Equações Lineares de 1^a Ordem - Aplicações

Maria João Resende

www.professores.uff.br/mjoao

2016-2

Modelos Matemáticos

Chamamos de **modelo matemático**, uma descrição matemática de algum sistema ou fenômeno físico, sociológico ou até econômico.

Modelos Matemáticos

Chamamos de **modelo matemático**, uma descrição matemática de algum sistema ou fenômeno físico, sociológico ou até econômico.

Construção de modelo matemático

Modelos Matemáticos

Chamamos de **modelo matemático**, uma descrição matemática de algum sistema ou fenômeno físico, sociológico ou até econômico.

Construção de modelo matemático

1. identificar as variáveis (por vezes eliminando algumas a princípio, para facilitar os cálculos)

Modelos Matemáticos

Chamamos de **modelo matemático**, uma descrição matemática de algum sistema ou fenômeno físico, sociológico ou até econômico.

Construção de modelo matemático

1. identificar as variáveis (por vezes eliminando algumas a princípio, para facilitar os cálculos)
2. elaborar um conjunto de hipóteses

Modelos Matemáticos

Chamamos de **modelo matemático**, uma descrição matemática de algum sistema ou fenômeno físico, sociológico ou até econômico.

Construção de modelo matemático

1. identificar as variáveis (por vezes eliminando algumas a princípio, para facilitar os cálculos)
2. elaborar um conjunto de hipóteses
3. descrever o problema por meio de uma equação (ou sistema de equações)

Trajetórias Ortogonais

Consideremos uma família de curvas $\mathscr{F}$ no plano xy, que são soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

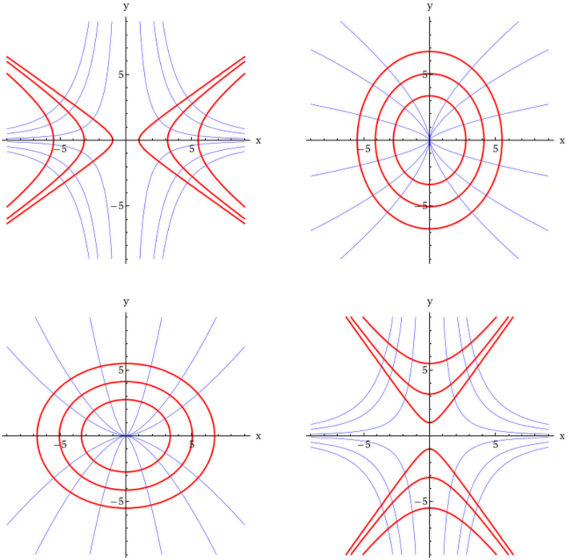
Trajetórias Ortogonais

Consideremos uma família de curvas $\mathscr{F}$ no plano xy, que são soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Objetivo:

Determinar uma família de curvas $\mathscr{G}$ ortogonal a $\mathscr{F}$, ou seja, as interseções entre duas curvas de cada uma das famílias é ortogonal.


y
x
5
−5
5
−5
y
x
5
−5
5
−5
y
x
5
−5
5
−5
y
x
5
−5
5
−5

Seja (x_0, y_0) um ponto que pertença a uma curva $\mathscr{C}$, da família $\mathscr{F}$.

Seja (x_0, y_0) um ponto que pertença a uma curva $\mathscr{C}$, da família $\mathscr{F}$.

O coeficiente angular da reta tangente à curva $\mathscr{C}$ nesse ponto é dado por $f(x_0, y_0)$.

Seja (x_0, y_0) um ponto que pertença a uma curva $\mathscr{C}$, da família $\mathscr{F}$.

O coeficiente angular da reta tangente à curva $\mathscr{C}$ nesse ponto é dado por $f(x_0, y_0)$.

Assim o coeficiente angular de uma reta ortogonal a $\mathscr{C}$ é dado por

$$-\frac{1}{f(x_0, y_0)}, \text{ se } f(x_0, y_0) \text{ for não nulo.}$$

Seja (x_0, y_0) um ponto que pertença a uma curva $\mathscr{C}$, da família $\mathscr{F}$.

O coeficiente angular da reta tangente à curva $\mathscr{C}$ nesse ponto é dado por $f(x_0, y_0)$.

Assim o coeficiente angular de uma reta ortogonal a $\mathscr{C}$ é dado por

$$-\frac{1}{f(x_0, y_0)}, \text{ se } f(x_0, y_0) \text{ for não nulo.}$$

Então a equação que define a <u>família $\mathscr{G}$</u> (ortogonal à família $\mathscr{F}$) é:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Dinâmica Populacional

Modelos que descrevem o crescimento de populações humanas ou de outras espécies.

Dinâmica Populacional

Modelos que descrevem o crescimento de populações humanas ou de outras espécies.

Modelos

Dinâmica Populacional

Modelos que descrevem o crescimento de populações humanas ou de outras espécies.

Modelos

1. Modelo de Malthus

Dinâmica Populacional

Modelos que descrevem o crescimento de populações humanas ou de outras espécies.

Modelos

1. Modelo de Malthus
2. Modelo Logístico (Verhuls t-Pearl)

Dinâmica Populacional

Modelos que descrevem o crescimento de populações humanas ou de outras espécies.

Modelos

1. Modelo de Malthus
2. Modelo Logístico (Verhuls t-Pearl)
3. ...

Modelo de Malthus

$$P(t) = \text{população total no instante } t.$$

Modelo de Malthus

$$P(t) = \text{população total no instante } t.$$

Hipótese:

A taxa segundo a qual a população cresce num determinado instante t, é proporcional à população total no mesmo instante.

Modelo de Malthus

$$P(t) = \text{população total no instante } t.$$

Hipótese:

A taxa segundo a qual a população cresce num determinado instante t, é proporcional à população total no mesmo instante.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Modelo de Malthus

$$P(t) = \text{população total no instante } t.$$

Hipótese:

A taxa segundo a qual a população cresce num determinado instante t, é proporcional à população total no mesmo instante.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Observação: Se $k < 0$ então a população diminui e tende a ser extinta. Se $k > 0$ então a população cresce e tenderia a infinito. No entanto, como o ambiente tem limitações, a longo prazo o crescimento populacional será eventualmente inibido pela falta de recursos essenciais.

Modelo Logístico (Verhuls t-Pearl)

$$P(t) = \text{população total no instante } t.$$

Modelo Logístico (Verhuls t-Pearl)

$$P(t) = \text{população total no instante } t.$$

$$L = \text{limite máximo para a população (isto é, a capacidade do ambiente).}$$

Modelo Logístico (Verhuls t-Pearl)

$P(t) =$ população total no instante t.

$L =$ limite máximo para a população (isto é, a capacidade do ambiente).

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$$

Modelo Logístico (Verhuls t-Pearl)

$P(t) =$ população total no instante t.

$L =$ limite máximo para a população (isto é, a capacidade do ambiente).

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$$

Observações:

Se $P = P(t)$ é pequeno quando comparado com L, a EDO é praticamente a mesma do modelo anterior.

Modelo Logístico (Verhuls t-Pearl)

$P(t) =$ população total no instante t.

$L =$ limite máximo para a população (isto é, a capacidade do ambiente).

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$$

Observações:

Se $P = P(t)$ é pequeno quando comparado com L, a EDO é praticamente a mesma do modelo anterior.

Este modelo é mais realista que o de Malthus, mas ainda tem as suas limitações, pois não permite a possibilidade de extinção, já que, a população sempre tenderá para L. Mesmo assim, é um modelo bastante apropriado para a análise de sistemas como por exemplo o crescimento populacional de cidades e o de populações de lactobacilos.

Decaimento Radioativo

O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e neutrons. Como muitas dessas combinações são instáveis, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outras substâncias. Dizemos que esses núcleos são radioativos.

Decaimento Radioativo

O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e neutrons. Como muitas dessas combinações são instáveis, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outras substâncias. Dizemos que esses núcleos são radioativos.

$$Q(t) = \text{quantidade de uma substância radioativa no instante } t.$$

Decaimento Radioativo

O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e neutrons. Como muitas dessas combinações são instáveis, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outras substâncias. Dizemos que esses núcleos são radioativos.

$$Q(t) = \text{quantidade de uma substância radioativa no instante } t.$$

Hipótese:

A taxa segundo a qual a substância decai é proporcional à quantidade.

Decaimento Radioativo

O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e neutrons. Como muitas dessas combinações são instáveis, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outras substâncias. Dizemos que esses núcleos são radioativos.

$$Q(t) = \text{quantidade de uma substância radioativa no instante } t.$$

Hipótese:

A taxa segundo a qual a substância decai é proporcional à quantidade.

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

Decaimento Radioativo

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

Decaimento Radioativo

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

Observações:
A constante k depende do elemento e pode ser determinada através do tempo de "meia-vida" do elemento, que é o tempo necessário para desintegrar metade da quantidade do elemento.

Decaimento Radioativo

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

Observações:
A constante k depende do elemento e pode ser determinada através do tempo de "meia-vida" do elemento, que é o tempo necessário para desintegrar metade da quantidade do elemento.

Por exemplo, a meia-vida do carbono-14 está entre 5538 e 5598 anos, sendo em média 5568 anos com um erro para mais ou para menos de 30 anos. O C-14 é uma importante ferramenta em pesquisa arqueológica conhecida como teste do radiocarbono.

Lei do Resfriamento de Newton

Este modelo descreve a troca de calor entre um corpo e o meio ambiente que o rodeia.

Lei do Resfriamento de Newton

Este modelo descreve a troca de calor entre um corpo e o meio ambiente que o rodeia.

Hipótese:

- A temperatura do corpo $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo.

Lei do Resfriamento de Newton

Este modelo descreve a troca de calor entre um corpo e o meio ambiente que o rodeia.

Hipótese:

- A temperatura do corpo $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo.
- A temperatura T_m do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência.

Lei do Resfriamento de Newton

Este modelo descreve a troca de calor entre um corpo e o meio ambiente que o rodeia.

Hipótese:

- A temperatura do corpo $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo.
- A temperatura T_m do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência.
- A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Lei do Resfriamento de Newton

Este modelo descreve a troca de calor entre um corpo e o meio ambiente que o rodeia.

Hipótese:

- A temperatura do corpo $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo.
- A temperatura T_m do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência.
- A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Lei do Resfriamento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Lei do Resfriamento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Observação:

- A constante k depende do material que constitui o corpo.

Lei do Resfriamento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Observação:

- A constante k depende do material que constitui o corpo.
- Se $k > 0$, a temperatura do corpo está aumentando com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente.

Lei do Resfriamento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Observação:

- A constante k depende do material que constitui o corpo.
- Se $k > 0$, a temperatura do corpo está aumentando com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente.
- Se $k < 0$ o corpo está arrefecendo relativamente à temperatura ambiente.

Misturas

Problema:

Temos um tanque com uma solução salina e a partir de certo momento adicionamos uma outra solução com concentração de sal diferente, ao mesmo tempo que a mistura do tanque é escoada. Qual a concentração de sal da solução no tanque?

Misturas

Problema:
Temos um tanque com uma solução salina e a partir de certo momento adicionamos uma outra solução com concentração de sal diferente, ao mesmo tempo que a mistura do tanque é escoada. Qual a concentração de sal da solução no tanque?

Hipótese:

A taxa segundo a qual quantidade de sal no tanque varia é a diferença entre as taxas de entrada e de saída de sal.

Misturas

$Q(t) =$ quantidade de sal no tanque no instante t (Kg)

Misturas

$Q(t) =$ quantidade de sal no tanque no instante t (Kg)

$V =$ capacidade do tanque (L)

Misturas

$Q(t) =$ quantidade de sal no tanque no instante t (Kg)

$V =$ capacidade do tanque (L)

$C =$ concentração de sal na solução que será inserida no tanque (Kg/L)

Misturas

$Q(t) =$ quantidade de sal no tanque no instante t (Kg)

$V =$ capacidade do tanque (L)

$C =$ concentração de sal na solução que será inserida no tanque (Kg/L)

$F =$ razão de entrada e saída de solução do tanque (L/min).

Misturas

$Q(t)$ = quantidade de sal no tanque no instante t (Kg)

V = capacidade do tanque (L)

C = concentração de sal na solução que será inserida no tanque (Kg/L)

F = razão de entrada e saída de solução do tanque (L/min).

$$\frac{dQ}{dt} = F\left(C - \frac{Q(t)}{V}\right)$$