Noções *muito* básicas de Turbulência

João Felipe Mitre[1]

[1]Universidade Federal Fluminense

2019

Plano da apresentação

Conceitos básicos

- Escoamento laminar
- Escoamento turbulento

Plano da apresentação

Modelagem Básica

Equação da Continuidade ou Equação Conservação de Massa Total

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

Modelagem Básica

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento ou Equação de Conservação de *Momentum*

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}' + \rho\mathbf{f}_{\mathbf{v}}$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

Caso particular: Fluido Newtoniano

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right) + \lambda\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \qquad \lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Modelagem Básica

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento ou Equação de Conservação de *Momentum*

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{v}\right)}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\right)=-\boldsymbol{\nabla}p+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}'+\rho\mathbf{g}$$

Caso particular: Equação de Navier-Stokes

Fluido newtoniano, incompressível, viscosidade constante.

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p+\nu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v}+\rho\mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}=0$$

Modelagem Básica

Equação de Conservação da Energia Térmica

$$\frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho C_p T \mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}" + \dot{q}_v - p \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{DP}{Dt} - \boldsymbol{\tau}' : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}$$

Lei de Fourier

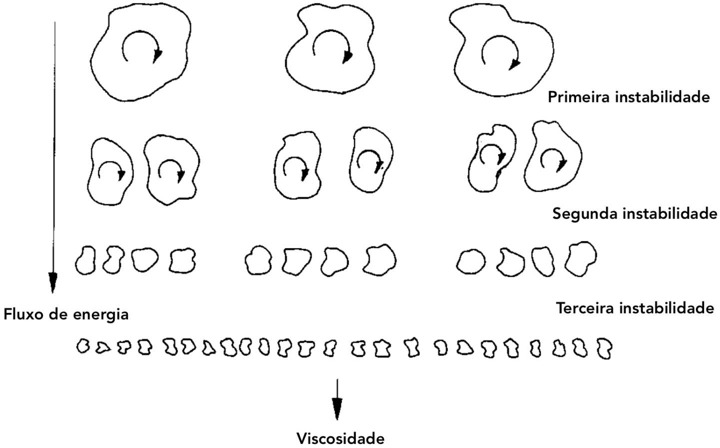
$$\mathbf{q}" = -k \boldsymbol{\nabla} T$$

Plano da apresentação

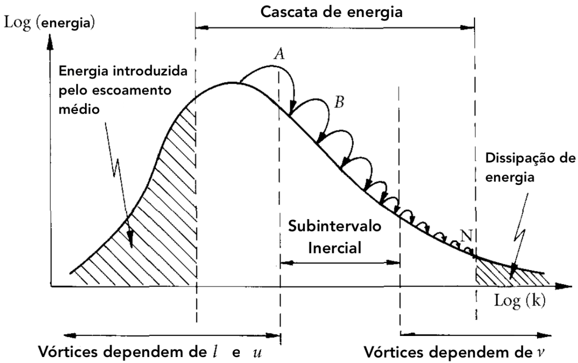
Aspectos Básicos

- É um estado de escoamento do fluido no qual as velocidades instantâneas exibem flutuações irregulares e aparentemente aleatórias, tal que, na prática, apenas propriedades estatísticas podem ser reconhecidas e submetidas a uma análise. Baker et al. (1966).
- História da Turbulência: Série de vídeos no youtube: Reynolds, Prandtl, von Karman, Taylor, Kolmogorov, etc.
- Existe uma grande quantidade de vórtices em uma vasta gama de escalas temporais e espaciais.
- Vórtices maiores drenam energia do escoamento médio para os vórtices menores e, estes, para outros ainda menores.
- As menores escalas dissipam a energia pelas tensões viscosas.
- Cascata de energia de Kolmogorov.
- Escalas Integrais e Escalas de Kolmogorov, $\eta = \left(\nu^3/\epsilon\right)^{1/4}$

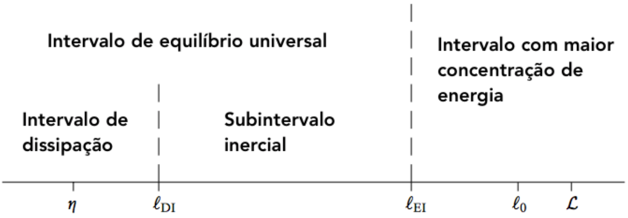
Aspectos Básicos



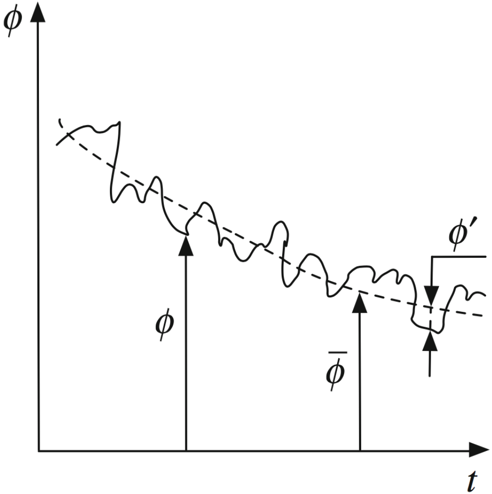
Aspectos Básicos



Aspectos Básicos



Aspectos Básicos



Aspectos Básicos

Técnicas de solução do escoamento turbulento:

	FLOPS	RAM	
RANS	$10^9 - 10^{11}$	1 - 10 GB	Modela todas as escalas
LES	$10^{13} - 10^{17}$	1 - 100 TB	Resolve as grandes escala e modela as demais
DNS	$10^{19} - 10^{23}$	10000 TB - 1 EB	Resolve todas as escalas

Caracterização das médias

Média temporal (RANS):

$$\langle \phi_T \rangle (\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}t$$

Média espacial (LES):

$$\langle \phi_V \rangle (t) = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \int_V \phi(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}V$$

Seja a propriedade ϕ:

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi'$$

Propriedade das médias

Seja a propriedade ϕ:

$$\phi = \langle\phi\rangle + \phi'$$

Assim:

$$\langle\phi\rangle = \langle\langle\phi\rangle + \phi'\rangle = \langle\langle\phi\rangle\,\rangle + \langle\phi'\rangle$$

Logo:

$$\langle\phi'\rangle = 0$$

Também:

$$\langle\langle\phi\rangle\,\phi'\rangle = \langle\phi\rangle\,\langle\phi'\rangle = 0$$

Além desses acima, temos:

$$\langle\phi\phi'\rangle = \langle\phi'\phi'\rangle$$

$$\langle\phi\eta\rangle = \langle\phi\rangle\,\langle\eta\rangle + \langle\phi'\eta'\rangle$$

Propriedades média do escoamento

Seja a propriedade ϕ:

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi'$$

Assim:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}'$$

$$p = \langle p \rangle + p'$$

$$T = \langle T \rangle + T'$$

$$\rho = \langle \rho \rangle + \rho' = \langle \rho \rangle$$

assumindo que $\rho' = 0$
Caso o escoamento seja fortemente compressível, é necessário usar outra média, média de Favre.
Processo de promediação.

Promediação da equação da continuidade

Originalmente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

Aplicando a média:

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \right\rangle$$

Dissociando os termos:

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \right\rangle = \langle 0 \rangle$$

Resultado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial x_i} = 0$$

Promediação da equação de conservação de quantidade de movimento

Originalmente:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] - \rho f_i = 0$$

Aplicando a média:

$$\left\langle \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] - \rho f_i = 0 \right\rangle$$

Dissociando os termos:

$$\left\langle \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] \right\rangle +$$

$$- \langle \rho f_i \rangle = \langle 0 \rangle$$

Trabalhando cada termo individualmente...

Promediação da equação de conservação de quantidade de movimento

Termo 1: $\left\langle \dfrac{\partial \rho v_i}{\partial t} \right\rangle = \dfrac{\partial \rho \left\langle v_i \right\rangle}{\partial t}$

Promediação da equação de conservação de quantidade de movimento

Termo 1: $\left\langle \dfrac{\partial \rho v_i}{\partial t} \right\rangle = \dfrac{\partial \rho \left\langle v_i \right\rangle}{\partial t}$

Termo 2: $\left\langle \dfrac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right\rangle = \dfrac{\partial \rho \left\langle v_i \right\rangle \left\langle v_j \right\rangle}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \rho \left\langle v_i' v_j' \right\rangle}{\partial x_j}$

Promediação da equação de conservação de quantidade de movimento

Termo 1: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial t}$

Termo 2: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \left\langle v_i' v_j' \right\rangle}{\partial x_j}$

Termo 3: $\left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i}$

Promediação da equação de conservação de quantidade de movimento

Termo 1: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial t}$

Termo 2: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \left\langle v_i' v_j' \right\rangle}{\partial x_j}$

Termo 3: $\left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i}$

Termo 4: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]$

Promediação da equação de conservação de quantidade de movimento

Termo 1: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial t}$

Termo 2: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \left\langle v_i' v_j' \right\rangle}{\partial x_j}$

Termo 3: $\left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i}$

Termo 4: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]$

Termo 5: $\langle \rho f_i \rangle = \rho f_i$

Promediação da equação de conservação de quantidade de movimento

Termo 1: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial t}$

Termo 2: $\left\langle \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \left\langle v_i' v_j' \right\rangle}{\partial x_j}$

Termo 3: $\left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i}$

Termo 4: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]$

Termo 5: $\langle \rho f_i \rangle = \rho f_i$

Termo 6: $\langle 0 \rangle = 0$

Equação média de Reynolds

Assim:

$$\frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]$$

$$+\rho f_i - \frac{\partial \rho \left\langle v_i' v_j' \right\rangle}{\partial x_j}$$

Definindo o Tensor de Reynolds:

$$R_{ij} = -\left\langle v_i' v_j' \right\rangle$$

Podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]$$

$$+\rho f_i + \frac{\partial \rho \langle R_{ij} \rangle}{\partial x_j}$$

Equação média da Energia Térmica

Escoamento compressível e propriedades constantes:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} = k \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x_j^2} - \rho C_p \frac{\partial \left\langle v_j' T' \right\rangle}{\partial x_j}$$

Desafio da modelagem da Turbulência

Como modelar os termos de flutuação turbulenta?
Como modelar o Tensor de Reynolds?

- Modelos algébricos
- Modelos diferenciais
- Modelos de Tensões de Reynolds

Equação de Transporte para as Tensões de Reynolds

Definindo o operador $\mathcal{N}\left(v_i\right)$:

$$\mathcal{N}\left(v_i\right) = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] - \rho f_i$$

Logo:

$$\mathcal{N}\left(v_i\right) = 0$$

Assim:

$$\left\langle v_i \mathcal{N}\left(v_j\right) + v_j \mathcal{N}\left(v_i\right) \right\rangle = 0$$

Após algumas páginas de manipulação algébrica...

Equação de Transporte para as Tensões de Reynolds

$$\frac{\partial \rho R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k R_{ij}}{\partial x_k} = D_{ij}^T + D_{ij}^L + P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} + \epsilon_{ij} + F_{ij}$$

onde D_{ij}^T é o termo de difusão turbulenta:

$$D_{ij}^T = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho \left\langle v_i' v_j' v_k' \right\rangle\right]$$

D_{ij}^L é o termo de difusão molecular e da pressão:

$$D_{ij}^L = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k}\right] + \left\langle p\left(\delta_{kj} v_i' + \delta_{ik} v_j'\right)\right\rangle$$

P_{ij} é o termo da produção de tensão:

$$P_{ij} = -\rho\left(R_{ik}\frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_k} + R_{jk}\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k}\right)$$

Equação de Transporte para as Tensões de Reynolds

$$\frac{\partial \rho R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k R_{ij}}{\partial x_k} = D_{ij}^T + D_{ij}^L + P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} + \epsilon_{ij} + F_{ij}$$

G_{ij} é o termo de produção associado ao termo de força de corpo:

$$G_{ij} = -\left[\langle v_i \rho f_j \rangle + \langle v_j \rho f_i \rangle\right]$$

ϕ_{ij} é o termo de deformação associada a pressão:

$$\phi_{ij} = \left\langle p \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle$$

ϵ_{ij} é o termo de dissipação:

$$\epsilon_{ij} = -2\mu \left\langle \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \frac{\partial v_j'}{\partial x_k} \right\rangle$$

Equação de Transporte para as Tensões de Reynolds

$$\frac{\partial \rho R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k R_{ij}}{\partial x_k} = D_{ij}^T + D_{ij}^L + P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} + \epsilon_{ij} + F_{ij}$$

F_{ij} é o termo de produção devido a rotação do sistema:

$$F_{ij} = -2\rho\Omega_k \left(R_{jm}\varepsilon_{ikm} + R_{im}\varepsilon_{jkm}\right)$$

Os termos D_{ij}^T, ϕ_{ij}, G_{ij} e ϵ_{ij} dependem de modelagem

Modelos algébricos

- Equações algébricas para R_{ij}
- Modelos mais simples
- Originalmente muito usados pela indústria aeronáutica.

Equação de Conservação da Energia Cinética Turbulenta Específica

$$\kappa = \frac{1}{2} R_{ii}$$

- Uma equação diferencial
- Prandtl (1945), modelo de viscosidade turbulenta.
- Modelos de uma equação diferencial usam a equação para κ, modela algebricamente os demais termos.

Modelos de duas equações diferenciais

- Uma equação diferencial é κ.
- Outra equação diferencial para, por exemplo, modelar a taxa específica de dissipação de energia cinética turbulenta, ϵ.
- Principais modelos: $\kappa - \epsilon$, $\kappa - \omega$ (onde $\epsilon \sim \omega k$, SST e variantes).

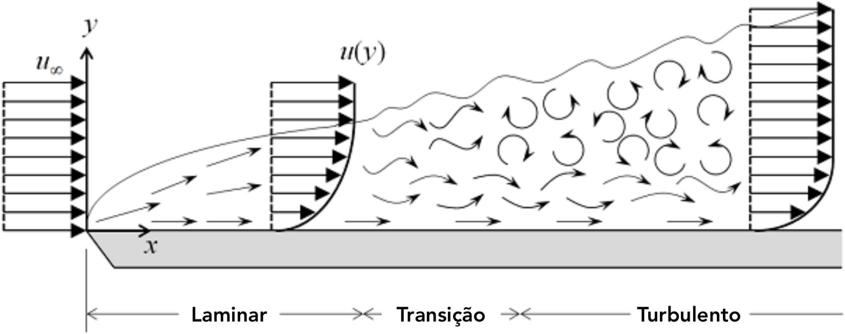
Modelos de Tensores de Reynolds

- Resolve as equações de conservações do Tensor de Reynolds, R_{ij}.
- Proposta de modelagem de D_{ij}^T, ϕ_{ij}, G_{ij} e ϵ_{ij}
- Principais modelos: BSL, SSG, LLR e variantes

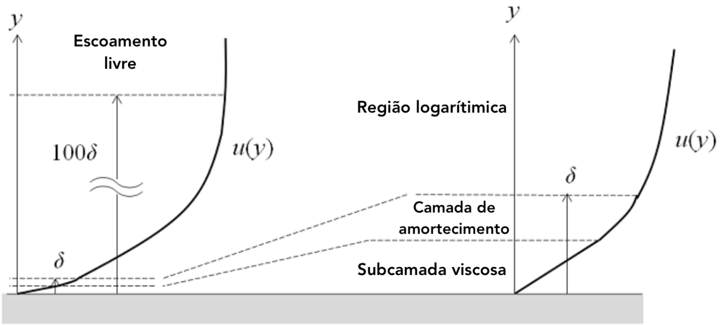
Alternativas de modelagem

- LES: Modela apenas as pequenas escalas, modelo clássico: Smagorinsky.
- DES: LES nas grandes escalas, modelos de duas equações ou de tensor de Reynolds nas pequenas escalas.
- DNS: Preciso, porém, computacionalmente muito caro.

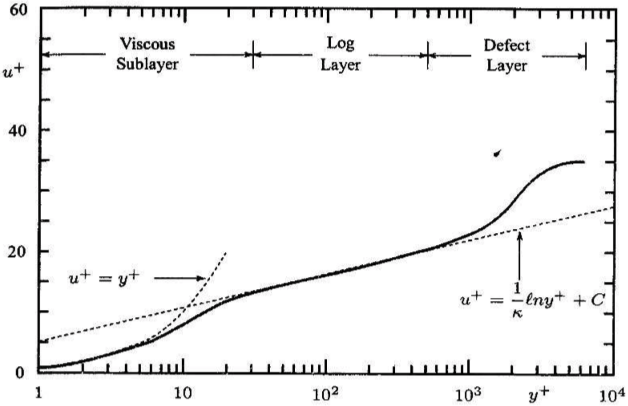
Modelagem da parede



Modelagem da parede



Modelagem da parede



http://www.pointwise.com/yplus/

Modelagem da parede

Definindo o tamanho do primeiro elemento da malha, Δs:

$$\Delta s = \frac{y^+ \mu}{U_{fric} \rho}$$

$$U_{fric} = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}}; \quad \tau_{wall} = \frac{C_f \rho U_\infty^2}{2}; \quad C_f = \frac{0{,}026}{Re^{1/7}}; \quad Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$$

Dicas gerais para y^+:

- $\kappa - \epsilon$: $30 < y^+ < 100$
- $\kappa - \omega$: $y^+ < 1$
- SST: $y^+ < 1$ ou 2
- Se resolve a parede: $y^+ < 1$