RESPOSTAS DA LISTA 3 - Números reais: módulo e raízes

1. Em todos os itens consideramos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (a) Falsa. Contra-exemplo: $a = -\pi$.

   $a = -\pi$ e $-\pi < 0 \overset{\text{definição de módulo}}{\Longrightarrow} |a| = |-\pi| = -(-\pi) \overset{\text{PA 9}}{=} \pi \Longrightarrow$ a hipótese $|a| = \pi$ é verdadeira.

   $a = -\pi$ e $-\pi \neq \pi \Longrightarrow$ a tese $a = \pi$ é falsa.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (b) Verdadeira. Justificativa:

   $|ab| \overset{\text{(iii)}}{=} |a|\cdot|b| \overset{\text{PA 27}}{\Longrightarrow} |ab| + (-|a|\cdot|b|) = |a|\cdot|b| + (-|a|\cdot|b|) \overset{\text{diferença e AS 4}}{\Longrightarrow} |ab| - |a|\cdot|b| = 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} |ab| - |a|\cdot|b| \geq 0$.

   (c) Falsa. contra-exemplo: $a = -2$ a a e $b = -1$.

   Temos que $a = -2, b = -1, -2 < -1 \Longrightarrow$ a afirmação $a < b$ é verdadeira.

   Temos que $a = -2$, $-2 < 0$, $b = -1$, $-1 < 0$, usando a definição de módulo,

   obtemos $|a| = |-2| = -(-2) = 2$ e $|a| = |-1| = -(-1) = 1$.

   Logo, de $|a| = 2$, $|b| = 1$, $2 > 1$, concluímos que $|a| > |b|$, daí, pela tricotomia da ordem, a tese $|a| < |b|$ é falsa.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (d) Verdadeira. Justificativa:

   $a < 0 \overset{\text{def módulo}}{\Longleftrightarrow} |a| = -a \overset{\text{lei do cancelamento}}{\Longleftrightarrow} a + |a| = a + (-a) \overset{\text{AS5}}{\Longleftrightarrow} a + |a| = 0$.

   (e) Falsa. Contra-exemplo. Para $a = 0$ não vale a volta, isto é, $a + |a| = 0 \not\Longrightarrow a < 0$.

   Quando $a = 0$ temos que $a + |a| = 0 + |0| = 0 + 0 = 0$, logo a hipótese da volta $a + |a| = 0$ é verdadeira.

   Mas $a = 0$, pela tricotomia da ordem, concluímos que a tese da volta, $a < 0$ é falsa.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (f) Verdadeira. Justificativa:

   $$a < b < 0 \Longrightarrow a < b \text{ e } b < 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} a < 0 \text{ e } b < 0 \overset{\text{def módulo}}{\Longrightarrow} |a| = -a \text{ e } |b| = -b. \qquad (*)$$

   Por outro lado, $a < b$ e $-1 < 0 \overset{\text{PO 10}}{\Longrightarrow} -a > -b \overset{(*)}{\Longrightarrow} |a| > |b|$.

   (g) Verdadeira. Justificativa:

   $c > 1$ e $1 > 0 \Longrightarrow c > 0 \overset{\text{def módulo}}{\Longrightarrow} |c| = c \qquad (*)$

   $c > 1 \overset{\text{PA 27}}{\Longrightarrow} c + (-1) > 0 + (-1) \overset{\text{diferença e AS4}}{\Longrightarrow} c - 1 > 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} |c| - 1 > 0$.

   (h) Verdadeira. Prova:

   Uma hipótese: $|a| < b$ e $b < |c| - 1 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} |a| < |c| - 1$.

   Outra hipótese: $c > 1 \overset{\text{exercício anterior}}{\Longrightarrow} |c| - 1 > 0$. Logo:

   $|a| < |c| - 1$ e $|c| - 1 > 0 \overset{\text{(v)}}{\Longrightarrow} -(|c| - 1) < a < |c| - 1 \overset{\text{PA 21, PA 9, AS3}}{\Longrightarrow} 1 - |c| < a < |c| - 1$.

   (i) Falsa. Contra-exemplo: $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$.

   Substituindo no lado esquerdo, $|a + b - c| = |1 + 2 - (-1)| = |3 + 1| = |4| = 4$.

   Substituindo no lado direito, $|a| + |b| - |c| = |1| + |2| - |-1| = 1 + 2 - (-(-1))3 - 1 = 2$.

   Como $4 \neq 2$, nesse exemplo, $|a + b - c| \neq |a| + |b| - |c|$, logo a igualdade é falsa, pois para ser verdadeira, teria que ser verdadeira para quaisquer valores de a, b, c.

   (j) Verdadeira. Prova:

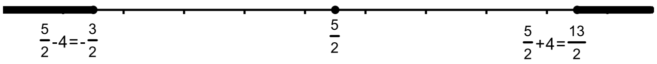
   $$a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} |a| > 0 \text{ e } |b| > 0 \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} \frac{1}{|a|} > 0 \text{ e } \frac{1}{|b|} > 0.$$

   Assim, $|b| < |a| \overset{\text{PO 9}}{\Longleftrightarrow} |b|\dfrac{1}{|a|} < |a|\dfrac{1}{|a|} \overset{\text{PO 9 e AP3}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{1}{|b|}|b|\dfrac{1}{|a|} < |a|\dfrac{1}{|a|}\dfrac{1}{|b|} \overset{\text{AP3 e AP4}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{1}{|a|} < \dfrac{1}{|b|}$.

2. Sejam $a, b, x \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

   $|x - a| < b \overset{\text{(v)}}{\Longleftrightarrow} -b < x - a < b \overset{\text{(PO 7)}}{\Longleftrightarrow} -b + a < x - a + a < b - a \overset{\text{(AS3, AS4, AS5, def diferença)}}{\Longleftrightarrow} a - b < x < b - a$.

3. (a) Verificando a simplificação,
$|2x-5| \geq 8 \iff \left|2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right| \geq 8 \iff |2|\left|x-\frac{5}{2}\right| \geq 8 \iff 2\left|x-\frac{5}{2}\right| \geq 8 \iff \left|x-\frac{5}{2}\right| \geq 4$
pela interpretação geométrica, significa que é preciso encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $\frac{5}{2}$ é maior do que 4 unidades, isto é, são os pontos iguais ou à direita do ponto $\frac{5}{2}+4=\frac{13}{2}$ ou iguais ou à esquerda do ponto $\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}$, veja reta numérica da fig. 1.



Solução $S=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{2},\infty\right)$

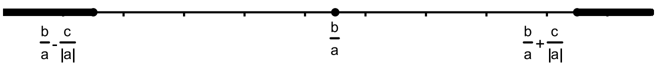
Fig. 1

(b) Sabemos que $|ax-b| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Caso } c \leq 0}$ $\iff 0 \geq c$, temos que $|ax-b| \geq 0 \geq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Solução $\boxed{S=(-\infty,\infty)}$.

$\boxed{\text{Caso } c > 0}$ $|ax-b| \geq c \iff \left|a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right| \geq c \iff |a|\left|x-\frac{b}{a}\right| \geq c \iff \left|x-\frac{b}{a}\right| \geq \frac{c}{|a|}$

pela interpretação geométrica, significa que é preciso encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $\frac{b}{a}$ é maior do que $\frac{c}{|a|}$ unidades, isto é, são os pontos iguais ou à direita do ponto $\frac{b}{a}+\frac{c}{|a|}$ ou iguais ou à esquerda do ponto $\frac{b}{a}-\frac{c}{|a|}$, veja a reta numérica da fig. 2.



Solução $\boxed{S=\left(-\infty,\frac{b}{a}-\frac{c}{|a|}\right] \cup \left[\frac{b}{a}+\frac{c}{|a|},\infty\right)}$

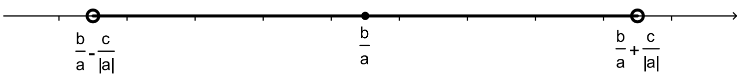
Fig. 2

(c) Sabemos que $|ax-b| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Caso } c \leq 0}$ temos que $|ax-b| < c \leq 0$. Mas $\nexists x; |ax-b|<0$ Solução $\boxed{S=\emptyset}$.

$\boxed{\text{Caso } c > 0}$ $|ax-b| < c \iff \left|a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right| < c \iff |a|\left|x-\frac{b}{a}\right| < c \iff \left|x-\frac{b}{a}\right| < \frac{c}{|a|}$

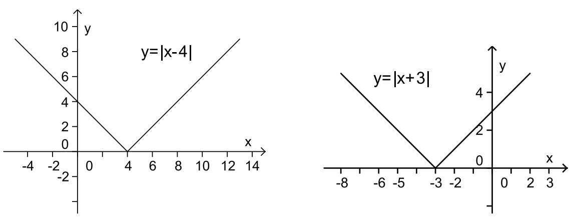
pela interpretação geométrica, significa que é preciso encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $\frac{b}{a}$ é menor do que $\frac{c}{|a|}$ unidades, isto é, são os pontos à esquerda do ponto $\frac{b}{a}+\frac{c}{|a|}$ e à direita do ponto $\frac{b}{a}-\frac{c}{|a|}$, veja a reta numérica da fig. 3.



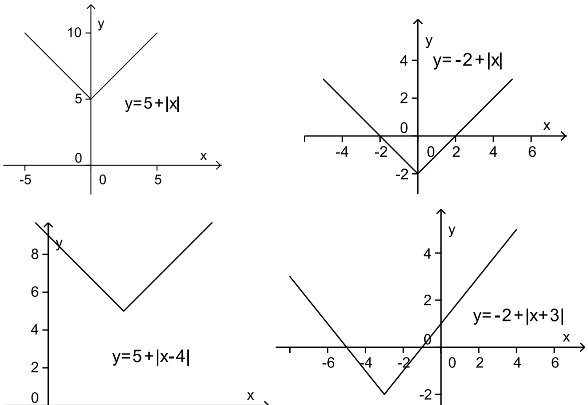
Solução $\boxed{S=\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{|a|},\frac{b}{a}+\frac{c}{|a|}\right)}$

Fig. 3

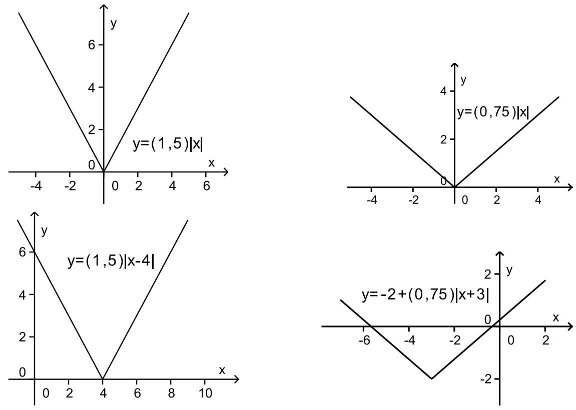
4. (a)



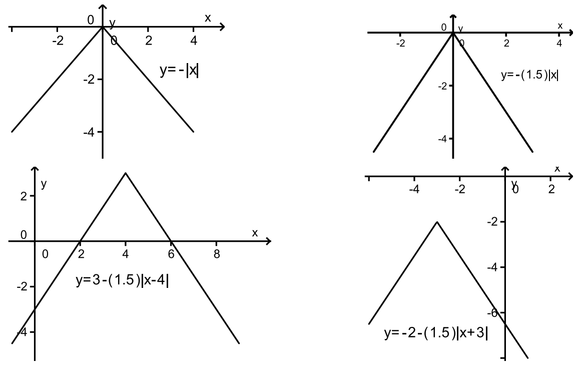
(b)



(c)



(d)



5. (a) $x = 0$ ou $x = 8/3$
   (b) $(0, 8/3)$
   (c) $(0, \infty)$
   (d) $(-\infty, 0)$
   (e) $[0, \infty)$
   (f) $x = 1$
   (g) $x = 2$ ou $x = 4/3$
   (h) $[4/3, 2]$
   (i) $x = 1/3$ ou $x = 7/3$
   (j) $\emptyset$
   (k) $(1/3, 7/3)$
   (l) $\emptyset$

6. **(i)** $a, -a \in \mathbb{R}$. Logo, $\text{máx}\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad a > -a \\ a & \text{se} \quad a = -a \\ -a & \text{se} \quad a < -a \end{cases} \overset{\text{PO 7, AS5 e AS4}}{\Longleftrightarrow} \text{máx}\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad a+a > 0 \\ a & \text{se} \quad a+a = 0 \\ -a & \text{se} \quad a+a < 0 \end{cases}$

$$\overset{\text{AP4 e ASP}}{\Longleftrightarrow} \text{máx}\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad 2a > 0 \\ a & \text{se} \quad 2a = 0 \\ -a & \text{se} \quad 2a < 0 \end{cases} \overset{\text{PO9}}{\Longleftrightarrow} \text{máx}\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad a > 0 \\ a = 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Por definição, $|a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a > 0 \\ 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$ Comparando a definição de $|a|$ e $(*)$, concluímos que $|a| = \text{máx}\{a,-a\}$.

(ii) $a, -a \in \mathbb{R}$. Logo, $\text{mín}\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad a < -a \\ a & \text{se} \quad a = -a \\ -a & \text{se} \quad a > -a \end{cases} \overset{\text{PO 7, AS5 e AS4}}{\Longleftrightarrow} \text{mín}\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad a+a < 0 \\ a & \text{se} \quad a+a = 0 \\ -a & \text{se} \quad a+a > 0 \end{cases}$

$$\overset{\text{AP4, ASP e PO9}}{\Longleftrightarrow} \text{mín}\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad a < 0 \\ a = 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ -a & \text{se} \quad a > 0 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \text{mín}\{a,-a\} = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a > 0 \\ 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Mas, por definição de módulo, $-|a| = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a > 0 \\ -0 = 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ -(-a) = a & \text{se} \quad a > 0 \end{cases}$, isto é, $-|a| = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a > 0 \\ 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$

Comparando $-|a|$ e $(**)$, concluímos que $-|a| = \text{mín}\{a,-a\}$.

7. Vamos provar primeiro que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos que $a \leq \text{máx}\{a,b\}$ e $a \geq \text{mín}\{a,b\}$
   Pela tricotomia da ordem, só há três casos admissíveis e distintos, (i) $a < b$, (ii) $a = b$, (iii) $a > b$.
   Primeiro vamos aplicar a definição de $\text{máx}\{a,b\}$:
   (i) $a < b \Longrightarrow a < b$ e $\text{máx}\{a,b\} = b \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a < \text{máx}\{a,b\} \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \leq \text{máx}\{a,b\}$
   (ii) $a = b \Longrightarrow \text{máx}\{a,b\} = a \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \leq \text{máx}\{a,b\}$
   (iii) $a > b \Longrightarrow \text{máx}\{a,b\} = a \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \leq \text{máx}\{a,b\}$. Logo, por (i), (ii), (iii), concluímos que $a \leq \text{máx}\{a,b\}$. $(*)$

   Agora vamos aplicar a definição de $\text{mín}\{a,b\}$:
   (i) $a < b \Longrightarrow \text{mín}\{a,b\} = a \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \geq \text{mín}\{a,b\}$
   (ii) $a = b \Longrightarrow \text{mín}\{a,b\} = a \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \geq \text{mín}\{a,b\}$
   (iii) $a > b \Longrightarrow a > b$ e $\text{mín}\{a,b\} = b \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a > \text{mín}\{a,b\} \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \geq \text{mín}\{a,b\}$. Concluímos que $a \geq \text{mín}\{a,b\}$. $(**)$

   Agora, substituindo b por $-a$ em $(*)$ e $(**)$, obtemos $a \leq \text{máx}\{a,b\}$ e $a \geq \text{mín}\{a,b\}$.
   Aplicando (i) e (ii) do exercício anterior, concluímos que $a \leq |a|$ e $a \geq -|a|$.

8. $-|a| \leq a \leq |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R} \overset{\text{lógica}}{\Longleftrightarrow} -|a| \leq a$ e $a \leq |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$. É a mesma afirmação do exercício anterior, já provada.

9. (a) Falsa. Contra-exemplo: $x = -2$.
   Verificando, $\dfrac{\sqrt{(-2-1)^2}}{(-2)^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{9}}{3} = 1$ e $\dfrac{1}{-2+1} = -1$. Logo $\dfrac{\sqrt{(-2-1)^2}}{(-2)^2 - 1} \neq \dfrac{1}{-2+1}$.

(b) Verdadeira.
Sabemos da propriedade de ordem dos números reais que $x^2 = y^2 \iff x = y$ ou $x = -y$. Mas se $x, y \geq 0$ sabemos que $x = -y \iff x = 0$ e $y = 0$.
Isto é, sabemos que quando $x, y \geq 0$ vale a equivalência $x^2 = y^2 \iff x = y$.
Agora considerando $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$, temos que $x^2 = (\sqrt{a})^2 = a$ e $y^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b$.
Por hipótese, $a, b \geq 0$, logo $(\sqrt{a})^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2 \iff \sqrt{a} = \sqrt{b}$.
Assim, $a, b \geq 0$, vale $a = b \iff \sqrt{a} = \sqrt{b}$

(c) Verdadeira. Sabemos que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale $x = y \iff x^3 = y^3. \iff x^2 \cdot x^3 = y^2 \cdot y^3 \iff x^5 = y^5$.
Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, $x = \sqrt[5]{a}$ e $y = \sqrt[5]{b}$, vale $\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{b} \iff (\sqrt[5]{a})^5 = \left(\sqrt[5]{b}\right)^5 \iff a = b$.

(d) Verdadeira.
Sabemos que $\sqrt{x-1}$ está definida se e só se $x - 1 \geq 0$. Logo,
$x - 1 < 4\sqrt{x-1} \iff x - 1 < 4\sqrt{x-1}$ e $x - 1 \geq 0 \iff (x-1)^2 < \left(4\sqrt{x-1}\right)^2 \iff (x-1)^2 < 16(x-1)$.

(e) Verdadeira. $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = \left|x^2\right| = x^2$ e $\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^4} = \sqrt[3]{x^6}$.

(f) Falsa. C. Ex: $x = -1$. Verificando, $\sqrt[4]{(-1)^{20}} = \sqrt[4]{1} = 1$ e $(-1)^5 = 1$. Logo, $\sqrt[4]{(-1)^{20}} \neq (-1)^5$.

(g) A desigualdade é falsa quando $x = 0$.
Mas, vamos tentar encontrar as condições que seria verdadeira se $x \neq 0$.
$\sqrt[4]{x^{40}} < \sqrt{x^{24}} \iff \sqrt[4]{(x^{10})^4} < \sqrt{(x^{12})^2} \iff \left|x^{10}\right| < \left|x^{12}\right| \iff x^{10} < x^{12} \iff x^{10} < x^2 \cdot x^{10} \overset{x^{10}>0}{\iff} 1 < x^2$.
Assim qualquer exemplo onde $-1 < x < 1$ tornará a desigualdade falsa, logo a afirmação é falsa.

(h) Verdadeira.
Primeiro vamos verificar o domínio da inequação: $x \in \mathbb{R}$; $x - 1 > 0$ e $x - 2 > 0$.
Logo o domínio é: $x \in \mathbb{R}$; $x > 2$. Também sabemos que $\sqrt{x-2} > 0$ e $\sqrt{x-1} > 0$.
Assim podemos usar a propriedade dos reais, no caso em que $b > 0$ e $d > 0$ vale $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \iff ad < bc$.
Mas cuidado com essa propriedade, ela não é verdadeira em qualquer caso !!!.
Como $\sqrt{x-2} > 0$ e $\sqrt{x-1} > 0$, vale $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \iff \sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}$.
Considerando $a = x - 1 > 0$ e $b = x - 2 > 0$ podemos usar a propriedade $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$. Logo,
$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \iff \sqrt{x-2} < \sqrt{x-1} \iff x - 2 < x - 1 \iff -2 < -1$.
Como $-2 < -1$ é verdadeira para $\forall\ x \in \mathbb{R}$, a primeira desigualdade será verdadeira para todo x no domínio da desigualdade, isto é, para todo x; $x > 2$.

(i) Verdadeira.
Exibindo um exemplo, $a = 3$. Verificando, $\sqrt{3^2 + 16} = \sqrt{25} = 5$ e 3+4=7. Logo, $\sqrt{3^2 + 16} \neq 3+4$.

(j) Verdadeira.
Exibindo um exemplo, $a = 0$. $\sqrt{0^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$ e $0 + 4 = 4$. Logo, $\sqrt{0^2 + 16} = 0 + 4$.
Na verdade esse é o único exemplo onde $\sqrt{a^2 + 16} = a + 4$, isto é, $\sqrt{a^2 + 16} = a + 4 \iff a = 0$.

10. (a) $x = 2$ (b) $(0, 1)$ (c) $x = 0$

11. (a) $E(x)$ está definida em $[1, 4) \cup (4, \infty)$. $E(x) > 0$ se $x > 4$. $E(x) < 0$ se $1 \leq x < 4$. $\nexists x$; $E(x) = 0$.
(b) $E(x)$ está definida em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$.
$E(x) > 0$ em $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$. $E(x) < 0$ em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. $E(x) = 0$ em $x = \frac{3}{2}$.

.

12. (a) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$. Elipse de centro $(2, 3)$ e semi-eixos $a = 2$, $b = 4$.
(b) $4(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$. Caso degenerado, ponto $P = (2, 3)$.
(c) $x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(y-1)^2$. Parábola, vértice $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, eixo paralelo ao eixo x, concavidade voltada para esquerda.
(d) $\dfrac{x^2}{\frac{28}{9}} - \dfrac{(y-1)^2}{7} = 1$. Hipérbole, eixo paralelo ao eixo x, centro $(0, 1)$, semi-eixos $a = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ e $b = \sqrt{7}$.
(e) $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -5$. Caso degenerado, não há solução.