RESPOSTAS DA LISTA 5 (alguns estão com a resolução ou o resumo da resolução):

1. Resposta: $-\dfrac{7}{45} < -\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < -\dfrac{3}{20} < \dfrac{3}{20} < \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < \dfrac{7}{45}$

   Justificativa: observe que $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{28}}{-10} = \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$. Também observe que:
   $\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ e $-\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ são simétricos; $\dfrac{7}{45}$ e $-\dfrac{7}{45}$ são simétricos; $\dfrac{3}{20}$ e $-\dfrac{3}{20}$ são simétricos.
   Logo fica mais simples comparar primeiro os positivos e a seguir comparar os negativos.

   (i) Comparando $\dfrac{3}{20}$ e $\dfrac{7}{45}$.
   Como $20>0$ e $45>0$, temos que $\dfrac{3}{20} < \dfrac{7}{45} \iff \dfrac{3}{20}\times 20\times 45 < \dfrac{7}{45}\times 20\times 45 \iff 3\times 45 < 7\times 20 \iff 135 < 140$.
   Como a última desigualdade é verdadeira e vale a equivalência com a primeira desigualdade, concluímos que a primeira desigualdade é verdadeira, isto é, concluímos que $\dfrac{3}{20} < \dfrac{7}{45}$ é verdadeira.

   (ii) Comparando $\dfrac{3}{20}$ e $\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$.
   Como $20>0$, temos que $\dfrac{3}{20} < \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} \iff \dfrac{3}{20}\times 20 < 20\times\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} \iff 3 < 2\left(\sqrt{2\times 14}-\sqrt{14}\right)$.
   (por propriedade de raiz), $\iff 3 < 2\left(\sqrt{2}\sqrt{14}-\sqrt{14}\right) \iff 3 < 2\sqrt{14}\left(\sqrt{2}-1\right)$.
   Sabendo-se que $a=3>0$ e $b=2\sqrt{14}\left(\sqrt{2}-1\right)>0$, podemos usar a propriedade $a<b \iff a^2<b^2$. Logo,
   $3 < 2\sqrt{14}\left(\sqrt{2}-1\right) \iff (3)^2 < \left(4\sqrt{14}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 \iff 9 < 4\times 14\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \iff 9 < 56\left(2-2\sqrt{2}+1\right) \iff$
   $9 < 56\left(3-2\sqrt{2}\right) \iff 9 < 56\times 3 - 56\times 2\sqrt{2} \iff 56\times 2\sqrt{2} < 56\times 3 - 9 \iff 112\sqrt{2} < 159$.
   Como os números dos dois lados da desigualdade são positivos, podemos aplicar a mesma propriedade citada anteriormente, isto é, elevar ao quadrado os dois lados da desigualdade, como a seguir.
   $112\sqrt{2} < 159 \iff (112)^2\times 2 < (159)^2 \iff 25.088 < 25.281$.
   Como a última desigualdade é verdadeira e vale a equivalência com a primeira desigualdade, concluímos que a primeira desigualdade é verdadeira, isto é, concluímos que $\dfrac{3}{20} < \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ é verdadeira.

   (iii) Comparando $\dfrac{7}{45}$ e $\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$.
   Como $10>0$, temos que $\dfrac{7}{45}\times 10 < \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}\times 10 \iff \dfrac{7}{9}\times 2 < \sqrt{28}-\sqrt{14} \overset{(\times 9>0)}{\iff} 14 < 9\left(\sqrt{2\times 14}-\sqrt{14}\right)$
   $\iff 14 < 9\sqrt{14}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Podemos elevar ao quadrado os dois lados da desigualdade, pois ambos são positivos. Logo,
   $14 < 9\sqrt{14}\left(\sqrt{2}-1\right) \iff (14)^2 < (9)^2\left(\sqrt{14}\right)^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \iff (14)^2 < 81\times 14\left(2-2\sqrt{2}+1\right) \overset{(\div 14>0)}{\iff}$
   $14 < 81\left(3-2\sqrt{2}\right) \iff 14 < 81\times 3 - 81\times 2\sqrt{2} \iff 81\times 2\sqrt{2} < 81\times 3 - 14 \iff (81)^2\times 8 < 229 \iff 52.488 < 52.441$.
   Como a última desigualdade é falsa e vale a equivalência com a primeira desigualdade, concluímos que a primeira desigualdade é falsa, isto é, concluímos que $\dfrac{7}{45} < \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ é falsa.
   Em todo desenvolvimento acima podemos trocar $<$ por $=$. Como $52.488 = 52.441$ é falso, também concluímos que $\dfrac{7}{45} = \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ é falso. Pela tricotomia da ordem, só resta $\dfrac{7}{45} > \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ verdadeiro.

   Por (i), (ii) e (iii), obtemos a lista dos positivos em ordem crescente: $\dfrac{3}{20} < \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < \dfrac{7}{45}$.
   Para ordenar os negativos multiplicamos as duas desigualdades acima pelo número negativo -1, as desigualdades serão invertidas, isto é, $-\dfrac{3}{20} > -\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} > -\dfrac{7}{45}$. Escrevendo do menor para o maior, $-\dfrac{7}{45} < -\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < -\dfrac{3}{20}$.
   Finalmente, como todo negativo é menor que positivo, obtemos a lista completa ordenada que está na resposta.

2. (a) Resposta: $0,31 < \dfrac{1}{\pi} < 0,32$.
   Justificativa: $3,141 < \pi < 3,142 \Longrightarrow 3,141 < \pi$ e $\pi < 3,142$.
   Como todos os números são positivos, podemos dividir por esses números, as duas desigualdades se preservam.
   Logo, $3,141 < \pi$ e $\pi < 3,142 \Longrightarrow \dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3,141}$ e $\dfrac{1}{3,142} < \dfrac{1}{\pi} \Longrightarrow \dfrac{1}{3,142} < \dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3,141}$.
   Fazendo as contas, observamos que o resultado da divisão de 1 por 3,142 é tal que $0,31 < \dfrac{1}{3,142} < 0,32$.
   Fazendo as contas, observamos que o resultado da divisão de 1 por 3,141 é tal que $0,31 < \dfrac{1}{3,141} < 0,32$.
   Logo, garantimos que $0,31 < \dfrac{1}{3,142} < \dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3,141} < 0,32$.

   (b) Resposta: $-0,142 < 3-\pi < -0,141$

(c) $\dfrac{2}{0,142} < \dfrac{2}{\pi - 3} < \dfrac{2}{0,141}$. Fazendo contas de divisão, concluímos que $14,08 < \dfrac{2}{\pi - 3} < 14,19$. Logo, multiplicando as duas desigualdades por -1 obtemos a estimativa pedida, $-14,19 < \dfrac{2}{3-\pi} < -14,08$.
A amplitude do intervalo é $(-14,08) - (-14,19) = 14,19 - 14,08 = 0,11$.

3. Resposta: $3,8241 < a^2 - a + 4 < 3,8384$.
Justificativa: $0 < 0,21 < a < 0,22 \Longrightarrow (0,21)^2 < a^2 < (0,22)^2 \Longrightarrow 4 + (0,21)^2 < a^2 + 4 < 4 + (0,22)^2$
Por outro lado, $0,21 < a < 0,22 \Longrightarrow -0,22 < -a < -0,21$.
Assim, temos que $\begin{cases} 4 + (0,21)^2 < a^2 + 4 < 4 + (0,22)^2 \\ -0,22 < -a < -0,21 \end{cases}$ Somando termo a termo as desigualdades, obtemos
$4 + (0,21)^2 + (-0,22) < a^2 + 4 + (-a) < 4 + (0,22)^2 + (-0,21)$. Fazendo contas chega-se na resposta.

4. $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} + 4 < x^2 - x + 4 < \dfrac{9}{25} + \dfrac{3}{5} + 4 \Longrightarrow \dfrac{40}{9} < x^2 - x + 4 < \dfrac{124}{25}$

5. Racionalizando a expressão temos $\dfrac{3\sqrt{5} - 8}{\sqrt{5}} = \dfrac{15 - 8\sqrt{5}}{5} = 3 - \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$. Estimando $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$, encontramos,
$3,568 < \dfrac{8\sqrt{5}}{5} < 3,584 \Longrightarrow -3,584 < -\dfrac{8\sqrt{5}}{5} < -3,568 \Longrightarrow -0,584 < 3 - \dfrac{8\sqrt{5}}{5} < -0,568$.

6. (a) $-0,3 < a + b < -0,1$ (b) $4,0 < a - b < 4,2$ (c) $-0,075 < \dfrac{a+b}{a-b} < -0,023$

7. (a) $x \in \mathbb{R}$
(b) $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
(c) $x \in [1, \infty)$
(d) $x \in (1, \infty)$
(e) $x \in \mathbb{R}$
(f) $x \in [1, \infty)$
(g) $x \in \mathbb{R}$
(h) $x \in [1, \infty)$
(i) $x \in \mathbb{R}$
(j) $x \in [1, \infty)$
(k) $x \in [1, \infty)$
(l) $x \in [1, \infty)$
(m) $x \in \mathbb{R}$
(n) $x \in \mathbb{R}$

8. (a) $x \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$
(b) $x \in (-\infty, 1) \cap \mathbb{Q}$
(c) $x \in [-2, 1) \cap \mathbb{Q}$
(d) $x \in [(-\infty, -2] \cup (1, \infty)] \cap \mathbb{Q}$

9. $\left(\dfrac{a^{1/2} + 1}{a^{1/2} - 1} + \dfrac{a^{1/2} - 1}{a^{1/2} + 1} - \dfrac{4}{a - 1} \right)^{-3} = \left(\dfrac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \dfrac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \dfrac{4}{a - 1} \right)^{-3} =$
$= \left(\dfrac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} + \dfrac{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} - \dfrac{4}{a - 1} \right)^{-3} = \left(\dfrac{a + 2\sqrt{a} + 1}{a - 1} + \dfrac{a - 2\sqrt{a} + 1}{a - 1} - \dfrac{4}{a - 1} \right)^{-3} =$
$= \left(\dfrac{2a + 2}{a - 1} - \dfrac{4}{a - 1} \right)^{-3} = \left(\dfrac{2a - 2}{a - 1} \right)^{-3} = \left(\dfrac{2(a - 1)}{a - 1} \right)^{-3} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

10. $\dfrac{(15^{3a}) \times (30)^{1-a}}{2^{-a}} = \dfrac{(15^a)^3 \times (2 \times 15)^{1-a}}{2^{-a}} = \dfrac{(15^a)^3 \times (2)^{1-a} \times (15)^{1-a}}{2^{-a}} = \dfrac{(15^a)^3 \times 2 \times (2)^{-a} \times 15 \times (15)^{-a}}{2^{-a}} =$
$\dfrac{(15^a)^3 \times 2 \times 15}{15^a} = (15^a)^2 \times 30 = 4^2 \times 30 = 16 \times 30 = 480$.

11. Vamos aplicar a propriedade: se $x, y \in \mathbb{R}$ então $x < y \Longleftrightarrow x^3 < y^3$, fazendo $x = \sqrt[3]{a}$ e $y = \sqrt[3]{b}$.
Se $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b} \in \mathbb{R}$ então $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b} \Longleftrightarrow (\sqrt[3]{a})^3 < (\sqrt[3]{b})^3 \Longleftrightarrow a < b$.

12. Vamos aplicar a propriedade: se $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$ então $x < y \Longleftrightarrow x^2 < y^2$, fazendo $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$.
Se $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ e $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$ então $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Longleftrightarrow (\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2 \Longleftrightarrow a < b$.

13. (a) $f(x) = x^a$ tem potência ímpar; $g(x) = x^b$ tem potência par; $h(x) = x^c$ tem potência par;
$r(x) = x^d$ tem potência ímpar; $s(x) = x^e$ tem potência ímpar; $t(x) = x^f$ tem potência par.
(b) $f(x) = x^a$ tem potência positiva; $g(x) = x^b$ tem potência nula; $h(x) = x^c$ tem potência positita;
$r(x) = x^d$ tem potência negativa; $s(x) = x^e$ tem potência positita; $t(x) = x^f$ tem potência negativa.
(c) Os gráficos são os das funções: $f(x) = x^a$; $r(x) = x^d$; $s(x) = x^e$.
(d) As funções que admitem inversa são f, r, s.
<u>Para $f(x) = x^a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a ímpar</u>, temos que $y = x^a \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{a}} = (x^a)^{\frac{1}{a}} \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{a}} = x$,
logo a expressão da inversa é $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{y}$ ou $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$.
<u>Exemplo:</u> $f(x) = x^5$, $x \in \mathbb{R}$, $5 > 0$, 5 é ímpar, temos que $y = x^5 \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{5}} = \left(x^5\right)^{\frac{1}{5}} \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{5}} = x$,
logo a expressão da inversa é $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{y}$ ou $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

<u>Para $r(x) = x^d$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $d < 0$, d ímpar</u>, temos que $y = x^d \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{d}} = \left(x^d\right)^{\frac{1}{d}} \Longleftrightarrow y^{\frac{1}{d}} = x$.
Mas $d < 0 \Longleftrightarrow -d > 0$, $d = -(-d)$, assim $x = y^{\frac{1}{d}} = y^{\frac{1}{-(-d)}} = y^{-\frac{1}{-d}} = \dfrac{1}{y^{\frac{1}{-d}}} = \dfrac{1}{\sqrt[(-d)]{y}}$,
logo a expressão da inversa é $r^{-1}(y) = y^{\frac{1}{d}} = \dfrac{1}{\sqrt[(-d)]{y}}$ ou $r^{-1}(x) = x^{\frac{1}{d}} = \dfrac{1}{\sqrt[(-d)]{x}}$.

Exemplo: $r(x)=x^{-5}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $-5<0$, -5 ímpar, temos que $y=x^{-5}\iff y^{\frac{1}{-5}}=\left(x^{-5}\right)^{\frac{1}{-5}}\iff y^{\frac{1}{-5}}=x$.
Mas $-5<0\iff -(-5)>0$, $-5=-(5)$, assim $x=y^{\frac{1}{-5}}=y^{\frac{1}{-(5)}}=y^{-\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{y^{\frac{1}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{y}}$,
logo a expressão da inversa é $r^{-1}(y)=y^{\frac{1}{-5}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{y}}$ ou $r^{-1}(x)=x^{\frac{1}{-5}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

Para $s(x)=x^e$, $x\in\mathbb{R}$, $e>0$, e ímpar , já vimos que a expressão da inversa é $s^{-1}(y)=y^{\frac{1}{e}}$ ou $s^{-1}(x)=x^{\frac{1}{e}}$.
Observe que essa é a função $s(x)=x$, isto é, $e=1$. A inversa é $s^{-1}(y)=y$ ou $s^{-1}(x)=x$
Justificativa de $e=1$: o gráfico é uma reta e passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$.

(e) Observe que $g(x)=1$, isto é, $b=0$. Justificativa: o gráfico é uma reta e passa pelos pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$. Em qualquer subconjunto a função $g(x)=1$ não será injetora, logo não é possível encontrar dois conjuntos disjuntos onde a função admite inversa.

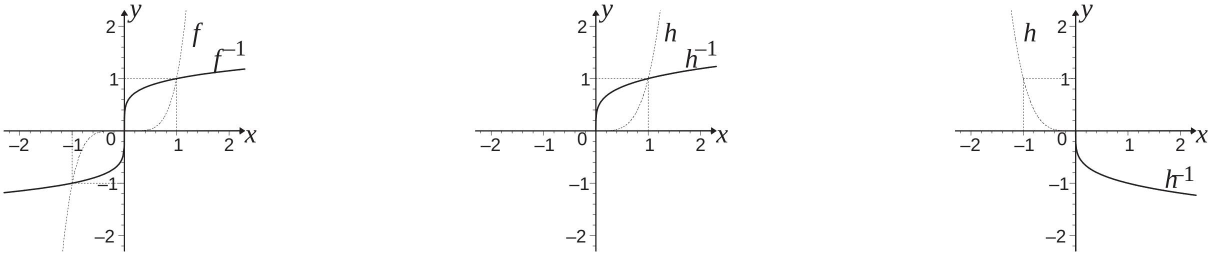
Para $h(x)=x^c$, $c>0$, c par, $x\in A=[0,\infty)$,
temos que $y=x^c\iff y^{\frac{1}{c}}=(x^c)^{\frac{1}{c}}\overset{c\text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{c}}=|x|\overset{x\geq 0}{\iff} y^{\frac{1}{c}}=x$,
logo a expressão da inversa é $h^{-1}(y)=y^{\frac{1}{c}}=\sqrt[c]{y}$ ou $h^{-1}(x)=x^{\frac{1}{c}}=\sqrt[c]{x}$.
Exemplo: $h(x)=x^4$, $4>0$ e 4 par, $A=[0,\infty)$,
logo expressão da inversa é $h^{-1}(y)=y^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{y}$ ou $h^{-1}(x)=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$.

Para $h(x)=x^c$, $c>0$, c par, $x\in B=(-\infty,0)$,
temos que $y=x^c\iff y^{\frac{1}{c}}=(x^c)^{\frac{1}{c}}\overset{c\text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{c}}=|x|\overset{x<0}{\iff} y^{\frac{1}{c}}=-x\iff -y^{\frac{1}{c}}=x$,
logo a expressão da inversa é $h^{-1}(y)=-y^{\frac{1}{c}}=-\sqrt[c]{y}$ ou $h^{-1}(x)=-x^{\frac{1}{c}}=-\sqrt[c]{x}$.
Exemplo: $h(x)=x^4$, $4>0$, 4 par, $x\in B=(-\infty,0)$,
a expressão da inversa é $h^{-1}(y)=-y^{\frac{1}{4}}=-\sqrt[4]{y}$ ou $h^{-1}(x)=-x^{\frac{1}{4}}=-\sqrt[4]{x}$.

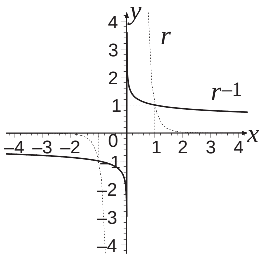
Para $t(x)=x^f$, $f<0$, f par, $x\in A=(0,\infty)$,
temos que $y=x^f\iff y^{\frac{1}{f}}=\left(x^f\right)^{\frac{1}{f}}\overset{c\text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{f}}=|x|\overset{x\geq 0}{\iff} y^{\frac{1}{f}}=x$,
Mas $f<0\iff -f>0$, $f=-(-f)$, assim $x=y^{\frac{1}{f}}=y^{\frac{1}{-(-f)}}=y^{-\frac{1}{-f}}=\dfrac{1}{y^{\frac{1}{-f}}}=\dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{y}}$,
logo a expressão da inversa é $t^{-1}(y)=y^{\frac{1}{f}}=\dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{y}}$ ou $t^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{x}}$.
Exemplo: $t(x)=x^{-4}$, $-4<0$ -4 é par, $x\in A=(0,\infty)$,
a expressão da inversa é $t^{-1}(y)=y^{\frac{1}{-4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}$ ou $t^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

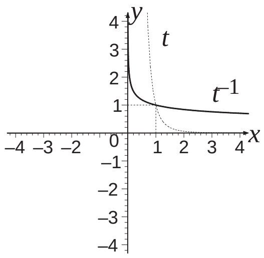
Para $t(x)=x^f$, $f<0$, f par, $x\in B=(-\infty,0)$,
temos que $y=x^f\iff y^{\frac{1}{f}}=\left(x^f\right)^{\frac{1}{f}}\overset{c\text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{f}}=|x|\overset{x\leq 0}{\iff} y^{\frac{1}{f}}=-x\iff -y^{\frac{1}{f}}=x$.
Mas $f<0\iff -f>0$, $f=-(-f)$, assim $x=-y^{\frac{1}{f}}=-y^{\frac{1}{-(-f)}}=-y^{-\frac{1}{-f}}=-\dfrac{1}{y^{\frac{1}{-f}}}=-\dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{y}}$,
logo a expressão da inversa é $t^{-1}(y)=-y^{\frac{1}{f}}=-\dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{y}}$ ou $t^{-1}(x)=-\dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{x}}$.
Exemplo: $t(x)=x^{-4}$, $-4<0$, -4 é par, $x\in B=(-\infty,0)$,
a expressão da inversa é $t^{-1}(y)=-\left(y^{\frac{1}{-4}}\right)=-\left(y^{-\frac{1}{4}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}$ ou $t^{-1}(x)=-\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

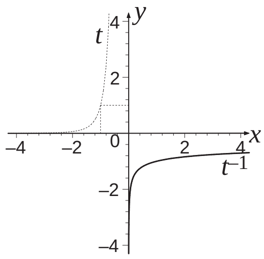
(f)



$f(x)=x^a$, $f^{-1}(x)=x^{1/a}=\sqrt[a]{x}$ $h(x)=x^c$, $h^{-1}(x)=x^{1/c}=\sqrt[c]{x}$ $h(x)=x^c$, $h^{-1}(x)=-x^{1/c}=-\sqrt[c]{x}$



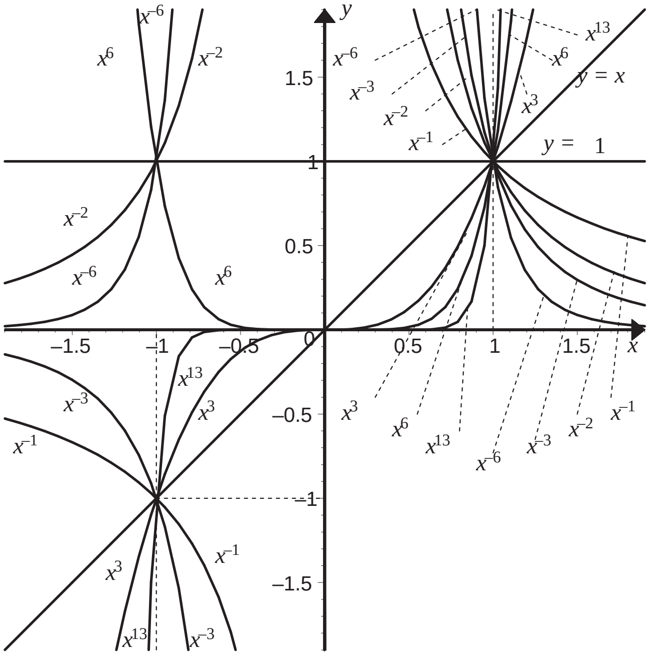




$r(x) = x^d$, $r^{-1}(x) = x^{\frac{1}{d}} = \dfrac{1}{\sqrt[(-d)]{x}}$ $\quad t(x) = x^f$, $t^{-1}(x) = x^{\frac{1}{f}} = \dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{x}}$ $\quad t(x) = x^f$, $t^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{f}} = -\dfrac{1}{\sqrt[(-f)]{x}}$

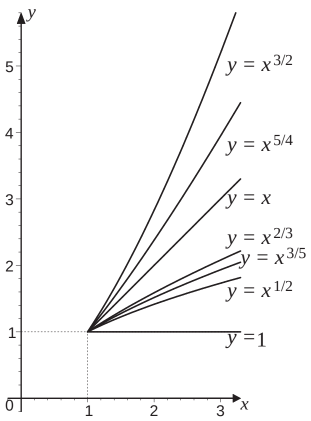
OBS. O gráfico da inversa da função $s^{-1}(x) = x$ é exatamente igual ao gráfico de $s(x) = x^e = x$.

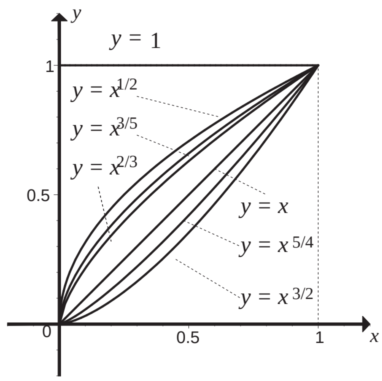
14.



15. (a) $-\dfrac{7}{4} < -\dfrac{3}{2} < -\dfrac{2}{3} < -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{2}{5} < 0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{3} < 1 < \dfrac{5}{4} < \dfrac{3}{2}$

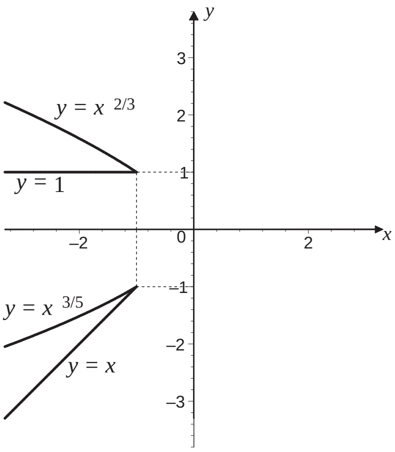
(b) i.



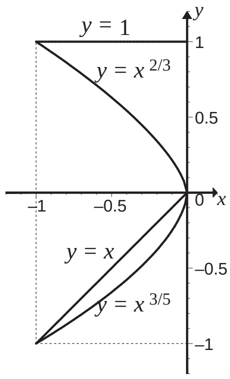


ii.

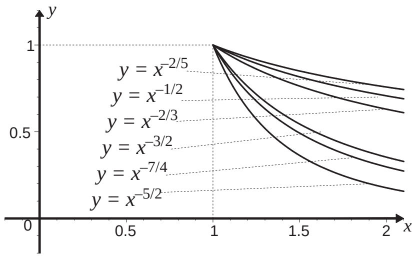
iii.



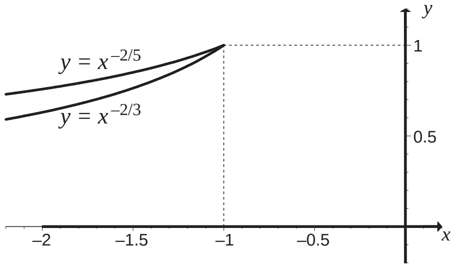
iv.



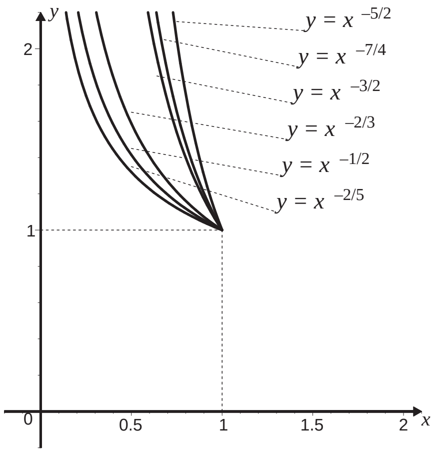
(c) i.



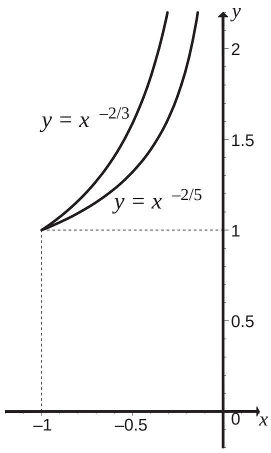
iii.



ii.



iv.



16. (a) Verdadeira. Base $b = 2 > 1$ e potências $p = 0,3$ e $q = 0,4$ onde $p < q$.
Para $b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, vale a propriedade: $b > 1$ e $p < q \Longrightarrow b^p < b^q$
Essa propriedade também pode ser escrita como: para base maior do que 1, se as potências crescem então a base elevada às potências também crescente.

(b) Falsa. Base $b = \frac{1}{2} > 1$ e potências $p = 0,5$ e $q = 0,6$ onde $p < q$.
Para $b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, vale a propriedade: $0 < b < 1$ e $p < q \Longrightarrow b^p > b^q$.
Essa propriedade também pode ser escrita como: para base maior do que 1, se as potências crescem então a base elevada às potências também crescem.
Outra justificativa: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,5} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,6} \Longleftrightarrow \dfrac{1^{0,5}}{2^{0,5}} < \dfrac{1^{0,6}}{2^{0,6}} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2^{0,5}} < \dfrac{1}{2^{0,6}}$.
Como $2^{0,5} > 0$ e $2^{0,5} > 0$, podemos aplicar a propriedade da ″multiplicação em cruz″ nessa última desigualdade.
Isto é, $\dfrac{1}{2^{0,5}} < \dfrac{1}{2^{0,6}} \Longleftrightarrow 2^{0,6} < 2^{0,5}$. Pela propriedade citada no item (a), essa última desigualdade é falsa.
Como há equivalência entre a primeira e a última desigualdade, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(c) Verdadeira. Justificativa: a base é maior que 1 e as potências estão em ordem crescente.

(d) Falsa. Justificativa: sabemos que $7/4 = 1,75 > 1,4$.
Mas $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,75} > \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,75} \Longleftrightarrow \frac{1}{3^{1,4}} < \frac{1}{3^{1,75}} \Longleftrightarrow 3^{1,75} < 3^{1,4}$. Essa desigualdade é falsa pois a base é maior do que 1 e as potências são decrescentes, a base elevada às potências deveria decrescer.

Como há equivalência entre a primeira e a última desigualdade, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(e) Verdadeira. Justificativa: base $b = \pi > 1$, as potências crescem, $-2 < 2$, logo base elevada às potências também cresce.

(f) Verdadeira. Justificativa: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5} > \left(\frac{1}{5}\right)^{5} \iff \frac{1}{5^{-5}} > \frac{1}{5^5} \iff 5^5 > \frac{1}{5^5} \iff 5^5 \cdot 5^5 > 1 \iff 5^{10} > 1.$

É claro que essa última desigualdade é verdadeira. Como há equivalência entre a primeira e a última desigualdade, conclui-se que a primeira desigualdade também é verdadeira.

(g) Falsa. Justificativa: sabemos que $3^0 = 1$. Logo, $3^{-1/5} > 1 \iff 3^{-1/5} > 3^0$. Essa última desigualdade é falsa, pois a base é maior do que 1 e a potência cresce, $-1/5 < 0$, logo a base elevada à potência deveria crescer. Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(h) Falsa. Justificativa: sabemos que $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1,5} = \left(\frac{7}{3}\right)^{1,5}$, pois $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1,5} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^{1,5}} = \frac{1}{\frac{3^{1,5}}{7^{1,5}}} = \frac{1}{3^{1,5}}\frac{7^{1,5}}{1} = \frac{7^{1,5}}{3^{1,5}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{1,5}$.

Também sabemos que $\left(\frac{7}{3}\right)^0 = 1$. Logo, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1,5} < 1 \iff \left(\frac{7}{3}\right)^{1,5} < \left(\frac{7}{3}\right)^0$. Essa última desigualdade é falsa, pois a base é maior do que 1 e a potência decresce, pois $1,5 > 0$, logo a base elevada à potência deveria decrescer. Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(i) Falsa. Justificativa: $\left(\frac{1}{7}\right)^2 > 1 \iff \frac{1}{7^2} > 1 \iff 1 > 7^2$. Essa última desigualdade é claramente falsa. Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(j) Falsa. Justificativa: $3^{-0,0001} = \frac{1}{3^{0,0001}}$. Como $3^{0,0001} > 0$, o seu elemento inverso, $\frac{1}{3^{0,0001}} > 0$.

(k) Verdadeira. Para justificar vamos usar duas propriedades, a saber,
P1: $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b \geq 0$, vale a equivalência $a < b \iff a^2 < b^2$; P2: $a, b \in \mathbb{R}$, vale a equivalência $a < b \iff a^3 < b^3$.
Sabemos que $\sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$. Logo,
$\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} \iff 11^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}} \overset{P2}{\iff} \left(11^{\frac{1}{3}}\right)^3 < \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 \iff 11 < 5^{\frac{3}{2}} \overset{P1}{\iff} 11^2 < \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2 \iff 11^2 < 5^3 \iff 121 < 125.$
Essa última desigualdade é claramente verdadeira.
Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é verdadeira.

(l) Verdadeira. Para justificar vamos usar as duas propriedades acima.
$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \iff 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} \overset{P1}{\iff} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 \iff 2 < 3^{\frac{2}{3}} \overset{P2}{\iff} 2^3 < \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 \iff 2^3 < 3^2 \iff 8 < 9.$
Essa última desigualdade é claramente verdadeira.
Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é verdadeira.

17. (a) $(x-4)^{2/3} = 100 \iff \left((x-4)^{2/3}\right)^3 = 100^3 \iff (x-4)^2 = 100^3 \iff (x-4) = \pm\sqrt{100^3} \iff x = 4 \pm \sqrt{(10^2)^3}$
$\iff x = 4 \pm 10^3 \iff x = 4 \pm 1000 \iff x = 1004$ ou $x = 996$.

(b) $x^{4/3} - x^{2/3} = 2$. Usando a substituição $u = x^{2/3}$, temos que $u^2 = \left(x^{2/3}\right)^2 \iff u^2 = x^{4/3}$.

Fazendo a substituição, obtemos $u^2 - u = 2$. Resolvendo a equação do 2o. grau em u, obtemos $u = 2$ e $u = -1$.
Quando $u = 2$, temos $x^{2/3} = 2$. Resolvendo essa equação, $x^{2/3} = 2 \iff x^2 = 2^3 \iff x = \pm\sqrt{2^3} \iff x = \pm 2\sqrt{2}$.
Quando $u = -1$, temos $x^{2/3} = -1$. Resolvendo, $x^{2/3} = -1 \iff x^2 = (-1)^3 \iff x^2 = -1$, não há solução real.
Logo as soluções da equação são $x = 2\sqrt{2}$ e $x = -2\sqrt{2}$.

(c) $(4x^2-1)^{3/4} = 27$.
Nesta equação o denominador da potência é par, logo a base deverá ser positiva, vamos ter que testar a solução que encontraremos.
$(4x^2-1)^{3/4} = 27 \iff (4x^2-1)^{3/4} = 3^3 \implies \left((4x^2-1)^{3/4}\right)^{4/3} = \left(3^3\right)^{4/3} \iff 4x^2 - 1 = 3^4 \iff 4x^2 = 1 + 81 \iff$
$4x^2 = 82 \iff x^2 = 82/4 \iff x = \pm\frac{\sqrt{82}}{2}$. Testando essas soluções, temos $4\left(\pm\frac{\sqrt{82}}{2}\right)^2 - 1 = 82 - 1 = 81 > 0$.
Logo as soluções são $\frac{\sqrt{82}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{82}}{2}$.

(d) $6x^{1/2} - x^{1/4} = 1$. Usando a substituição $u = x^{1/4}$, temos que $u^2 = \left(x^{1/4}\right)^2 \iff u^2 = x^{1/2}$.

Substituindo, obtemos $6u^2 - u = 1$. Resolvendo a equação do 2o. grau em u, obtemos $u = 1/2$ e $u = -1/3$.
Quando $u = 1/2$, temos $x^{1/4} = 1/2$. Resolvendo, $x^{1/4} = 1/2 \iff x = (1/2)^4 \iff x = 1/16$.
Quando $u = -1$, temos $x^{1/4} = -1/3$, não há solução real.
Logo a única solução da equação é $x = 1/16$.

(e) $x^{\frac{3}{2a}} - 8x^{-\frac{3}{2a}} = 7 \iff x^{\frac{3}{2a}} - \dfrac{8}{x^{\frac{3}{2a}}} = 7 \iff x^{\frac{6}{2a}} - 8 = 7x^{\frac{3}{2a}} \iff x^{\frac{3}{a}} - 7x^{\frac{3}{2a}} - 8 = 0.$

Fazendo $u = x^{\frac{3}{2a}}$, temos $u^2 = x^{\frac{3}{a}}$. Substituindo na equação, obtemos $u^2 - 7u - 8 = 0$, resolvendo, $u = 8$ ou $u = -1$.

Para $u = 8$, temos que $x^{\frac{3}{2a}} = 8$, resolvendo $x^{\frac{3}{2a}} = 8 \iff x^{\frac{3}{2a}} = 2^3 \iff x^{\frac{1}{2a}} = 2 \iff x = 2^{2a} \iff x = (2^2)^a \iff x = 4^a$.

Para $u = -1$, temos que $x^{\frac{3}{2a}} = -1$.

Mas, por hipótese, $a \in \mathbb{N}$, assim sabemos que $2a$ é par e $x^{\frac{3}{2a}} \geq 0$, isto é, não há solução quando $u = -1$.

18. (a) Podemos fazer $u = x^2$, $u^2 = x^4$ e substituir na equação. Obtemos $u^2 - u = y$ e podemos resolver u em termos de y.

Assim, $u^2 - u = y \iff u^2 - u - y = 0 \iff u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$.

Para que essa equação tenha solução é preciso que $1 + 4y \geq 0$. Mas $1 + 4y \geq 0 \iff 4y \geq -1 \iff y \geq -1/4$.

Quando $u = \dfrac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}$, como $u = x^2$, temos que $x^2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}$.

Por outro lado, sabemos que $\sqrt{1+4y} \geq 0$, logo $1 + \sqrt{1+4y} \geq 1 > 0 \Longrightarrow \dfrac{1 + \sqrt{1+4y}}{2} > 0$.

Assim, $\forall y \geq -1/4$, podemos resolver a equação acima, obtendo as soluções : $x = \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}}$ e $x = -\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}}$.

Quando $u = \dfrac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}$, como $u = x^2$, temos que $x^2 = \dfrac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}$.

Neste caso, não é para $\forall y \geq -1/4$ que $1 - \sqrt{1+4y} \geq 0$.

Precisamos resolver $1 - \sqrt{1+4y} \geq 0$. Resolvendo, $1 - \sqrt{1+4y} \geq 0 \iff -\sqrt{1+4y} \geq -1 \iff \sqrt{1+4y} \leq 1 \iff 1 + 4y \leq 1$

$\iff 4y \leq 0 \iff y \leq 0$. Assim, para $-1/4 \leq y \leq 0$ podemos resolver a equação acima, obtendo as soluções :

$x = \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}}$ e $x = -\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}}$.

(b) Podemos fazer $u = x^{1/4}$, $u^2 = x^{1/2}$ e substituir na equação. Obtemos $u^2 - 2u = y$ e podemos resolver u em termos de y.

Assim, $u^2 - 2u = y \iff u^2 - 2u - y = 0 \iff u = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4y}}{2} \iff u = 1 \pm \sqrt{1+y}$.

Para que essa equação tenha solução é preciso que $1 + y \geq 0$. Mas $1 + y \geq 0 \iff y \geq -1$.

Quando $u = 1 + \sqrt{1+y}$, como $u = x^{1/4}$, precisamos resolver $x^{1/4} = 1 + \sqrt{1+y}$.

Neste caso, sabemos que $\sqrt{1+y} \geq 0$, logo $1 + \sqrt{1+y} \geq 1 > 0$.

Portanto podemos resolver a equação acima, obtendo a solução $x = \left(1 + \sqrt{1+y}\right)^4$.

(c) Podemos fazer $u = x^3$, $u^2 = x^6$ e substituir na equação. Obtemos $u^2 + u = y$ e podemos resolver u em termos de y.

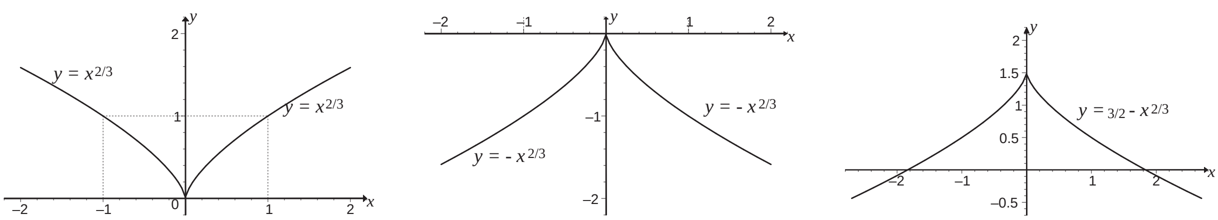
Resolvendo, $u^2 + u = y \iff u^2 + u - y = 0 \iff u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}$.

Para que essa equação tenha solução é preciso que $1 - 4y \geq 0$. Mas $1 - 4y \geq 0 \iff -4y \geq -1 \iff y \leq 1/4$.

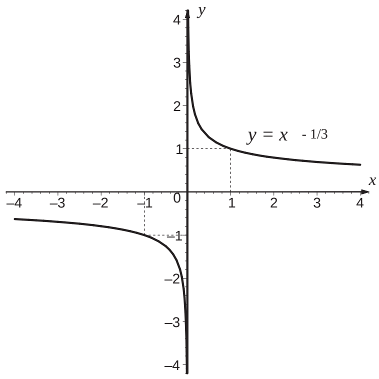
Quando $u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}$, temos que $x^3 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}$.

Para $y \leq 1/4$, as soluções são : $x = \sqrt[3]{\dfrac{-1 + \sqrt{1-4y}}{2}}$ e $x = \sqrt[3]{\dfrac{-1 - \sqrt{1-4y}}{2}}$.

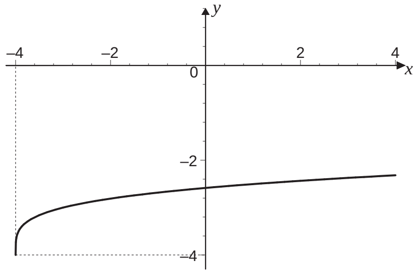
19. (a)



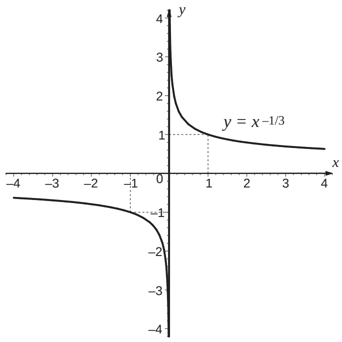
(b)

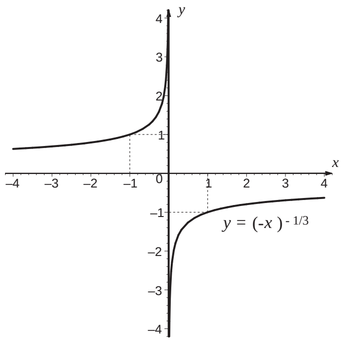


$$y = (x+4)^{1/4} - 4$$



(c)





$$y = (-(x-8))^{-1/3}$$