Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 2 - 2015-1
Integral Tripla

---

1. Calcule $\iiint_W x\, dV$, onde W é o tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x+\frac{y}{2}+z=4$.
2. Calcule $\iiint_W dV$, onde W é a região do primeiro octante, limitada por $x=4-y^2,\ y=z,\ x=0$ e $z=0$.
3. Calcule $\iiint_W dV$, onde W é o sólido delimitado por $x=0,\ y=0,\ x+y=2,\ z=x^2+y^2$ e $z=0$.
4. Calcule $\iiint_W (y-1)\, dV$, onde W é a região delimitada por $x=0,\ z=0,\ x+z=2$ e $z=1-y^2$.
5. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W está situado no primeiro octante, limitado pelos planos $z=0,\ x=0,\ y=2x$ e pelo cilindro $y^2+z^2=4$.
6. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W é o sólido limitado pelos planos $x=0,\ y=0,\ z=0,\ y+z=1$ e $x+z=1$.
7. Calcule $\iiint_W 24z\, dV$, onde W é o sólido limitado por $x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,$ e $z=1$.
8. Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido W limitado por:
   (a) $y=0,\ y=4,\ z=9-x^2,\ y+z=4$.
   (b) $z=4-x^2-y^2$ e $z=y$, situado no interior do cilindro $x^2+y^2=1,\ z\geq 0$.
   (c) $z=3x^2,\ z=4-x^2,\ y=0$ e $z+y=6$.
   (d) $y=0,\ z=0,\ x+y=2,\ 2y+x=6,\ y^2+z^2=4$, no primeiro octante.
   (e) $y=0,\ z=0,\ z+x^2=4,\ y+z=4$.
   (f) $x^2+y^2=1,\ y\geq 0,\ y+z=1,\ z=1$.
   (g) $z=1-x^2,\ y+z=2,\ z-y=1,\ z=0$.
   (h) $z=-y,\ y=x^2-1,\ z=0$.
9. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$ e $x^2+y^2+z^2=4$.
10. Calcule $\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV$, onde W é a região interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=1$.
11. Calcule $\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\, dV$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ e $z=2$.
12. Considere a integral iterada $I=\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\, dzdydx$.
    (a) Expresse I em coordenadas cilíndricas e calcule o seu valor.
    (b) Expresse I em coordenadas esféricas e calcule o seu valor.
13. Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z=\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$.
14. Calcule o volume do sólido W dado por $x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1$ e $z\geq x^2+y^2$.
15. Calcule a massa do sólido W situado no primeiro octante, limitado pelos planos $x=0,\ y=2x$ e pelo cilindro $y^2+z^2=2$, supondo que a densidade no ponto (x,y,z) é proporcional à distância deste ponto ao plano xy.

16. Calcule a massa do sólido W, limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 1$, $z + y = 2$ e $z = 0$, se a densidade em (x, y, z) é dada por $\rho(x, y, z) = z$.

17. Calcule a massa do sólido limitado pelo plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, se a densidade é $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

18. Calcule a massa do sólido limitado superiormente por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, inferiormente por $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$, sendo a densidade igual ao quadrado da distância de (x, y, z) ao plano $z = 0$.

19. Calcule a massa do sólido $W : x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$, sendo a densidade dada por $\rho(x, y, z) = 2z$.

20. Encontre a massa da região sólida limitada pelas superfícies $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ e $z = 2x^2 + 2y^2$, se a densidade do sólido é $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

21. Encontre o momento de inércia I_z do sólido no primeiro octante, limitado pelas superfícies $z = y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $x = 0$, sendo a densidade dada por $\rho(x, y, z) = kz$, onde $k > 0$ é uma constante.

22. Calcule a componente $\bar{z}$ do centro de massa do sólido W dado por $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8z$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, se a densidade no ponto (x, y, z) é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

23. Considere o cilindro homogêneo $x^2 + (y - a)^2 \leq a^2$ e $0 \leq z \leq h$. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z, em função da massa M do cilindro.

24. Seja $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y^2} dzdydx$. Reescreva a integral I na ordem $dxdydz$.

25. Seja o volume do sólido W comum às esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$. Expresse (sem calcular) o volume de W em

    (a) em coordenadas cilíndricas na ordem $dzdrd\theta$.

    (b) em coordenadas esféricas na ordem $d\rho d\phi d\theta$.

Respostas

1. $\frac{64}{3}$
2. 4
3. $\frac{8}{3}$
4. $-\frac{32}{15}$
5. 1
6. $\frac{1}{12}$
7. 11
8. (a) $\frac{8}{15}\left(243-25\sqrt{5}\right)$
   (b) $\frac{21\pi-4}{6}$
   (c) $\frac{304}{15}$
   (d) $\frac{4}{3}(3\pi-2)$
   (e) $\frac{128}{5}$
   (f) $\frac{2}{3}$
   (g) $\frac{44}{15}$
   (h) $\frac{8}{15}$
9. π
10. $\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$
11. $\frac{64\pi}{15}$
12. (a) $\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 z\ dzd\theta dr = \frac{16\pi}{15}$
    (b) $\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4\cos\phi\,\mathrm{sen}^2\phi\ d\phi d\theta d\rho = \frac{16\pi}{15}$
13. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$
14. $\frac{7\pi}{6}$
15. $\frac{k}{4}$
16. $\frac{17\pi}{8}$
17. $\frac{512}{75}$
18. $\frac{51\pi}{32}$
19. $\frac{7\pi}{2}$
20. $\frac{512\pi}{15}$
21. $\frac{k\pi}{48}$
22. $\frac{25}{8}$
23. $\frac{3Ma^2}{2}$
24. $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}}\int_0^{y^2} dxdydz$
25. (a) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\ dzdrd\theta$
    (b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ d\rho d\phi d\theta\ +$
    $+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\phi} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ d\rho d\phi d\theta$