

RESPOSTAS DA LISTA 2 - Números reais: propriedades algébricas e de ordem

Para facilitar a consulta, repetimos aqui os axiomas e as propriedades algébricas e de ordem listadas em aula. À medida que as propriedades forem usadas, será citada a numeração, é claro que não há necessidade de memorizar a numeração das propriedades.

Para $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ admitem-se verdadeiros os axiomas algébricos descritos a seguir.

	Axiomas da Soma	Axiomas do Produto
Lei do fechamento	AS1: $a + b \in \mathbb{R}$	AP1: $a \times b \in \mathbb{R}$
Lei associativa	AS2: $(a + b) + c = a + (b + c)$	AP2: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Lei comutativa	AS3: $a + b = b + a$	AP3: $a \times b = b \times a$
Lei do elemento neutro	AS4: $\exists 0 \in \mathbb{R}; a + 0 = a$	AP4: $\exists 1 \in \mathbb{R}; a \times 1 = a$
Lei do elemento simétrico	AS5: $\forall a, \exists -a \in \mathbb{R}; a + (-a) = 0$	(diz-se: $-a$ é o simétrico de a)
Lei do elemento inverso	AP5: $\forall a \neq 0, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}; a \times \frac{1}{a} = 1$	(diz-se: $\frac{1}{a}$ é o inverso de a)
	Axioma da Soma e Produto	
Lei distributiva	ASP: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	

Propriedade PA 1 A igualdade não se altera quando soma-se ou multiplica-se o mesmo número nos dois lados da igualdade.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- i) $a = b \implies a + c = b + c$ (preservação da igualdade na soma)
- ii) $a = b \implies a \cdot c = b \cdot c$ (preservação da igualdade no produto)

Propriedade PA 2 Unicidade do elemento neutro da soma

Primeira propriedade de unicidade do 0:

Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento neutro da soma.

Escrita em símbolos: O único elemento $b \in \mathbb{R}$ que satisfaz $a + b = a, \forall a \in \mathbb{R}$ é o elemento 0.

Segunda propriedade da unicidade do 0:

$a + b = a$ para algum $a \in \mathbb{R} \implies b = 0$.

Propriedade PA 3 Unicidade do elemento neutro do produto

Primeira propriedade da unicidade do 1:

Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento neutro do produto.

Escrita em símbolos: o único elemento $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ que satisfaz $a \cdot b = a, \forall a \in \mathbb{R}$ é o elemento 1.

Segunda propriedade da unicidade do 1:

$a \cdot b = a$, para algum $a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \implies b = 1$

Propriedade PA 4 $0 + a = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 5 $1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 6 Unicidade do elemento simétrico

Enunciado: Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento simétrico.

Propriedade PA 7 Unicidade do elemento inverso

Enunciado: Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento inverso.

Propriedade PA 8 $-a + a = 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 9 $\frac{1}{a} \cdot a = 1, \forall a \in \mathbb{R} e a \neq 0$.

Propriedade PA 10 $-(-a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
(leia-se: a é o simétrico de $-a$).

Propriedade PA 11 $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \forall a \in \mathbb{R} e a \neq 0$

(leia-se: a é o inverso de $\frac{1}{a}$).

Propriedade PA 12 $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 13 $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 14 $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1), \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 15 $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 16 $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 17 $\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Propriedade PA 18 $-\frac{1}{a} = \frac{-1}{a} = \frac{1}{-a}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Propriedade PA 19 $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1} = \frac{b}{a}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$.

Propriedade PA 20 $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, c, d \neq 0$.

Propriedade PA 21 $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Propriedade PA 22 $-(a + b) = -a - b, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 23 $-\frac{a+b}{c} = \frac{-a-b}{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Propriedade PA 24 $\frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{1}{a \cdot b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$.

Propriedade PA 25 $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, c, d \neq 0$.

Propriedade PA 26 Leis de cancelamento da soma e do produto (implicações)

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- i) $a + c = b + c \implies a = b$ (é a recíproca da preservação na soma)
- ii) $a \cdot c = b \cdot c$ e $c \neq 0 \implies a = b$ (não é a recíproca da preservação no produto)

Propriedade PA 27 Lei de cancelamento da soma (equivalência)

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Temos que: $a = b \iff a + c = b + c$.

Propriedade PA 28 Lei de cancelamento do produto (equivalência)

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Temos que: $a = b \iff a \cdot c = b \cdot c$.

Propriedade PA 29 Lei do anulamento do produto

Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos que: $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.

Propriedade PA 30 Para $a, b \in \mathbb{R}$ vale a seguinte equivalência: $a \cdot c = b \cdot c \iff a = b$ ou $c = 0$.

Propriedade PA 31 Teste da igualdade de frações.

Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0$, temos que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$.

Propriedade PA 32 Simplificações em somas de frações (redução ao mesmo denominador).

Para $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}, b, d, p, q \neq 0$, valem as seguintes igualdades:

- i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$
- ii) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$
- iii) Quando $m = bp = dq, \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ap}{bp} + \frac{cq}{dq} = \frac{ap + cq}{m}$

Propriedade PA 33 Principais produtos notáveis.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes igualdades.

- i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ii) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- iii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- iv) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- v) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- vi) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- vii) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- viii) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Axioma da ordem 1. Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e só uma das três possibilidades é verdadeira:

- (i) a é positivo (ii) $a = 0$ (iii) $-a$ é positivo

Conhecido como "propriedade de tricotomia da ordem". Quando $-a$ é positivo, diz-se que a é negativo.

Axioma da ordem 2. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ vale a afirmação: a é positivo e b é positivo $\implies a + b$ é positivo e $a \cdot b$ é positivo.

Propriedade PO 1 Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e só uma das três possibilidades é verdadeira: (i) $a > 0$ (ii) $a = 0$ (iii) $a < 0$
Também é conhecida por "tricotomia da ordem".

Propriedade PO 2 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < b \implies a + c < b + c$.
Conhecida como "propriedade de monotonicidade da adição" ou "lei de preservação da ordem na adição".

Propriedade PO 3 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, vale a implicação: $a < b \implies a \cdot c < b \cdot c$.
Conhecida como "propriedade de monotonicidade do produto" ou "lei de preservação da ordem no produto".

Propriedade PO 4 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c < 0$, vale a implicação: $a < b \implies a \cdot c > b \cdot c$.
Conhecida como "lei de inversão da ordem no produto".

Propriedade PO 5 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < b$ e $b < c \implies a < c$.
Conhecida como "propriedade transitiva da ordem".

Propriedade PO 6 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, uma e só uma das possibilidades é verdadeira: (i) $a < b$ (ii) $a = b$ (iii) $a > b$

Propriedade PO 7 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a equivalência: $a < b \iff a + c < b + c$.

Propriedade PO 8 Dado $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, valem as equivalências: (i) $a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0$ (ii) $a < 0 \iff \frac{1}{a} < 0$

Propriedade PO 9 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, vale a equivalência: $a < b \iff ac < bc$.

Propriedade PO 10 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c < 0$, vale a equivalência: $a < b \iff ac > bc$.

Propriedade PO 11 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as equivalências:
(i) $a < 0 \iff -a > 0$ (ii) $a > 0 \iff -a < 0$ (iii) $a < b \iff -a > -b$ (iv) $a > b \iff -a < -b$.

Propriedade PO 12 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as equivalências:
(i) $ab > 0 \iff (a > 0 \text{ e } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b < 0)$ (ii) $ab < 0 \iff (a > 0 \text{ e } b < 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b > 0)$

Propriedade PO 13 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a > 0 \implies a^2 > 0$.
Outra forma de escrever essa propriedade é: para todo $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$ temos que $a^2 > 0$.

Propriedade PO 14 Dado $a \in \mathbb{R}$, não vale a recíproca da propriedade anterior, isto é, $a^2 > 0 \not\implies a > 0$.

Propriedade PO 15 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < 0 \implies a^2 > 0$.
Outra forma de escrever essa propriedade é: para todo $a \in \mathbb{R}$; $a < 0$ temos que $a^2 > 0$.

Propriedade PO 16 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a equivalência: $a \neq 0 \iff a^2 > 0$.

Propriedade PO 17 Dado $a \in \mathbb{R}$, valem as equivalências: (i) $a > 0 \iff a^3 > 0$ (ii) $a < 0 \iff a^3 < 0$.

Propriedade PO 18 Vale a seguinte implicação: $a \in \mathbb{R} \implies a^2 \geq 0$.

Respostas, com resolução. Cada questão pode ter muitas resoluções, pois podemos escolher propriedades diferentes em cada resolução.

1. (a) Contra-exemplo: $x = 0$.

Testando a igualdade da hipótese, $3x(x^2 - 1) = 0 \cdot (-1) = 0$ e $6x^2 = 6 \cdot 0 = 0$

Logo, neste exemplo a hipótese é verdadeira, isto é, $3x(x^2 - 1) = 6x^2$ é verdadeira quando $x = 0$.

Testando a igualdade na tese, $x^2 - 1 = 0 - 1 = -1$ e $2x = 2 \cdot 0 = 0$.

Logo nesse exemplo a tese é falsa, isto é, a igualdade $x^2 - 1 = 2x$ é falsa quando $x = 0$.

Logo, para $x = 0$, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(b) Contra-exemplo: $x = \frac{4}{3}$.

Testando a primeira igualdade $(\frac{4}{3} - 1)^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ e $(2 \cdot \frac{4}{3} - 3)^2 = (\frac{8}{3} - 3)^2 = (-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

Logo a igualdade $(x - 1)^2 = (2x - 3)^2$ é verdadeira para $x = \frac{4}{3}$.

Testando a segunda igualdade, $\frac{4}{3} \neq 2$, logo a igualdade $x = 2$ é falsa quando $x = \frac{4}{3}$.

Logo, para $x = \frac{4}{3}$, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(c) Contra-exemplo $x = -1$ e $y = 1$.

Testando na primeira desigualdade: $-1(1)^2 = -\frac{1}{1} = -1$ e $-1(1 + 1) = -2$.

$-1 > -2 \iff 1 < 2$, verdadeira, logo a primeira desigualdade é verdadeira nesse exemplo.

Testando na segunda desigualdade: $(1)^2 = 1$ e $1 + 1 = 2$.

Como $1 < 2$, a segunda desigualdade é falsa nesse exemplo.

Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(d) Contra-exemplo: $x = -2$.

Testando na primeira desigualdade, $\frac{x^2 - 1}{5x + 7} = \frac{4 - 1}{-10 + 7} = \frac{3}{-3} = -1 < 0$.

Logo a hipótese é verdadeira para $x = -2$.

Testando na segunda desigualdade, $x^2 - 1 = 4 - 1 > 0$.

Logo a tese é falsa para $x = -2$.

Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(e) Contra-exemplo: $x = 0$.

Testando na hipótese, $\frac{x - 1}{x - 2} = \frac{0 - 1}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ e $\frac{4}{x - 2} = \frac{4}{0 - 2} = -2$.

Como $\frac{1}{2} > -2$, concluímos que a hipótese é verdadeira para $x = -2$.

Testando a tese, $x - 1 = -2 - 1 = -3$. Como $-3 < 4$, a tese $x - 1 > 4$ é falsa quando $x = -2$.

Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

2. Em todos os item $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Verdadeiro. Sabemos que $x^5 \stackrel{\text{potência}}{=} xxxxx \stackrel{\text{potência e AP1}}{=} x^2 \cdot x^3$. (*)

$(\iff) x > 0 \stackrel{\text{PO 13 e PO17}}{\implies} x^2 > 0$ e $x^3 > 0 \stackrel{\text{axioma de ordem 2}}{\implies} x^2 \cdot x^3 > 0 \stackrel{(*)}{\implies} x^5 > 0$.

$(\iff) x^5 > 0 \stackrel{(*)}{\implies} x^2 \cdot x^3 > 0 \stackrel{\text{axioma da ordem 1}}{\implies} x^2 \cdot x^3 \neq 0 \stackrel{\text{PA 29}}{\implies} x^2 \neq 0$ e $x^3 \neq 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} x^2 \neq 0$

Por outro lado, por PO 18, $x^2 < 0$ é falso $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, por lógica, $(x^2 < 0$ e $x^3 < 0)$ é falso. (**).

Voltando, $x^5 > 0 \implies (x^2 > 0$ e $x^3 > 0)$ ou $(x^2 < 0$ e $x^3 < 0) \stackrel{\text{Lógica e (**)}}{\implies} x^2 > 0$ e $x^3 > 0 \stackrel{\text{PA 18}}{\implies} x^2 > 0$ e $x > 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} x > 0$.

(b) Verdadeira. Sabemos que $x^6 \stackrel{\text{potência}}{=} xxxxxx \stackrel{\text{potência e AP1}}{=} x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$. (*)

$x = 0 \stackrel{\text{lógica}}{\iff} x = 0$ e $x = 0 \stackrel{\text{PA 29}}{\iff} x^2 = 0 \stackrel{\text{lógica}}{\iff} x^2 = 0$ e $x^2 = 0 \stackrel{\text{lógica e PA 29}}{\iff} x^2 \cdot x^2 = 0$ e $x^2 = 0 \stackrel{\text{PA 29}}{\iff} x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = 0 \stackrel{(*)}{\iff} x^6 = 0$.

(c) Falsa. Contra-exemplo: $x = 2, 1$.

Testando na primeira desigualdade: $x = 2, 1$ e $2, 1 > 2 \stackrel{x \text{ no lugar do } 2,1}{\implies} x > 2$ é verdadeira.

Testando na segunda desigualdade: $x = 2, 1$ e $2, 1 < 3 \stackrel{x \text{ no lugar do } 2,1}{\implies} x < 3 \stackrel{\text{PO 6}}{\implies} x \geq 3$ é falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

- (d) Falsa. Contra-exemplo: $x = 0$; $y = 1$.
 Testando na primeira desigualdade: $x + y = 0 + 1$ e $0 + 1 = 1 > 0 \implies x + y > 0$ é verdadeira.
 Testando na segunda desigualdade: $x = 0$ $\xrightarrow{\text{axioma da ordem 1}}$ $x > 0$ é falso $\xrightarrow{\text{lógica}}$ $x > 0$ e $y > 0 \implies$ é falso.
 Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.
- (e) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1$; $y = -2$.
 Temos que $x - y = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$ e $1 > 0 \implies x - y > 0$, logo a hipótese é verdadeira.
 Também $x = -1$ e $-1 < 0 \implies x < 0$ $\xrightarrow{\text{axioma da ordem 1}}$ a tese $x > 0$, é falsa.
 Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.
- (f) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1$; $y = -2$.
 Hipótese verdadeira, pois $xy = (-1)(-2) = 2 > 0$.
 $x = -1$ e $-1 < 0 \xrightarrow{\text{transitividade}}$ $x < 0 \implies x > 0$ é falsa $\xrightarrow{\text{lógica}}$ $x > 0$ e $y > 0$ é falsa, isto é, a tese é falsa.
 Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.
- (g) Verdadeira. Justificativa. Sabemos que $y^2 < 0$ é falsa para todo $y \in \mathbb{R}$. (*)
 $xy^2 > 0 \xrightarrow{\text{PO 12 i)}} (x > 0 \text{ e } y^2 > 0)$ ou $(x < 0 \text{ e } y^2 < 0) \xrightarrow{\text{lógica e (*)}}$ $(x > 0 \text{ e } y^2 > 0) \xrightarrow{\text{lógica}}$ $x > 0$.
- (h) Verdadeira. Justificativa. Sabemos que $x^2 < 0$ é falsa para todo $y \in \mathbb{R}$. (*)
 $x^2y < 0 \xrightarrow{\text{PO 12 ii)}} (x^2 > 0 \text{ e } y < 0)$ ou $(x^2 < 0 \text{ e } y > 0) \xrightarrow{\text{lógica e (*)}}$ $(x^2 > 0 \text{ e } y < 0) \xrightarrow{\text{lógica}}$ $y < 0$.
- (i) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1$, $y = 1$.
 $x^2y = (-1)^2 \cdot 1 = 1 > 0 \implies$ a hipótese é verdadeira nesse exemplo.
 $x = -1$ e $-1 < 0 \xrightarrow{\text{transitividade}}$ $x < 0$ $\xrightarrow{\text{axioma da ordem 1}}$ $x > 0$ é falsa $\xrightarrow{\text{lógica}}$ a tese $x > 0$ e $y > 0$ é falsa.
 Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.
- (j) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1$, $y = 1$.
 $x^3y^5 = (-1)^3(1)^5 = (-1)(1) = -1$ e $-1 < 0 \xrightarrow{\text{transitividade}}$ $x^3y^5 < 0$, a hipótese é verdadeira nesse exemplo.
 $x = -1$ e $-1 < 0 \xrightarrow{\text{transitividade}}$ $x < 0$ $\xrightarrow{\text{axioma da ordem 1}}$ $x > 0$ é falsa $\xrightarrow{\text{lógica}}$ a tese $x > 0$ e $y < 0$ é falsa.
 Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.
- (k) Falsa. Contra-exemplo: $x = 1$ e $y = 0$.
 $x^2y = 1^2 \cdot 0 = 0 \xrightarrow{\text{lógica}}$ $x^2y \geq 0 \implies$ hipótese verdadeira.
 $y = 0$ $\xrightarrow{\text{axioma da ordem 1}}$ a tese $y < 0$ é falsa.
 Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.
- (l) Verdadeira. Prova:
 $xy \geq 0$, pela lógica, temos dois casos admissíveis e distintos: (i) $xy = 0$ (ii) $xy > 0$.
 (i) $xy = 0 \xrightarrow{\text{lei do anulamento}}$ $x = 0$ ou $y = 0$. (*)
 (ii) $xy > 0 \xrightarrow{\text{PO 12 i)}} x, y > 0$ ou $x, y < 0$. (**)
 Logo, $xy \geq 0 \xrightarrow{(*) \text{ e } (**)}$ $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x, y > 0$ ou $x, y < 0 \xrightarrow{\text{lógica}}$ $xy \geq 0$ ou $xy \leq 0$.
- (m) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1$.
 $(-1)^{218} \xrightarrow{\text{potência natural}} \underbrace{(-1) \times (-1) \times (-1) \times \dots \times (-1)}_{218 \text{ vezes}} \xrightarrow{\text{potência natural e AP2}} \underbrace{(-1)^2 \times (-1)^2 \times \dots \times (-1)^2}_{109 \text{ vezes}}$
 $\xrightarrow{\text{PA 16}} \underbrace{1 \times 1 \times \dots \times 1}_{109 \text{ vezes}} \xrightarrow{\text{AP2 e AP4}} 1$.
 Logo, $x^{218} = (-1)^{218} = 1$ e $1 > 0 \xrightarrow{\text{transitividade}}$ $x^{218} > 0 \xrightarrow{\text{lógica}}$ $x^{218} \geq 0 \implies$ hipótese verdadeira.
 $x = -1$ e $-1 < 0 \xrightarrow{\text{transitividade}}$ $x < 0 \implies$ tese $x \geq 0$ falsa.
 Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.
- (n) Verdadeira. Prova:
 $x \in \{3\} \xrightarrow{\text{definição do conectivo ou}} x \in \{3\}$ ou $x \in \{\pi\} \xrightarrow{\text{união}} x \in \{3\} \cup \{\pi\} \implies x \in \{3, \pi\}$
- (o) Verdadeira. Prova:
 $x = 3 \xrightarrow{\text{definição do conectivo ou}} x = 3$ ou $x = \pi$.

3. Em todos os itens $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Verdadeira. Prova: sabemos que $a^5 \stackrel{\text{potência}}{=} aaaaa \stackrel{\text{potência}}{=} a^2 \cdot a^3$. (*)

$$\implies a^5 < 0 \stackrel{(*)}{\implies} a^2 \cdot a^3 < 0 \stackrel{\text{axioma da ordem 1}}{\implies} a^2 \cdot a^3 \neq 0 \stackrel{\text{PA 29}}{\implies} a^2 \neq 0 \text{ e } a^3 \neq 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} a^2 \neq 0$$

Por outro lado, por PO 18, $a^2 < 0$ é falso $\forall a \in \mathbb{R}$. Logo, por lógica, $(a^2 < 0 \text{ e } a^3 > 0)$ é falso. (**)

Voltando, $a^5 < 0 \stackrel{\text{PO 12 ii}}{\implies} (a^2 > 0 \text{ e } a^3 < 0)$ ou $(a^2 < 0 \text{ e } a^3 > 0) \stackrel{\text{Lógica e (**)}}{\implies} a^2 > 0 \text{ e } a^3 < 0 \stackrel{\text{PA 18}}{\implies} a^2 > 0 \text{ e } a < 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} a < 0$.

(b) Verdadeira. Prova: $a > 2 \stackrel{\text{conectivo lógico ou}}{\implies} a > 2 \text{ ou } a = 2 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} a \geq 2$.

(c) Verdadeira. Prova:

$$a^{111} \stackrel{\text{potência}}{=} \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{111 \text{ vezes}} = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{110 \text{ vezes}} \times a \stackrel{\text{(AS2)}}{=} \underbrace{a^2 \times a^2 \times \dots \times a^2}_{55 \text{ vezes}} \times a \stackrel{\text{(potência)}}{=} a^{110} \times a \quad (*)$$

$a^{111} \geq 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies}$ (i) $a^{111} = 0$ ou (ii) $a^{111} > 0$. Logo,

$$\text{(i) } a^{111} = 0 \stackrel{(*)}{\iff} \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{111 \text{ vezes}} = 0 \stackrel{\text{lei do anulamento}}{\iff} \underbrace{a = 0 \text{ ou } a = 0 \text{ ou } \dots \text{ ou } a = 0}_{111 \text{ vezes}} \stackrel{\text{lógica}}{\iff} a = 0 \quad (**)$$

$$\text{(ii) } a^{111} > 0 \stackrel{\text{axioma da ordem 1}}{\implies} a^{111} \neq 0 \stackrel{(**)}{\implies} a \neq 0 \stackrel{\text{PO 16}}{\implies} a^2 > 0 \stackrel{\text{PO 12 i)}}{\implies} a^{110} = \underbrace{a^2 \times a^2 \times \dots \times a^2}_{55 \text{ vezes}} > 0$$

$\text{axioma da ordem 1 } a^{110} < 0$ é falsa $\stackrel{\text{lógica}}{\implies} (a^{110} < 0 \text{ e } a < 0)$ é falsa (***)

Por outro lado, $a^{111} = a^{110} \times a > 0 \stackrel{\text{PO 12 i)}}{\implies} (a^{110} > 0 \text{ e } a > 0)$ ou $(a^{110} < 0 \text{ e } a < 0)$

$$\stackrel{(***)}{\implies} a^{110} > 0 \text{ e } a > 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} a > 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} a \geq 0.$$

(d) Falsa. Contra-exemplo: $a = 1$ e $a = -1$.

$$a^2 = 1^2 = 1 \text{ e } b^2 = (-1)^2 = 1 \implies a^2 = b^2 \implies \text{hipótese verdadeira}$$

$$a = 1, b = -1, -1 \neq 1 \implies a \neq b \implies \text{tese falsa.}$$

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(e) Verdadeira. Prova: $a^3 = b^3 \stackrel{\text{(PA 27, AS5, AS4)}}{\iff} a^3 - b^3 = 0 \stackrel{\text{(PA 36 vi)}}{\iff} (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \stackrel{\text{lei do anulamento}}{\iff} a - b = 0 \text{ ou } a^2 + ab + b^2 = 0 \stackrel{\text{(PA 27, AS5, AS4)}}{\iff} a = b \text{ ou } a^2 + ab + b^2 = 0$.

Para provar que $a = b$ ou $a^2 + ab + b^2 = 0 \implies a = b$, precisaremos provar que $a^2 + ab + b^2 \neq 0 \forall a, b \in \mathbb{R}; a \neq b$.

Prova de que $a^2 + ab + b^2 \neq 0 \forall a, b \in \mathbb{R}; a \neq b$:

Vamos separar em todas as hipóteses admissíveis e distintas da posição relativa entre a e b tal que $a \neq b$.

caso: $a < b < 0$

$$a < 0 \text{ e } b < 0 \stackrel{\text{(PO 12 e PO 15)}}{\implies} a^2 > 0, ab > 0, b^2 > 0 \stackrel{\text{(axioma da ordem 2)}}{\implies} a^2 + ab + b^2 > 0 \stackrel{\text{(axioma da ordem 1)}}{\implies} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$$

caso: $a < b = 0$

$$a < 0 \text{ e } b = 0 \stackrel{\text{(PO 15 e PA 12)}}{\implies} a^2 > 0, ab = 0, b^2 = 0 \implies a^2 + ab + b^2 = a^2 + 0 + 0 = a^2 > 0 \stackrel{\text{(axioma da ordem 1)}}{\implies} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$$

caso: $a < 0 < b$

$$a < 0 \text{ e } b > 0 \stackrel{\text{(PO 12)}}{\implies} ab < 0, \stackrel{\text{PO 8}}{\implies} -ab > 0. \quad (*)$$

$$\text{Por outro lado, } a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ab \stackrel{\text{produto notável}}{=} (a + b)^2 - ab \quad (**)$$

Por PO 18 e por (*), temos que $-ab > 0$ e $(a + b)^2 \geq 0 \stackrel{\text{(PO 7)}}{\implies} (a + b)^2 + (-ab) > 0 + (a + b)^2 \geq 0$

$$\stackrel{\text{transitividade}}{\implies} (a + b)^2 - ab > 0 \stackrel{(**)}{\implies} a^2 + ab + b^2 > 0 \stackrel{\text{(axioma da ordem 1)}}{\implies} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$$

caso: $a = 0 < b$

$$a = 0 \text{ e } b > 0 \stackrel{\text{(PO 15 e PA 12)}}{\implies} a^2 = 0, ab = 0, b^2 > 0 \implies a^2 + ab + b^2 = 0 + 0 + b^2 = b^2 > 0 \stackrel{\text{(axioma da ordem 1)}}{\implies} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$$

caso: $0 < a < b$

$$a > 0 \text{ e } b > 0 \stackrel{\text{(PO 12 e PO 15)}}{\implies} a^2 > 0, ab > 0, b^2 > 0 \stackrel{\text{(axioma da ordem 2)}}{\implies} a^2 + ab + b^2 > 0 \stackrel{\text{(axioma da ordem 1)}}{\implies} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$$

(f) Verdadeira. Prova: $a^4 = 16b^4 \stackrel{\text{(PA27, AS4, AS5)}}{\iff} a^4 - b^4 = 0 \stackrel{\text{produto notável}}{\iff} (a^2 - 4b^2)(a^2 + 4b^2) = 0$

$$\stackrel{\text{produto notável}}{\implies} (a - 2b)(a + 2b)(a^2 + 4b^2) = 0 \stackrel{\text{lei do anulamento}}{\implies} a - 2b = 0 \text{ ou } a + 2b = 0 \text{ ou } (a^2 + 4b^2) = 0$$

(PA 27, AS5, AS4) $\implies a = 2b$ ou $a = -2b$ ou $a^2 + 4b^2 = 0$.

Para provar que $a = 2b$ ou $a = -2b$ ou $a^2 + 4b^2 = 0 \implies a = 2b$ ou $a = -2b$

precisamos provar que $a^2 + 4b^2 = 0 \implies a = 2b$ ou $a = -2b$

Primeiro vamos provar que $a^2 + 4b^2 = 0 \implies a = 0$ e $b = 0$. Vamos provar a contra recíproca, isto é, $a \neq 0$ ou $b \neq 0 \implies a^2 + 4b^2 \neq 0$. (*)

Vamos ver todos os casos admissíveis e distintos (são 3):

caso $a \neq 0$ e $b = 0$ $\xrightarrow{(PO\ 16, PA12)}$ $a^2 > 0$ e $4b^2 = 0 \xrightarrow{AS4} a^2 + 4b^2 = a^2 + 0 = a^2 > 0$ $\xrightarrow{\text{axioma da ordem}}$ $a^2 + 4b^2 \neq 0$.

caso $a = 0$ e $b \neq 0$ $\xrightarrow{(PO\ 16, PA12)}$ $a^2 = 0$ e $4b^2 > 0 \xrightarrow{AS4} a^2 + 4b^2 = 0 + 4b^2 = 4b^2 > 0$ $\xrightarrow{\text{axioma da ordem}}$ $a^2 + 4b^2 \neq 0$.

caso $a \neq 0$ e $b \neq 0$ $\xrightarrow{PO\ 16}$ $a^2 > 0$ e $4b^2 > 0 \xrightarrow{\text{axioma da ordem } 2}$ $a^2 + 4b^2 > 0 \xrightarrow{\text{axioma da ordem } 1}$ $a^2 + 4b^2 \neq 0$.

Logo, $a^2 + 4b^2 = 0 \xrightarrow{(*)} a = 0, b = 0 \xrightarrow{PA\ 13} a = 0, 2b = 0, -2b = 0 \xrightarrow{\text{lógica}} a = 2b, a = -2b \xrightarrow{\text{lógica}} a = 2b$ ou $a = -2b$

(g) Verdadeira. Prova:

Análogo ao que foi provado no exercício anterior, isto é análogo a $a^2 + 4a^2 = 0 \implies a = b = 0$.

(h) Igual ao exercício 19 (m).

(i) Verdadeira. Prova. Vamos analisar dois casos admissíveis e distintos para um dado $b \in \mathbb{R}$, (dessa forma só há dois casos) .

Caso $b > 0 \xrightarrow{\text{lógica}} a > 0$ ou $b > 0$.

Caso $b \leq 0$ $a + b > 0$ e $b \leq 0 \xrightarrow{PO\ 11} a + b > 0$ e $-b \geq 0 \xrightarrow{PO\ 2} a + b - b > 0 - b$ e $-b \geq 0$

$\xrightarrow{AS5, AS4} a > -b$ e $-b \geq 0 \xrightarrow{\text{transitividade}} a > 0 \xrightarrow{\text{lógica}} a > 0$ ou $b > 0$.

4. (a) Falsa. Não vale a recíproca. Contra-exemplo: $a = -1$.

$a = -1$ e $(-1)^2 = 1 \implies a^2 > 1 \implies$ hipótese verdadeira

$a = -1$ e $-1 < 0 \implies a < 1 \implies$ tese falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(b) Verdadeira. Veja resposta do exercício 16(ii).

(c) Verdadeira. Igual ao exercício 19(a), trocando x por a .

(d) Verdadeira. Igual ao exercício 19(b), trocando x por a .

(e) Falsa. Ccontra-exemplo (único): $a = 2$.

A hipótese é verdadeira mas a tese é falsa, logo a implicação é falsa.

(f) Verdadeira. Prova: $a^2 - b^2 = 0 \iff a^2 - b^2 + b^2 = 0 + b^2 \iff a^2 = b^2$.

(g) Verdadeira. Prova:

Para $\boxed{a = 0}$.

(\implies):

$a = 0$ e $a^2 = b^2 \implies a^2 = 0$ e $a^4 = 0$ e $a^2 = b^2 \implies a^4 = 0$ e $b^2 = 0 \implies a^4 = 0$ e $b^4 = (b^2)^2 = 0 \implies a^4 = b^4 = 0 \implies a^4 = b^4$ e $b = 0$.

(\impliedby):

$a = 0$ e $a^4 = b^4 \implies a^4 = 0$ e $a^4 = b^4 \implies a^4 = 0$ e $b^4 = 0 \implies a^4 = (a^2)^2 = 0$ e $b^4 = (b^2)^2 = 0 \implies a^2 = 0$ e $b^2 = 0 \implies a^2 = b^2$ e $b = 0$.

Para $a = 0$, acabamos de provar que vale a equivalência e em qualquer caso, $a^4 = b^4$ ou $a^2 = b^2$, temos $b = 0$.

Logo em qualquer caso, $a^4 = b^4$ ou $a^2 = b^2$, só resta a possibilidade $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Para $\boxed{a \neq 0}$

$a^4 = b^4 \iff a^4 - b^4 = 0 \xrightarrow{\text{produto notável}} (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 0 \iff (a^2 - b^2) = 0$ ou $(a^2 + b^2) = 0 \xrightarrow{(*)} a^2 - b^2 = 0$.

$\xleftarrow{(*)}$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos que $a^2 > 0$ e $b^2 > 0$, logo $a^2 + b^2 > 0$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.

(h) Falsa. Contra-exemplo: $a = -3$ e $b = -2$.

(i) Verdadeira. Prova.

Supondo $b = 0$ e $a^3 > b^3$.

$b = 0$ e $a^3 > b^3 \implies b^3 = 0$ e $a^3 > b^3 \implies b^3 = 0$ e $a^3 > 0 \implies b = 0$ e $a > 0 \implies a > b$.

Supondo $b \neq 0$ e $a^3 > b^3$.

$b \neq 0$ e $a^3 > b^3 \implies b \neq 0$ e $a^3 - b^3 > 0 \implies b \neq 0$ e $(a - b)(a^2 + ab + b^2) > 0 \xrightarrow{(*)} a - b > 0 \implies a > b$.

$\xrightarrow{(*)}$: Vamos provar que $a^2 + ab + b^2 > 0, \forall b \neq 0$.

Completando o quadrado nos dois primeiros termos,

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + b^2 - \frac{b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}.$$

Sabemos que $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$ e para $b \neq 0$, $\frac{3b^2}{4} > 0$. Logo a soma desses termos é positiva.

(j) Verdadeiro. Prova:

$$(\Leftarrow) \quad a = 0 \text{ e } b = 0 \implies a^2 = 0 \text{ e } b^2 = 0 \implies a^2 + b^2 = 0 + 0 = 0.$$

$$(\Rightarrow) \quad a^2 + b^2 = 0 \text{ e suponha, por absurdo, que } a \neq 0.$$

$a \neq 0 \implies a^2 > 0 \xrightarrow{+b^2} a^2 + b^2 > 0 + b^2 \implies a^2 + b^2 > b^2$ e $b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 > 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$. Contradição com a hipótese $a^2 + b^2 = 0$.

Podemos fazer demonstração análoga, supondo, por absurdo que $b \neq 0$.

(k) Falso. Contra-exemplo: $a = 1$ e $b = -1$.

Vamos verificar se a implicação (\implies) é verdadeira nesse exemplo.

$$a^3 + b^3 = (1)^3 + (-1)^3 = 1 + (-1) = 0, \text{ logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.}$$

$a = 1 \neq 0$, logo nesse exemplo a tese é falsa.

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação (\implies) é falsa.

(l) Falso. Contra exemplo: $a = 1$ e $b = -1$.

$$a^2 = 1^2 \text{ e } b^2 = (-1)^2 = 1 \implies a^2 = b^2, \text{ logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.}$$

$$a^3 = 1^3 = 1 \text{ e } b^3 = (-1)^3 = -1 \implies a^3 \neq b^3, \text{ logo nesse exemplo a tese é falsa.}$$

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação (\implies) é falsa.

(m) Verdadeiro. Prova:

Caso 1: $b = 0$.

$$b = 0, \quad a^3 = b^3 \implies b^3 = 0^3 = 0 \text{ e } a^3 = 0 \implies a \cdot a \cdot a = 0 \implies a = 0 \text{ ou } a = 0 \text{ ou } a = 0 \implies a = b = 0 \implies a = b \implies a \cdot a = a \cdot b \text{ e } a \cdot b = b \cdot b \implies a^2 = ab \text{ e } ab = b^2 \implies a^2 = b^2.$$

Caso 2: $b \neq 0$.

$$a^3 = b^3 \implies a^3 - b^3 = 0 \implies (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \implies a - b = 0 \text{ ou } a^2 + ab + b^2 = 0 \xrightarrow{(*)} a - b = 0 \implies a = b \implies a \cdot a = a \cdot b \text{ e } a \cdot b = b \cdot b \implies a^2 = ab \text{ e } ab = b^2 \implies a^2 = b^2.$$

(*) na prova do ex. 21.(i) já provamos que $\forall b \neq 0$ é verdadeiro que $a^2 + ab + b^2 > 0 \implies a^2 + ab + b^2 \neq 0$.

(n) Falso. Contra exemplo: $a = 1$ e $b = -1$.

$$a^2 = 1^2 \text{ e } b^2 = (-1)^2 = 1 \implies a^2 = b^2, \text{ logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.}$$

$$(a + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 4 \text{ e } (b + 1)^2 = (-1 + 1)^2 = 0^2 = 0 \implies (a + 1)^2 \neq (b + 1)^2, \text{ logo a tese é falsa.}$$

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação (\implies) é falsa.

(o) Verdadeiro, Prova:

$$(\Leftarrow) \quad a = 0 \text{ e } b = 0 \implies a^4 = 0 \text{ e } b^4 = 0 \implies a^4 + b^4 = 0 + 0 = 0.$$

$$(\Rightarrow) \quad a^4 + b^4 = 0 \text{ e suponha, por absurdo, que } a \neq 0.$$

$a \neq 0 \implies a^4 > 0 \xrightarrow{+b^4} a^4 + b^4 > 0 + b^2 \implies a^4 + b^4 > b^4$ e $b^4 = b^2 \cdot b^2 \geq 0 \implies a^4 + b^4 > 0 \implies a^4 + b^4 \neq 0$. Contradição com a hipótese $a^4 + b^4 = 0$.

Podemos fazer demonstração análoga, supondo, por absurdo que $b \neq 0$.

(p) Falso. Contra exemplo: $a = 0$ e $b = 0$.

$$a^3 = 0^3 = 0 \text{ e } b^3 = 0^3 = 0 \implies a^3 = b^3, \text{ logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.}$$

$a = 0$, logo a tese $a < 0$ é falsa.

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação (\implies) é falsa.

(q) Verdadeiro. Prova:

caso 1: $a = 0$.

$$a = 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0 \implies a = 0 \implies a = 0 \text{ ou } a < 0 \implies a \leq 0.$$

caso 2: $a \neq 0$.

$$a \neq 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0 \implies (a < 0 \text{ ou } a > 0) \text{ e } a^3 + b^4 = 0 \implies (a < 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0) \text{ ou } (a > 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0).$$

Verificando que a segunda afirmação da afirmação composta, isto é, a afirmação $(a > 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0)$ é falsa.

$$a > 0 \text{ e } b^2 \geq 0 \implies a^3 > 0 \text{ e } b^4 = b^2 \cdot b^2 \geq 0 \implies a^3 + b^4 > 0 + b^4 \text{ e } b^4 \geq 0 \implies a^3 + b^4 > 0 \implies a^3 + b^4 \neq 0.$$

Logo as duas afirmações não podem ser simultaneamente verdadeiras, isto é, a afirmação é falsa.

Assim só resta a primeira afirmação da afirmação composta, isto é, a afirmação $(a < 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0)$ ser verdadeira. Logo,

$$a \neq 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0 \implies (a < 0 \text{ e } a^3 + b^4 = 0) \implies a < 0 \implies a < 0 \text{ ou } a = 0 \implies a \leq 0.$$

(r) A implicação (\implies) é verdadeira (ver exercício anterior).

A recíproca (\impliedby) é falsa. Contra-exemplo: $a = -1, b = 0$.

$a = -1$ e $-1 < 0 \implies a < 0 \implies a \leq 0$. Logo, nesse exemplo a hipótese é verdadeira.

$a = -1$ e $b = 0 \implies a^3 = (-1)^3 = -1$ e $b^4 = 0^4 = 0 \implies a^3 + b^4 = -1 + 0 = -1 \implies a^3 + b^4 \neq 0$.

Logo, nesse exemplo, a tese é falsa.

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a recíproca (\impliedby) é falsa.

(s) Verdadeira. Prova:

(\impliedby) $a = 0$ e $b = 0 \implies a^2 = 0$ e $b^4 = 0 \implies a^2 + b^4 = 0 + 0 = 0$.

(\implies) $a^2 + b^4 = 0$ e suponha, por absurdo, que $a \neq 0$.

$a \neq 0 \implies a^2 > 0 \xrightarrow{+b^4} a^2 + b^4 > 0 + b^2 \implies a^2 + b^4 > b^4$ e $b^4 = b^2 \cdot b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^4 > 0 \implies a^2 + b^4 \neq 0$.

Contradição com a hipótese $a^2 + b^4 = 0$.

Podemos fazer demonstração análoga, supondo, por absurdo que $b \neq 0$.

5. Em todos os itens $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1 \neq 0$ e $b = 1$.

$\frac{1}{a} = \frac{1}{-1} = -1, b = 1, -1 < 1 \xrightarrow{\text{lógica}} \frac{1}{a} < b \implies$ hipótese verdadeira.

$ab = (-1) \cdot 1 = -1, -1 < 1 \xrightarrow{\text{lógica}} ab < 1 \implies$ a tese $ab > 1$ é falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa. Como a implicação é falsa, pela lógica, a equivalência também é falsa, isto é, pela lógica, a equivalência é verdadeira quando a implicação e a recíproca são verdadeiras.

(b) Verdadeira. Prova:

Uma parte da hipótese: $b \neq 0 \xrightarrow{\text{PO 16}} b^2 > 0. \quad (*)$

Outra parte da hipótese: $\frac{1}{b^2} < a \xrightarrow{\text{PO 9 e } (*)} \frac{1}{b^2} b^2 < ab^2 \xrightarrow{\text{PA 9}} 1 < ab^2 \iff ab^2 > 1$.

(c) Verdadeira. Prova:

Uma parte da hipótese: $b < 0 \xrightarrow{\text{PO 17}} b^3 < 0. \quad (*)$

Outra parte da hipótese: $\frac{1}{b^3} < a \xrightarrow{\text{PO 10 e } (*)} \frac{1}{b^3} b^3 > ab^3 \xrightarrow{\text{PA 9}} 1 > ab^3 \iff ab^3 < 1$.

(d) Verdadeira. Prova:

Hipóteses, $a \neq 0$ e $b \neq 0 \xrightarrow{\text{PO 16}} a^2 > 0$ e $b^2 > 0 \xrightarrow{\text{axioma da ordem 2}} a^2 + b^2 > 0 \xrightarrow{\text{PO 8}} \frac{1}{a^2 + b^2} > 0 \xrightarrow{\text{lógica}} \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 0$.

(e) Verdadeira. Prova:

Hipóteses, $a \neq 0$ e $b \neq 0 \xrightarrow{\text{PO 16}} a^2 > 0$ e $b^2 > 0 \xrightarrow{\text{axioma da ordem 2}} a^2 + b^2 > 0 \xrightarrow{\text{PO 8}} \frac{1}{a^2 + b^2} > 0$.

(f) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1, b = -2$.

$a = -1, b = -2, -2 < -1 \xrightarrow{\text{lógica}} b < a \implies a > b \implies$ a hipótese é verdadeira.

$\frac{1}{a^2 - b^2} = \frac{1}{(-1)^2 - (-2)^2} = \frac{1}{1 - 4} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{3} < 0 \xrightarrow{\text{transitividade}} \frac{1}{a^2 - b^2} < 0 \implies$ a tese é falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(g) Verdadeira. Prova:

Sabemos que $a^2 - b^2 \stackrel{\text{produto notável}}{=} (a - b)(a + b) \quad (*)$

$a > b > 0 \xrightarrow{\text{transitividade}} a > b, a > 0, b > 0 \xrightarrow{\text{def maior do que}} a - b > 0, a > 0, b > 0 \xrightarrow{\text{axioma da ordem 2}}$

$a - b > 0, a + b > 0 \xrightarrow{\text{axioma da ordem 2 e } (*)} a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) > 0 \xrightarrow{\text{PO 8}} \frac{1}{a^2 - b^2} > 0 \xrightarrow{\text{lógica}} \frac{1}{a^2 - b^2} \geq 0$.

(h) Falsa. Contra-exemplo: $a = -2, b = 3$.

$\frac{1}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{b} = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} < \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{transitividade}} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \implies$ hipótese verdadeira.

$b = 3, a = -2, -2 < 3 \xrightarrow{\text{transitividade}} a < b \xrightarrow{\text{tricotomia da ordem}} a < b$ a tese $b < a$ é falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(i) Verdadeira. Prova: $a > 0, b > 0, \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{PO 9}} b \frac{1}{a} < b \frac{1}{b} a \xrightarrow{\text{(AP5, PA8, AP4)}} b < a$.

(j) Verdadeira. Prova: $a > 0, b < 0, \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{(PO 9, PO 10)}} b \frac{1}{a} < b \frac{1}{b} a \xrightarrow{\text{(AP5, PA8, AP4)}} b < a$.

6. Exemplo 1: Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $a = b \implies a^2 = b^2$.

Exemplo 2: Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, temos que $a = b \implies \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$.

Exemplo 3: Para $x \in \mathbb{R}$, temos que $x < 2 \implies x < 3$.

Exemplo 4: Para $a \in \mathbb{R}$, temos que $a > 1 \implies a^2 > 1$.

Exemplo 5: Para $x \in \mathbb{R}$, temos que $1 < x \implies x < x^2$

⋮

7. (a) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -1, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1, x \neq 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

(b) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -1, x \neq 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

8. (a) $x = 0, x = 1, x = -1$ ou $x = -2$

(b) $x = 2$ ou $x = -3$

(c) $x = 0, x = 1, x = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$ ou $x = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$

(d) $\{x \in \mathbb{R}; x < 0 \text{ ou } 1 < x < 2\} = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$

(e) $\{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$

(f) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} = [0, \infty)$

(g) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -1, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1, x \neq 2, x < 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

(h) $\{x \in \mathbb{R}, x < -1\} = (-\infty, -1)$

9. (a) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{4}{15}\} = (-\infty, \frac{2}{9}) \cup (\frac{2}{9}, \frac{4}{15}) \cup (\frac{4}{15}, \infty)$

$E(x) = 0$: $x = -2 - \sqrt{7}$ ou $x = -2 + \sqrt{7}$

$E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{4}{15}\} \cap \{x < -2 - \sqrt{7} \text{ ou } \frac{4}{15} < x < -2 + \sqrt{7}\} = (-\infty, -2 - \sqrt{7}) \cup (\frac{4}{15}, -2 + \sqrt{7})$

$E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{4}{15}\} \cap \{-2 - \sqrt{7} < x < \frac{4}{15} \text{ ou } x > -2 + \sqrt{7}\} =$
 $= (-2 - \sqrt{7}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{2}{9}, \frac{4}{15}) \cup (-2 + \sqrt{7}, \infty)$

(b) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1, x \neq 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

$E(x) = 0$: $x = 3$

$E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1, x \neq 2\} \cap \{x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\} = (-\infty, -1) \cup (2, 3)$

$E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1, x \neq 2\} \cap \{1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\} = (1, 2) \cup (3, \infty)$

(c) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}\} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

$E(x) = 0$: $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$

$E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}\} \cap \{-\frac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x > \frac{3}{2}\} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

$E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}\} \cap \{x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < \frac{3}{2}\} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2})$

(d) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

$E(x) = 0$: $x = 3$

$E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \cap \{x < 2\} = (-\infty, 2)$

$E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \cap \{2 < x < 3 \text{ ou } x > 3\} = (2, 3) \cup (3, \infty)$