Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 9 - 2015-1

Números complexos

1. Considere a seguinte lista de números complexos:
$z = i$; $z = 3$; $z = 1 - i$; $z = 2 - i$; $z = -2 - 3i$; $z = -i + \sqrt{2}$
   (a) Represente geometricamente cada número complexo z da lista, bem como o conjugado $\bar{z}$ de cada z.
   (b) Dê o valor absoluto de cada z e $\bar{z}$, isto é, calcule $|z|$ e $|\bar{z}|$ para cada $z \in \mathbb{C}$.
   (c) Encontre $w = \dfrac{z}{|z|}$ para cada z dessa lista. Verifique que para cada w, tem-se que $|w| = 1$.
   Represente geometricamente $w = \dfrac{z}{|z|}$ para cada z da lista.

2. Prove que $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0$.

3. Sejam $z_1 = 3i$, $z_2 = 4 - i$ e $z_3 = 2 + 4i$. Encontre z na forma $a + bi$, para:
   (a) $z = \dfrac{z_1 + z_3}{2}$ (b) $z = \dfrac{9}{z_1}$ (c) $z = z_1 z_3$ (d) $z = \dfrac{z_2}{z_1}$ (e) $z = \dfrac{z_1}{z_3}$

4. Considere os seguintes números complexos na forma polar:

$z_1 = 4\,(\cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi/3))$
$z_2 = (1/2)\,(\cos(2\pi/9) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi/9))$
$z_3 = \cos(7\pi/6) + i\,\mathrm{sen}\,(7\pi/6)$
$z_4 = \sqrt{2}\,(\cos(7\pi/4) + i\,\mathrm{sen}\,(7\pi/4))$

   Calcule e represente no plano complexo:
   (a) $\dfrac{z_1}{|z_1|}$ (b) $z_1 z_2$ (c) $\dfrac{z_2 z_3}{|z_2 z_3|}$ (d) $z_1 z_2 z_4$ (e) $\dfrac{z_1}{z_4}$ (f) $\dfrac{z_1^2 z_3^6}{|z_1^2 z_3^6|}$

5. Considere $z = a + ai$, onde a é uma constante real, $a \neq 0$.
Sabe-se que $arg(z)$ (argumento de z) é o único ângulo θ que z faz com o eixo real tal que $0 \leq \theta < 2\pi$, isto é, $0 \leq arg(z) < 2\pi$.
   (a) Represente z no plano complexo (considere os casos $a > 0$ e $a < 0$ separadamente)
   (b) Determine $\arg z$ (considere os casos $a > 0$ e $a < 0$ separadamente).
   (c) Sem fazer cálculos, determine o argumento principal de z^2 quando $a > 0$.
   (d) Sem fazer cálculos, determine o argumento principal de z^n quando $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Sem fazer cálculos, determine o argumento principal de z^3 quando $a < 0$.

6. Considere $z = -a + ai$, onde a é uma constante real, $a \neq 0$.
   (a) Represente z no plano complexo (considere os casos $a > 0$ e $a < 0$ separadamente)
   (b) Determine $\arg z$ (considere os casos $a > 0$ e $a < 0$ separadamente).
   (c) Sem fazer cálculos, determine o argumento principal de z^2 quando $a > 0$.
   (d) Sem fazer cálculos, determine o argumento principal de z^n quando $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Sem fazer cálculos, determine o argumento principal de z^3 quando $a < 0$.

7. Transforme os seguintes números complexos para a forma polar:
   (a) $4\sqrt{3} + 4i$ (b) $-\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ (c) $2 - 2i$ (d) $-i$

8. Resolva as equações, considerando $z \in \mathbb{C}$.
   (a) $z^4 = 4\sqrt{3} + 4i$ (b) $z^3 = 27 - 27i$ (c) $z^5 = -i$