a) $\frac{dy}{dt} = -\frac{x \text{sen } 4t}{4y}$ (b) $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\text{sen}^2 4t + 16xy^2 \cos 4t}{16y^3}$.
11. Um ponto move-se sobre a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 5$, $y \geq 0$. Suponha $\frac{dx}{dt} > 0$. Determine o ponto da curva em que a velocidade de y seja o dobro da velocidade de x .
12. Uma escada de 8 m está encostada numa parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/seg, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?
13. Enche-se de água um reservatório, cuja forma é de um cone circular reto (veja a figura), a uma taxa de $0,1 \text{ m}^3/\text{seg}$. O vértice está a 15 m do topo e o raio do topo é de 10 m. Com que velocidade o nível h da água está subindo no instante em que $h = 5 \text{ m}$?
- 
14. O raio de luz de um farol, que está situado a 3 km de uma praia reta, faz 8 rpm (rotações por minuto). Considere a altura do farol desprezível em relação a sua distância até a praia. Ache a velocidade da extremidade do raio de luz, ao longo da praia, quando ele faz um ângulo de 45° com a linha da praia.

RESPOSTAS

1. $y = f(x) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x - 4x^2}}{2x}$ $x = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.
 $y = g(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x - 4x^2}}{2x}$; Tangentes verticais em:
 domínio = $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ $x = 1$ e $y = 0$; $x = -1$ e $y = 0$.
2. -1
3. 0
4. $\frac{1}{4}$
5. (a) $y = 2x - 1$
 (b) $y = 3\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ e $y = -3\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
6. Tangentes horizontais em:
 $x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
 $x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;
 $x = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
7. 10,6 cm/min
8. 278,54 m/seg
9. (a) está diminuindo à velocidade escalar de 750 mi/h
 (b) 20 min
10. (-2, 1)
11. (-2, 1)
12. velocidade escalar de $\frac{6}{\sqrt{55}}$ m/seg $\cong 80,9$ cm/seg
13. $\frac{0,9}{100\pi}$ m/seg $\cong 0,2865$ cm/seg
14. $96\pi \cong 301,6$ km/min $\cong 5,03$ km/h