

RESPOSTAS DA LISTA 7 (alguns estão com a resolução ou o resumo da resolução):

1. Sabemos que para $i = 0, \dots, n$, $a_i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Substituindo i por $n-i$ temos

$$a_{n-i} = \binom{n}{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} = \frac{n!}{(n-i)!(n-n+i)!} = \frac{n!}{(n-i)!i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \text{ Logo } a_{n-i} = a_i.$$

2. No desenvolvimento do polinômio $(3x-2)^7$, o termo correspondente a $i = 2$ é:

$$\binom{7}{2} (3x)^5 (-2)^2 = \frac{7!}{2!5!} 3^5 x^5 \times 4 = \frac{5! \times 6 \times 7}{2 \times 5!} \times 4 \times 243 x^5 = 21 \times 4 \times 243 x^5. \text{ Logo o coeficiente é } 20.412.$$

3. $(a+2b-1)^8 = [(a+(2b-1))]^8$. O termo correspondente a $i = 4$ é igual a $\binom{8}{4} a^4 (2b-1)^4$.

$$\text{Desenvolvendo } (2b-1)^4, \text{ o termo correspondente a } i = 0 \text{ é: } \binom{4}{0} (2b)^4 (-1)^0 = \frac{4!}{0!4!} 16b^4 = \frac{1}{1} = 16b^4.$$

Logo o coeficiente de $a^4 b^4$ no desenvolvimento de $(a+2b-1)^8$ é:

$$\binom{8}{4} \times 16 = \frac{8!}{4!4!} \times 16 = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4!} \times 16 = 5 \times 2 \times 7 \times 16 = 1120.$$

4. Substituindo x por $\frac{b}{a}$ no desenvolvimento de $(1+x)^n$, obtemos

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{b}{a} + \binom{n}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \binom{n}{n} \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{b}{a} + \binom{n}{2} \frac{b^2}{a^2} + \dots + \binom{n}{n-1} \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} + \binom{n}{n} \frac{b^n}{a^n}.$$

$$\frac{(a+b)^n}{a^n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{b}{a} + \binom{n}{2} \frac{b^2}{a^2} + \dots + \binom{n}{n-1} \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} + \binom{n}{n} \frac{b^n}{a^n}.$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^n \frac{b}{a} + \binom{n}{2} a^n \frac{b^2}{a^2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^n \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} + \binom{n}{n} a^n \frac{b^n}{a^n}.$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

5. $a > 0$ e $b > 0 \implies a+b > 0 \implies \sqrt[n]{a+b} > 0$. Logo por hipótese, $0 < \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Como todos são positivos, podemos elevar os dois termos da desigualdade a qualquer potência natural que a desigualdade será preservada (ver exercício (9d)).

$$0 < \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \iff (\sqrt[n]{a+b})^n < (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n \iff a+b < (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n.$$

Aplicando o Binômio de Newton no termo do lado direito, obtemos a desigualdade equivalente,

$$a+b < \binom{n}{0} (\sqrt[n]{a})^n + \binom{n}{1} (\sqrt[n]{a})^{n-1} \sqrt[n]{b} + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{a})^{n-2} (\sqrt[n]{b})^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (\sqrt[n]{a}) (\sqrt[n]{b})^{n-1} + \binom{n}{n} (\sqrt[n]{b})^n$$

$$\iff a+b < \binom{n}{0} (\sqrt[n]{a})^n + \binom{n}{1} (\sqrt[n]{a})^{n-1} \sqrt[n]{b} + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{a})^{n-2} (\sqrt[n]{b})^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (\sqrt[n]{a}) (\sqrt[n]{b})^{n-1} + \binom{n}{n} (\sqrt[n]{b})^n$$

$$\iff a+b < \binom{n}{0} a + \binom{n}{1} (\sqrt[n]{a})^{n-1} \sqrt[n]{b} + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{a})^{n-2} (\sqrt[n]{b})^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (\sqrt[n]{a}) (\sqrt[n]{b})^{n-1} + \binom{n}{n} b$$

Como $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ e $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$, temos que a desigualdade equivalente,

$$a+b < a + \binom{n}{1} (\sqrt[n]{a})^{n-1} \sqrt[n]{b} + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{a})^{n-2} (\sqrt[n]{b})^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (\sqrt[n]{a}) (\sqrt[n]{b})^{n-1} + b \iff$$

$$0 < \binom{n}{1} (\sqrt[n]{a})^{n-1} \sqrt[n]{b} + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{a})^{n-2} (\sqrt[n]{b})^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (\sqrt[n]{a}) (\sqrt[n]{b})^{n-1}.$$

Todos os termos da soma da expressão acima são positivos, logo a soma também será positiva, isso significa que a última desigualdade é verdadeira para todo $a > 0, b > 0$.

Como todas as desigualdades são equivalentes, a primeira desigualdade, a que queríamos provar, também é verdadeira.

6. (a) $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} 1 + \binom{n}{2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n$.

(b) O número de elementos do conjunto das partes de A , é a seguinte soma: (número de conjuntos com 0 elementos) + (número de conjuntos com 1 elemento) + (número de conjuntos com 2 elementos) + \dots + (número de conjuntos com $(n-2)$ elementos) + (número de conjuntos com $(n-1)$ elementos) + (número de conjuntos com n elementos)

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \quad (\text{a última igualdade é a do item (a)}).$$

7. (a) É convergente pois a razão é $r = \frac{19}{20}$ e $|r| = \left| \frac{19}{20} \right| = \frac{19}{20} < 1$.

$$\text{O primeiro termo da série é } a = \frac{19}{20} \text{ e o valor da série é } S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{19}{20}}{1-\frac{19}{20}} = 19.$$

(b) É divergente pois a razão é $r = \frac{20}{19}$ e $|r| = \left| \frac{20}{19} \right| = \frac{20}{19} > 1$.

(c) A razão é $r = \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$ e $|r| = \left| \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \right| = \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$.

$$\frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} < 1 \iff 11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} \iff 121 \times 2 < 81 \times 3 \iff 242 < 243.$$

Assim, como a última desigualdade é verdadeira e vale a equivalência com a primeira desigualdade, concluímos que $\frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} < 1$, logo a série é convergente.

O primeiro termo da série é $a = \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$ e o valor da série é S , onde

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}}{1 - \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} = \frac{\frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}}{\frac{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} = \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} \times \frac{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}}{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} = \\ &= \frac{11 \times 9\sqrt{2}\sqrt{3} + 11^2 (\sqrt{2})^2}{9^2 (\sqrt{3})^2 - 11^2 (\sqrt{3})^2} = \frac{99\sqrt{6} + 242}{243 - 242} = 242 + 99\sqrt{6}. \end{aligned}$$

(d) A série não é geométrica, mas é diferença de duas séries geométricas.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right).$$

Sejam r_1 e r_2 os raios de convergência das séries, $|r_1| = \frac{1}{2} < 1$ e $|r_2| = \frac{1}{3} < 1$.

Logo as duas séries são convergentes e convergem para S_1 e S_2 , respectivamente.

$$S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1; \quad S_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}. \quad \text{Logo a série converge para } S_1 - S_2 = \frac{1}{2}.$$

8. (a) A razão é $r = 2x$. A série será convergente se e só se $|r| = |2x| < 1$. Resolvendo a inequação,

$$|2x| < 1 \iff -1 < 2x < 1 \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

O primeiro termo é $a = 1$, a série é convergente para o valor $S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-2x}$.

(b) A razão é $r = \frac{3}{x}$. A série será convergente se e só se $|r| = \left| \frac{3}{x} \right| < 1$, $x \neq 0$. Resolvendo a inequação,

$$\left| \frac{3}{x} \right| < 1 \iff \frac{3}{|x|} < 1 \iff 3 < |x| \iff |x| > 3 \iff x < -3 \text{ ou } x > 3. \quad \text{Isto é, } x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty).$$

O primeiro termo é $a = 3$, a série é convergente para o valor $S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{3}{\frac{x-3}{x}} = \frac{3x}{x-3}$.

(c) A razão é $r = -\frac{1}{x}$. A série será convergente se e só se $\left| -\frac{1}{x} \right| < 1$, $x \neq 0$. Resolvendo a inequação,

$$\left| -\frac{1}{x} \right| < 1 \iff \frac{|-1|}{|x|} < 1 \iff \frac{1}{|x|} < 1 \iff 1 < |x| \iff |x| > 1 \iff x < -1 \text{ ou } x > 1.$$

O primeiro termo é $a = 1$, a série é convergente para o valor $S = \frac{1}{1 - \frac{-1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$.

(d) A razão é $r = \frac{x}{2}$. A série será convergente se e só se $\left| \frac{x}{2} \right| < 1$. Resolvendo a inequação,

$$\left| \frac{x}{2} \right| < 1 \iff \frac{|x|}{2} < 1 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2.$$

O primeiro termo é $a = \frac{x^2}{4}$, $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x^2}{4}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{2-x}{2}} = \frac{x^2}{2(2-x)}$.

(e) A razão é $r = \frac{x}{x+1}$. A série será convergente se e só se $\left| \frac{x}{x+1} \right| < 1$, $x \neq -1$.

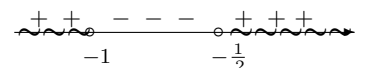
Vamos resolver essa equação usando propriedade de módulo, poderia ser resolvida usando definição de módulo.

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| < 1 \iff -1 < \frac{x}{x+1} < 1 \iff -1 < \frac{x}{x+1} \quad \text{e} \quad \frac{x}{x+1} < 1.$$

Atenção, para resolver essas duas equações não podemos multiplicar "em cruz" pois o termo $x+1$ pode ser positivo ou negativo.

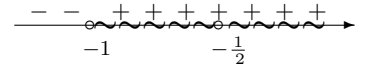
$$\text{Resolvendo a primeira, } -1 < \frac{x}{x+1} \iff 0 < \frac{x}{x+1} + 1 \iff \frac{x+x+1}{x+1} > 0 \iff \frac{2x+1}{x+1} > 0.$$

Analisando sinal,



Resolvendo a segunda, $\frac{x}{x+1} < 1 \iff \frac{x}{x+1} - 1 < 0 \iff \frac{x-x-1}{x+1} < 0 \iff \frac{-1}{x+1} < 0 \iff \frac{1}{x+1} > 0$,

Analisando sinal,



Fazendo a interseção das duas soluções, encontramos a solução final, $x > -\frac{1}{2}$.

$$a = \frac{x}{x+1}, \text{ a série é convergente para o valor } S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x}{x+1}}{1-\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+1-x}{x+1}} = \frac{x}{1} = x.$$

(f) Essa série tem razão igual a do item anterior, logo, $x > -\frac{1}{2}$.

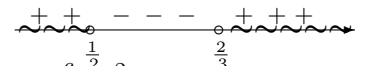
$$a = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+1)^2}, \quad S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x^2}{(x+1)^2}}{1-\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x^2}{(x+1)^2}}{\frac{x+1-x}{x+1}} = \frac{\frac{x^2}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x^2}{x+1}.$$

9. (a) Pela resposta do item 8(a), $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = 2 \iff \frac{1}{1-2x} = 2 \iff 1 = 2 - 4x \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$.
 $-\frac{1}{2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, logo $x = \frac{1}{4}$ é a solução da equação.

(b) $-3 < \frac{1}{1-2x} < 3 \iff -3 < \frac{1}{1-2x}$ e $\frac{1}{1-2x} < 3$. Resolvendo cada equação,

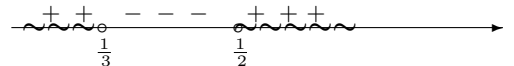
$$-3 < \frac{1}{1-2x} \iff 0 < \frac{1}{1-2x} + 3 \iff \frac{1+3-6x}{1-2x} > 0 \iff \frac{4-6x}{1-2x} > 0 \iff \frac{-(4-6x)}{-(1-2x)} > 0 \iff \frac{6x-4}{2x-1} > 0.$$

Analisando sinal na reta numérica,

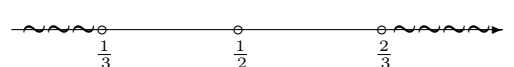


$$\frac{1}{1-2x} < 3 \iff \frac{1}{1-2x} - 3 < 0 \iff \frac{1-3+6x}{1-2x} < 0 \iff \frac{-2+6x}{1-2x} < 0 \iff \frac{6x-2}{1-2x} < 0 \iff \frac{6x^2-2}{2x-1} > 0.$$

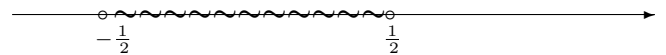
Analisando sinal na reta numérica,



Assim, encontramos a solução comum às duas inequações,



Mas, temos que restringir aos valores de x para que a série seja convergente, encontrados no item 8(a), que são :

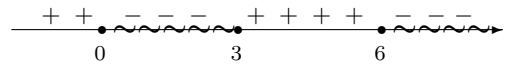


Logo a solução final das inequações é: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$.

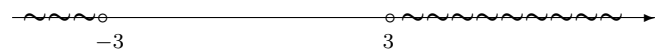
(c) Pela resposta do item 8(b), $3 + \frac{9}{x} + \frac{27}{x^2} + \frac{81}{x^3} + \dots \leq x \iff \frac{3x}{x-3} \leq x$. Resolvendo,

$$\frac{3x}{x-3} \leq x \iff \frac{3x}{x-3} - x \leq 0 \iff \frac{3x-x^2+3x}{x-3} \leq 0 \iff \frac{6x-x^2}{x-3} \leq 0 \iff \frac{x(6-x)}{x-3} \leq 0.$$

Usando tabela de sinais, encontramos a seguinte solução:



Mas, temos que restringir aos valores de x para que a série seja convergente, encontrados no item 8(b), que são :

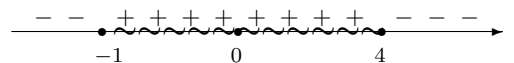


Logo a solução final da inequação é: $x \geq 6$.

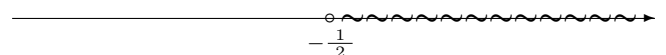
(d) Pela resposta do item 8(f), $\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^i \geq \frac{x^2}{x-4} \iff \frac{x^2}{x+1} \geq \frac{x^2}{x-4}$, resolvendo,

$$\frac{x^2}{x+1} \geq \frac{x^2}{x-4} \iff \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-4} \geq 0 \iff \frac{x^2(x-4) - x^2(x+1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \iff \frac{x^2(x-4-x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \iff \frac{-5x^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0.$$

Usando tabela de sinais, encontramos a seguinte solução:



Mas, temos que restringir aos valores de x para que a série seja convergente, encontrados no item 8(f), que são :



Logo a solução final da inequação é: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

10. (a) A razão da série à esquerda da igualdade é $r_1 = 2 - \frac{3}{x}$ e a da série à direita da igualdade é $r_2 = 1 - \frac{4}{x}$.
 Primeiro termo: $a_1 = 1$ e $a_2 = 8$. A série da esquerda converge para S_1 e da direita para S_2 .

$$S_1 = \frac{a_1}{1-r_1} = \frac{1}{1-2+\frac{3}{x}} = \frac{1}{-1+\frac{3}{x}} = \frac{1}{\frac{-x+3}{x}} = \frac{x}{3-x}. \quad S_2 = \frac{a_2}{1-r_2} = \frac{8}{1-1+\frac{4}{x}} = \frac{8}{\frac{4}{x}} = 2x.$$
 Logo, $S_1 = S_2 \iff \frac{x}{3-x} = 2x \implies x = 6x - 2x^2 \implies 2x^2 + x - 6x = 0 \implies 2x^2 - 5x = 0 \implies x(2x - 5) = 0$
 $\implies x = 0$ ou $2x - 5 = 0 \implies x = 0$ ou $x = \frac{5}{2}$.
 Testando esses valores de x na equação $S_1 = S_2$,
 $x = 0$, $S_1 = \frac{0}{3-0} = 0$ e $S_2 = 2 \times 0 = 0$. Logo $x = 0$ é solução da equação $S_1 = S_2$.
 $x = \frac{5}{2}$, $S_1 = \frac{\frac{5}{2}}{3-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5$ e $S_2 = 2 \times \frac{5}{2} = 5$. Logo $x = \frac{5}{2}$ é solução da equação $S_1 = S_2$.
- (b) Vamos testar se $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 1$ para os valores $x = 0$ e $x = \frac{5}{2}$.
 Nem $r_1 = 2 - \frac{3}{x}$, nem $r_2 = 1 - \frac{4}{x}$ estão definidos quando $x = 0$, pois o denominador não pode se anular.
 Para $x = \frac{5}{2}$, $r_1 = 2 - \frac{3}{\frac{5}{2}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \implies |r_1| = \frac{4}{5} < 1$, logo a série da esquerda da equação é convergente.
 Para $x = \frac{5}{2}$, $r_2 = 1 - \frac{4}{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5} \implies |r_2| = \frac{3}{5} < 1$, logo a série da direita da equação é convergente.
11. (a) A razão da série à esquerda da igualdade é $r_1 = 2 - \frac{3}{x}$ e a da série à direita da igualdade é $r_2 = 1 - \frac{4}{x}$.
 Primeiro termo: $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$. A série da esquerda converge para S_1 e da direita para S_2 .

$$S_1 = \frac{a_1}{1-r_1} = \frac{1}{1-2+\frac{3}{x}} = \frac{1}{-1+\frac{3}{x}} = \frac{1}{\frac{-x+3}{x}} = \frac{x}{3-x}. \quad S_2 = \frac{a_2}{1-r_2} = \frac{1}{1-1+\frac{4}{x}} = \frac{1}{\frac{4}{x}} = \frac{x}{4}.$$
 Logo, $S_1 = S_2 \iff \frac{x}{3-x} = \frac{x}{4} \implies 4x = 3x - x^2 \implies x^2 + 4x - 3x = 0 \implies x^2 + x = 0 \implies x(x+1) = 0$
 $\implies x = 0$ ou $x+1 = 0 \implies x = 0$ ou $x = -1$.
 Testando esses valores de x na equação $S_1 = S_2$,
 $x = 0$, $S_1 = \frac{0}{3-0} = 0$ e $S_2 = \frac{0}{4} = 0$. Logo $x = 0$ é solução da equação $S_1 = S_2$.
 $x = -1$, $S_1 = \frac{-1}{3-(-1)} = \frac{-1}{4}$ e $S_2 = \frac{-1}{4}$. Logo $x = -1$ é solução da equação $S_1 = S_2$.
- (b) Vamos testar se $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 1$ para os valores $x = 0$ e $x = -1$.
 Nem $r_1 = 2 - \frac{3}{x}$, nem $r_2 = 1 - \frac{4}{x}$ estão definidos quando $x = 0$, pois o denominador não pode se anular.
 Para $x = -1$, $r_1 = 2 - \frac{3}{-1} = 2 + 3 = 5 \implies |r_1| = 5 > 1$, logo a série da esquerda da equação é divergente.
 Para $x = -1$, $r_2 = 1 - \frac{4}{-1} = 1 + 4 = 5 \implies |r_2| = 5 > 1$, logo a série da direita da equação é divergente.
 Conclusão: a equação não tem solução.