uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 1 - 2015-1
Noções de lógica

1. Diga se as afirmações abaixo são sentenças abertas ou fechadas. Se for fechada, diga se é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

   (a) O número natural 20 é divisor de 100.
   (b) Os divisores de 100 são 2, 5 e 10.
   (c) Os números naturais 2, 5 e 10 são divisores de 100.
   (d) O número natural a é divisor de 100.
   (e) $a = 20$ é divisor de 100.

2. Antes de iniciar, observamos que quando escrevemos $x = \pm 4$, não estamos usando o ″ou″ da lógica, estamos usando o ″ou″, com outro significado,

   $x = \pm 4$ significa que existem dois valores possíveis de x, e os dois não ocorrem simultaneamente.

   (i) $x = 4$ e $x \neq -4$ ou (exclusivo) (ii) $x = -4$ e $x \neq 4$

   Agora, vamos ao exercício. Considere as afirmações

   p : $x = \pm 10$ é solução de $x^2 = 100$ para $x \in \mathbb{R}$;
   q : $20 - 3\sqrt{100} = -10$;
   r : $\sqrt{100} = \pm 10$.
   s : $\sqrt{100} = 10$.
   t : $\sqrt{100} = -10$.

   Atribua o valor verdadeiro (V) ou o valor falso (F) a cada uma das afirmações:

   (a) p
   (b) q
   (c) r
   (d) s
   (e) t
   (f) $p \wedge q$
   (g) $p \wedge r$
   (h) $q \wedge r$
   (i) $p \vee q$
   (j) $p \vee r$
   (k) $q \vee r$
   (l) $p \wedge (q \vee r)$
   (m) $(p \wedge q) \vee r$
   (n) $p \wedge q \vee r$
   (o) $p \wedge q \wedge r$
   (p) $p \wedge \sim q$
   (q) $p \wedge \sim r$
   (r) $p \wedge s$
   (s) $\sim q \wedge s$
   (t) $p \vee s$
   (u) $\sim q \vee s$
   (v) $\sim p \wedge (q \vee s)$
   (w) $(\sim p \wedge q) \vee s$
   (x) $\sim p \wedge \sim s$
   (y) $\sim p \wedge (q \vee t)$
   (z) $(\sim p \wedge q) \vee t$

3. Antes de iniciar, vamos fazer duas observações importantes:

   Obs 1 Quando estudamos a relação de ordem dos números reais vimos a seguinte propriedade:

   Dados dois números reais a e b uma e só uma das três afirmações é verdadeira (chamamos isso de tricotomia):

   (i) $a < b$ ou(exclusivo) (ii) $a = b$ ou(exclusivo) (iii) $a > b$

   Obs 2

   Quando escrevemos $x \leq 4$, estamos usando o ″ou exlusivo″, isto é, uma dicotomia.

   Justificativa: $x \leq 4$ significa uma e só uma das duas possibilidades:

   (i) $x < 4$ ou (exclusivo) (ii) $x = 4$

   Agora, vamos ao exercício. Negue as afirmações.

   (a) David pesa mais de $50\,kg$ e mede menos do que $1,55\,m$.
   (b) Suponha x um número real. Afirmação: $x^2 > 3$ e $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

(c) Dado um número natural a, afirmação: a é tal que (i) $a > 10$ ou (ii) $a < 5$.

4. Antes de iniciar, vamos lembrar de algumas propriedades dos reais que eventualmente poderão ser usadas nesse exercício. Essas propriedades serão estudadas novamente mais adiante.

   (P1) Propriedade de fechamento dos números reais: $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{R}$ e $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

   (P2) Propriedade dos números reais: $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a^2 \geq 0$.

   (P3) Propriedade dos números reais: $a, b \in \mathbb{R}$; $a \geq 0$ e $b \geq 0 \Longrightarrow a \cdot b \geq 0$

   (P4) Propriedade dos números reais: $a, b \in \mathbb{R}$; $a \geq 0$ e $b \geq 0 \Longrightarrow a + b \geq 0$

   Agora, vamos ao exercício. Atribua um valor verdadeiro ou um valor falso a cada afirmação. Justifique sua resposta.

   (a) Existe um número natural a tal que $a < 10$ e $a > 5$.
   (b) Existe um número natural a tal que $a < 10$ e $a > 9$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $(x + 1)^2 + 4(x^2) \geq 0$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $(x + 1)^2 - 4(x^2) \geq 0$.
   (e) $\exists a, b \in \mathbb{Z}$; o produto ab não é par.
   (f) $\exists a \in \mathbb{Z}$; a é par e a^2 é ímpar.

5. Negue as afirmações:

   (a) Existe um número natural a tal que $a < 10$ e $a > 5$.
   (b) Existe um número natural a tal que $a < 10$ e $a > 9$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $(x + 1)^2 + 4(x^2) \geq 0$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $(x + 1)^2 - 4(x^2) \geq 0$.
   (e) $\exists a, b \in \mathbb{Z}$; o produto ab não é par.
   (f) $\exists a \in \mathbb{Z}$; a é par e a^2 é ímpar.

6. Escreva as afirmações abaixo em linguagem simbólica, usando os quantificadores $'' \exists ''$ ou $'' \forall ''$, conforme o caso e os símbolos dos conjuntos numéricos.

   (a) O produto de qualquer número real por *zero* é *zero*.
   (b) O produto de quaisquer dois números reais positivos é positivo.
   (c) Existe pelo menos um valor real tal que o seu quadrado é um número primo.
   (d) A equação $x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 1$ admite pelo menos uma solução real.
   (e) A seguir lembramos que a equação a seguir é denominada equação polinomial de grau n, na variável real x.
   $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, onde n é inteiro positivo ou nulo, a_i, $i = 1, \ldots, n$ são números constantes reais e $a_n \neq 0$.
   Afirmação que é para ser escrita em linguagem simbólica: Toda equação polinomial de grau ímpar admite pelo menos uma solução real.

7. Todas as afirmações abaixo são verdadeiras. Escreva cada afirmação abaixo usando $p \Longrightarrow q$ ou $p \Longleftrightarrow q$, conforme o caso, sem alterar o seu significado.

   (a) Se dois números inteiros são consecutivos então um é par e outro é ímpar.
   (b) A soma de três números inteiros consecutivos é um múltiplo de 3.
   (c) Um número inteiro é par se e só se o seu consecutivo é ímpar.
   (d) Uma condição suficiente para o produto de dois números reais ser positivo é os dois números serem negativos.

(e) O produto de dois números reais ser positivo é uma condição necessária para esses dois números serem negativos.

(f) Definição (divisor)
Dados $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, diz-se que b é divisor de a quando $\exists k \in \mathbb{Z};\ a = kb$.

(g) $\forall a \in \{x \in \mathbb{R}; x > 1\ \}$ temos que $\dfrac{1}{1-a^2} < 1$.

(h) Uma condição suficiente para um aluno da UFF ser aprovado em uma disciplina é obter média (= nota final) maior ou igual a $6,0$ (seis) e frequência mínima de 75% na disciplina.

(i) Média (= nota final) maior ou igual a $4,0$ (quatro), nota da VS maior ou igual a $6,0$ (seis) e frequência mínima de 75% é condição suficiente para aprovação em disciplina da UFF.

(j) Uma condição necessária para aprovação em disciplina da UFF é a frequência mínima de 75%.

8. A tese da afirmação abaixo é falsa. A propriedade citada entre colchetes é a justificativa da primeira implicação. Onde está o erro?

$-5 < -7 \Rightarrow -5 + 10 < -7 + 10 \Rightarrow 5 < 3.$ $\qquad [a, b, c \in \mathbb{R};\ a < b\ \Rightarrow\ a + c < b + c\ ]$

9. Em cada item abaixo, a propriedade citada entre colchetes é a justificativa da primeira implicação. Verifique que a hipótese de cada afirmação é falsa, isto é, a hipótese da propriedade não é satisfeita, neste caso diz-se que a hipótese não se verifica. Verifique que no item (a) a tese é verdadeira e no item (b) a tese é falsa. O que você pode concluir sobre a tese quando a hipótese de uma implicação não se verifica?

(a) $\left\langle \begin{array}{l} -5 < -3 \\ \text{e} \\ 2 < 3 \end{array} \right. \Longrightarrow (-5)\cdot 2 < (-3)\cdot 3 \Longrightarrow -10 < -9$ $\qquad \left[\left\langle \begin{array}{l} 0 < a < b \\ \text{e} \\ 0 < c < d \end{array} \right. \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot d \right]$

(b) $\left\langle \begin{array}{l} -5 < -3 \\ \text{e} \\ 2 < 7 \end{array} \right. \Longrightarrow (-5)\cdot 2 < (-3)\cdot 7 \Longrightarrow -10 < -21$ $\qquad \left[\left\langle \begin{array}{l} 0 < a < b \\ \text{e} \\ 0 < c < d \end{array} \right. \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot d \right]$