uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 3 - 2015-1
Integral de Linha de Campo Escalar

---

1. Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

   (a) $C: \ x = y^2, \quad 0 \leq x \leq 2$
   (b) $C: \ x^2 + y^2 = 4, \quad y \geq 0$
   (c) $C: \ x^2 + 4y^2 = 4, \quad x \geq 0$
   (d) $C: \ x^2 + y^2 + x + y = 0$
   (e) $C: \ x^2 + y^2 = 16, \quad x \geq 2$
   (f) $C: \ x^2 + y^2 = 4x, \quad y \geq 0$
   (g) $C: \ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$
   (h) $C: \ 2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$
   (i) $C: \ 16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

2. Apresente uma parametrização diferenciável para a curva C em $\mathbb{R}^3$, interseção das superfícies dadas por:

   (a) $z = 1 - x^2, \ z \geq 0 \quad e \quad x = y$
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}, \ R > 0$, situada no primeiro octante.
   (c) $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$
   (d) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante.
   (e) $x^2+y^2+z^2 = 8-2(x+y), \quad z \geq 0$ e $x+y = 2$
   (f) $z = 3x^2 + y^2$ e $z + 6x = 9$
   (g) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ z \geq 0$
   (h) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y, \quad z \geq 0$ e $z - y + 1 = 0$

3. Calcule $\displaystyle\int_C f(x,y)ds$, onde

   (a) $f(x,y) = xy$ e C parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
   (b) $f(x,y) = xy$ e C é o segmento de reta de $(2,1)$ a $(4,5)$.
   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e C é a semicircunferência $x^2 + y^2 = a^2, \ a > 0$, com $y \geq 0$.
   (d) $f(x,y) = x - y$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 = ax, \ a > 0$.
   (e) $f(x,y) = 8x$ e C é formada pelos arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de reta vertical de $(1,1)$ a $(1,2)$.

4. Calcule $\displaystyle\int_C f(x,y,z)ds$, onde

   (a) $f(x,y,z) = 3x^2yz$ e C é a curva dada por $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right), \ 0 \leq t \leq 1$.
   (b) $f(x,y,z) = x + y + z$ e C é o segmento de reta de $(1,2,3)$ a $(0,-1,1)$.
   (c) $f(x,y,z) = y(x+z)$ e C é a curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, com $y \geq 0$ e $x + z = 3$.
   (d) $f(x,y,z) = xyz$ e C é a curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, situada no primeiro octante.
   (e) $f(x,y,z) = x$ e C é a interseção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a parte do plano $z = x$, tal que $0 \leq x \leq 1$.

5. Seja C a curva interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ a > 0, \ x \geq 0$, com o plano $y = z$. Determine o valor de a, se $\int_C 3xyz \ ds = 16$.

6. Sabendo que $I = \displaystyle\int_C \frac{ds}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = 8$, onde C é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, calcule a área da região limitada pela elipse.

7. Um pedaço de arame tem a forma da curva C interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2(x + y)$ com o plano $z - y = 1$. Calcule a massa do arame se a densidade é dada por $\rho(x, y, z) = x^2$.

8. Achar a massa da curva dada por $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$, $0 \le t \le 1$, se a densidade em cada ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

9. Calcule a primeira coordenada do centro de massa de um fio homogêneo que está ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\, t^{\frac{5}{2}}\right)\vec{j} + \left(\frac{t^4}{4}\right)\vec{k}$, $0 \le t \le 2$.

10. Um arame tem a forma de uma curva obtida como interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x \ge 0$, com o plano $y + z = 4$. Sabendo que a densidade em cada ponto (x, y, z) é dada por $\rho(x, y, z) = x$, mostre que o momento de inércia em relação ao eixo x é igual a $\frac{32M}{3}$, onde M é a massa do arame.

11. Calcule a massa da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, situada no primeiro quadrante, se a densidade em cada ponto é igual ao produto das coordenadas do ponto.

12. Calcule a área de um lado da superfície S cuja base é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no plano xy, e a altura em cada ponto (x, y) é $f(x, y) = 1 - x^2$.

13. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2$, $z \ge 0$. Se o metro quadrado do zinco custa M reais, calcule o preço total da peça.

14. Um pintor deseja pintar os dois lados de uma cerca cuja base é uma curva C no plano xy dada por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 20^{\frac{2}{3}}$, para $x \ge 0$ e $y \ge 0$. A altura em cada ponto $(x, y) \in C$ é dada por $f(x, y) = y$. Se o pintor cobra R reais por m^2, quanto ele receberá?

15. Seja dado um arame semicircular homogêneo de raio 4 cm.

    (a) Mostre que o centro de massa está situado no eixo de simetria a uma distância de $\frac{8}{\pi}$ cm do centro.

    (b) Mostre que o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelos extremos do arame é $8M$, sendo M a massa do arame.

16. Um arame fino é entortado no formato da curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y = x$, situado no primeiro octante e que liga o ponto $A = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ ao ponto $B = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$. Calcule a massa do arame, sendo a densidade em cada ponto proporcional ao quadrado da distância do ponto ao plano yz.

17. Um arame fino tem a forma da curva interseção das superfícies $x^2+y^2+z^2 = 1+2z+x$ e $z = 1+y$, $z \ge 1$. Determine a massa do arame, se a densidade em qualquer ponto é igual ao quadrado da distância do ponto ao plano xz.

18. Calcule o momento de inércia de um fio retilíneo homogêneo de comprimento L, em torno de um eixo perpendicular ao fio e passando por uma das extremidades do fio, em função de sua massa.

19. Um fio delgado tem a forma do segmento de reta que une os pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$. Determine o momento de inércia em relação à reta $y = -1$, supondo que a densidade no ponto (x, y) é proporcional à distância do ponto ao eixo y.

Respostas

1. (a) $\vec{r}(t) = (t^2, t), \quad 0 \le t \le \sqrt{2}$ é uma parametrização diferenciável; $\vec{r}(t) = (t, \sqrt{t}), \quad 0 \le t \le 2$ é também uma parametrização de C, mas não é diferenciável, pois não existe $\vec{r}\,'(0)$.
   (b) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t),\ 0 \le t \le \pi$
   (c) $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ \mathrm{sen}\, t),\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
   (d) $\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\, t\right),\ 0 \le t \le 2\pi$
   (e) $\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t),\ -\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}$
   (f) $\vec{r}(t) = (2 + 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t),\ 0 \le t \le \pi$
   (g) $\vec{r}(t) = (\cos^3 t,\ \mathrm{sen}^3 t),\ 0 \le t \le 2\pi$
   (h) $\vec{r}(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\cos t, -1 + \frac{3\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{sen}\, t\right),\ 0 \le t \le 2\pi$
   (i) $\vec{r}(t) = (-2 + 3\cos t, 1 + 4\,\mathrm{sen}\, t),\ 0 \le t \le 2\pi$

2. (a) $\vec{r}(t) = \left(t, t, 1 - t^2\right),\ -1 \le t \le 1$
   (b) $\vec{r}(t) = \left(\frac{R}{2}\cos t, \frac{R}{2}\,\mathrm{sen}\, t, \frac{\sqrt{3}R}{2}\right),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
   (c) $\vec{r}(t) = (\cos t,\ \mathrm{sen}\, t, 2 -\ \mathrm{sen}\, t),\ 0 \le t \le 2\pi$
   (d) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 2\,\mathrm{sen}\, t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
   (e) $\vec{r}(t) = \left(1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\right),\ 0 \le t \le \pi$
   (f) $\vec{r}(t) = \left(-1 + 2\cos t, 3\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, 15 - 12\cos t\right),\ 0 \le t \le 2\pi$
   (g) $\vec{r}(t) = \left(1 + \cos t,\ \mathrm{sen}\, t, 2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\right),\ 0 \le t \le 2\pi$
   (h) $\vec{r}(t) = \left(\cos t, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\, t, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\, t\right),\ 0 \le t \le \pi$

3. (a) $\frac{1}{2}$
   (b) $\frac{58\sqrt{5}}{3}$
   (c) 0
   (d) $\frac{\pi a^2}{2}$
   (e) $\frac{10\sqrt{5}+22}{3}$

4. (a) $\frac{13}{20}$
   (b) $3\sqrt{14}$
   (c) 27
   (d) $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$
   (e) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$

5. $a = 2$

6. 4

7. $5\pi\sqrt{3}$

8. $\frac{\sqrt{3}\,k}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$

9. $\frac{7}{5}$

11. $\frac{38}{5}$

12. π

13. $(6\pi + 8)\,M$

14. $480R$

16. $\frac{\pi+2}{2}$

17. $\frac{27\pi}{32}$

18. $\frac{ML^2}{3}$

19. $\frac{119\sqrt{2}\ k}{12}$