Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A –Módulo 3

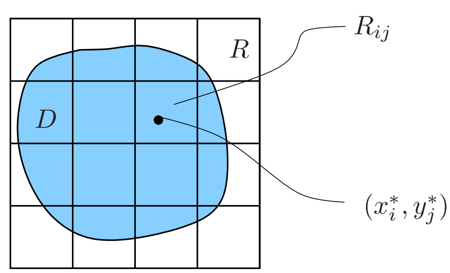
Aula 5 – Aplicações da Integrais Duplas

Objetivo

- Estudar algumas aplicações físicas como massa, centro de massa e momento de inércia.

1. Massa

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, uma região compacta, representando uma lâmina plana delgada. Suponhamos que a função contínua e positiva $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ representa a densidade superficial de massa (massa por unidade de área).



Considerando-se n^2 subretângulos R_{ij} de algum retângulo R que contém D e uma escolha $\left(x_i^*, y_j^*\right) \in R_{ij}$, observamos que a soma

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \delta\left(x_i^*, y_j^*\right) \Delta A$$

é uma aproximação da massa M de D, onde $\delta\left(x_i^*, y_j^*\right) = 0$ se $\left(x_i^*, y_j^*\right) \notin D$. Logo, é razoável definir a massa M de D com

$$M = \iint\limits_D \delta(x, y)\, dxdy\,.$$

OBS.: Se $\delta(x, y)$ for constante e igual a k, então a massa M será igual a $kA(D)$. Neste caso, dizemos que a lâmina D é homogênea.

2. Centro de Massa

a) Seja um sistema finito de partículas $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \cdots, P_n = (x_n, y_n)$, com massas $m_i, i = 1, \cdots, n$, respectivamente. Lembrando da Física que os momentos de massa desse sistema, em relação aos eixos x e y, são definidos por:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \text{ e } M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,.$$

O centro de massa do sistema é o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, que se comporta como se a massa total $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ do sistema estivesse concentrada nesse ponto. Logo,

$$M\overline{x} = My \quad \text{e} \quad M\overline{y} = Mx$$

ou

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \,.$$

b) Se considerarmos no lugar de um sistema finito de partículas, uma lâmina plana D, com densidade superficial de massa dada por uma função contínua e positiva $\delta(x, y)$, fazemos uma partição de algum retângulo R contendo D, obtendo subretângulos R_{ij}. Escolhemos $\left(x_i^*, y_j^*\right) \in R_{ij}$. Logo, a massa de R_{ij} pode ser aproximada por $\delta\left(x_i^*, y_j^*\right) \Delta A$, onde $\delta\left(x_i^*, y_j^*\right) = 0$ se $\delta\left(x_i^*, y_j^*\right) \notin D$. Então

$$M_x \simeq \sum_{i,j=1}^{n} y_j^* \delta\left(x_i^*, y_j^*\right) \Delta A \text{ e } M_y \simeq \sum_{i,j=1}^{n} x_i^* \delta\left(x_i^*, y_j^*\right) \Delta A \,.$$

Logo, definimos M_x e M_y por

$$M_x = \iint_D y\delta(x, y)\, dA \text{ e } M_y = \iint_D x\delta(x, y)\, dA \,.$$

O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ da lâmina D é definido por

$$\overline{x} = \frac{\iint_D x\delta(x, y)\, dA}{M} \text{ e } \overline{y} = \frac{\iint_D y\delta(x, y)\, dA}{M} \,.$$

OBS.: Se $\delta(x,y) = k$, k constante, o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ é dito centroide e temos as seguintes fórmulas

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}\,.$$

3. Momento de Inércia

O momento de inércia de uma lâmina D em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iint_D r^2(x,y)\delta(x,y)\,dxdy$$

onde $r(x,y)$ é a distância de (x,y) ao eixo E.

Assim, os momentos de inércia de D em relação aos eixos x e y, respectivamente, são dados por

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x,y)\,dxdy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2\delta(x,y)\,dxdy\,.$$

O momento de inércia polar em relação à origem é dado por

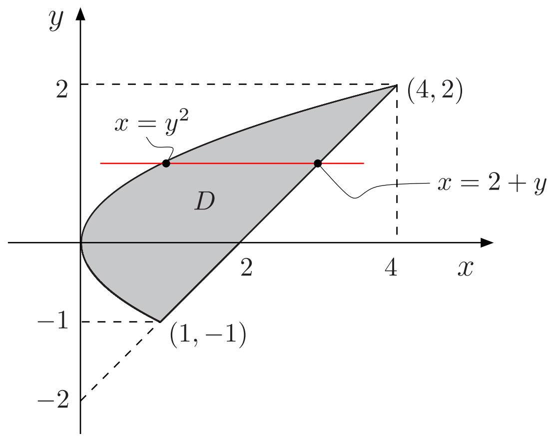
$$I_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\,\delta(x,y)\,dxdy = I_x + I_y\,.$$

Exemplo 1

Determine o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo x, da região D, limitada por $x = y^2$ e $x - y = 2$, sendo $\delta(x,y) = 3$.

Solução:

As curvas se interceptam quando $y^2 - y - 2 = 0$, logo $y = -1$, $y = 2$. Assim, o esboço de D é:



Descrevemos D como tipo II : $D = \{(x,y);\ -1 \leq y \leq 2\,,\ y^2 \leq x \leq 2+y\}$. A massa de D é:

$$\begin{aligned} M = \iint_D \delta(x,y)\,dA = \iint_D 3\,dA = 3\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} dxdy \ &= \ 3\int_{-1}^{2}(2+y-y^2)\,dy \\ &= \ 3\left[2y + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \ 3\left[\left(4+2-\tfrac{8}{3}\right) - \left(-2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)\right] \\ &= \ \tfrac{27}{2}\,. \end{aligned}$$

O centro de massa $(\overline{x},\overline{y})$ é dado por

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\delta\left(x,y\right)\,dA}{M} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\delta\left(x,y\right)\,dA}{M}\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_D x\delta(x,y)\,dA$:

$$\begin{aligned} \iint_D x\delta(x,y)\,dA = 3\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} x\,dxdy = 3\int_{-1}^{2}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{2+y} dy \ &= \ \tfrac{3}{2}\int_{-1}^{2}\left(4+4y+y^2-y^4\right)\,dy \\ &= \ \tfrac{3}{2}\left[4y+2y^2+\tfrac{y^3}{3}-\tfrac{y^5}{5}\right]_{-1}^{2} \\ &= \ \tfrac{3}{2}\left[\left(8+8+\tfrac{8}{3}-\tfrac{32}{5}\right) - \left(-4+2-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right)\right] \\ &= \ \tfrac{3}{2}\times\tfrac{72}{5} = \tfrac{108}{5}\,. \end{aligned}$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_D y\delta(x,y)\,dA$:

$$\iint_D y\delta(x,y)\,dA = 3\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} y\,dxdy = 3\int_{-1}^{2} y\left(2+y-y^2\right)\,dy = 3\int_{-1}^{2}\left(2y+y^2-y^3\right)\,dy$$
$$= 3\left[y^2+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{2}$$
$$= 3\left[\left(4+\frac{8}{3}-4\right)-\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{27}{4}\,.$$

Logo,

$$\overline{x} = \frac{\frac{108}{5}}{\frac{27}{2}} = \frac{8}{5}\ ,\ \overline{y} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{27}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Assim, o centro de massa $(\overline{x},\overline{y})$ está localizado em $\left(\frac{8}{5},\frac{1}{2}\right)$.

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x,y)\,dA = 3\iint_D y^2\,dA = 3\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} y^2\,dxdy = 3\int_{-1}^{2} y^2\left(2+y-y^2\right)\,dy$$
$$= 3\int_{-1}^{2}\left(2y^2+y^3-y^4\right)\,dy$$
$$= 3\left[\frac{2y^3}{3}+\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{2}$$
$$= 3\left[\left(\frac{16}{3}+4-\frac{32}{5}\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]$$
$$= \frac{189}{20}\,.$$

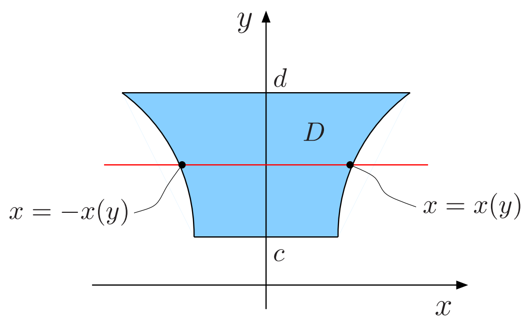
Aula 6 – Simetria em Integral Dupla

Objetivo

- Explorar simetrias em integrais duplas.

Simetria em Integral Dupla

1) Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, simétrica em relação ao eixo y e $f(x,y)$ ímpar na variável x, isto é, $f(-x,y) = -f(x,y)$. Então, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$. Com efeito, como D tem simetria em relação ao eixo y, observamos que D está limitada à direita pela curva $x = x(y)$ e à esquerda pela curva



$x = -x(y)$. Supondo que a projeção de D sobre o eixo y seja o intervalo $[c, d]$, temos o seguinte esboço para D:

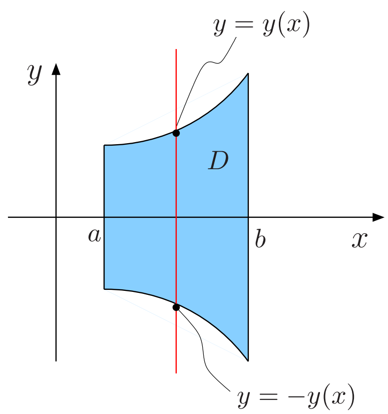
Então,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \underbrace{\left[\int_{-x(y)}^{x(y)} f(x,y)\,dx\right]}_{=\,0\ (*)} dy = \int_c^d 0\,dy = 0\,.$$

$(*)$ Aqui, usamos um fato do Cálculo II:

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0 \ \text{ se } \ g(x) \ \text{ é uma função ímpar}\,.$$

2) Analogamente, se D tem simetria em relação ao eixo x e $f(x,y)$ é ímpar na variável y, então $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$. Veja o esboço para D na figura que se segue.



Exemplo 1

Calcule

$$I = \iint_D \left(xy^6 + (x^4 + y^4)\,\mathrm{sen}\,y + 1\right)\,dxdy\,,$$

onde D é o disco $x^2 + y^2 \le a^2, (a > 0)$.

Solução:

Por propriedade da integral dupla, temos que

$$I = \underbrace{\iint\limits_D xy^6\,dxdy}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_D (x^4+y^4)\,\mathrm{sen}\,y\,dxdy}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_D dxdy}_{I_3}\,.$$

- Como $f(x,y) = xy^6$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y, então $I_1 = 0$.
- Como $g(x,y) = (x^4+y^4)\,\mathrm{sen}\,y$ é ímpar na variável y e D tem simetria em relação ao eixo x, então $I_2 = 0$.
- Como $\displaystyle\iint\limits_D dxdy = A(D)$, então $I_3 = \pi a^2$. Logo,

$$I = 0 + 0 + \pi a^2 = \pi a^2\,.$$

RECOMENDAÇÃO

Nas integrais duplas, busque as simetrias e as funções ímpares. Não calcule cegamente!!!

OBS.:

1. Se a densidade $\delta(x,y)$ é uma função par na variável x (isto é, $\delta(-x,y) = \delta(x,y)$), então $x\delta(x,y)$ é ímpar na variável x. Se D tem simetria em relação ao eixo y, então $\displaystyle\iint\limits_D x\delta(x,y)\,dxdy = 0$ e, portanto, $\overline{x} = 0$.

   Analogamente, se $\delta(x,y)$ é uma função par na variável y e se D tem simetria em relação ao eixo x, então $\overline{y} = 0$.

2. Se D é uma lâmina homogênea e tem simetria em relação ao eixo y, então $\overline{x} = 0$.

   Analogamente, se D é homogênea e tem simetria em relação ao eixo x, então $\overline{y} = 0$.

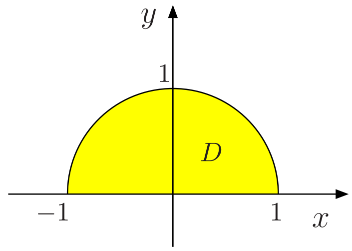
Exemplo 2

Uma lâmina delgada D ocupa a região $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, de modo que a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto à origem. Determine

a) a massa M de D;
b) o centro de massa.

Solução:

O esboço de D é:



Como a distância de (x, y) à origem é $\sqrt{x^2+y^2}$ então a densidade é dada por

$$\delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

onde k é uma constante.

a) Como $M = \iint\limits_D \delta(x,y)\,dxdy$, então $M = k\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\;dxdy$. Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\,\text{sen}\,\theta \\ dxdy = & rdrd\theta \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{cases}.$$

Além disso, $D_{r\theta}$ é dado por:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}.$$

Então,

$$M = k\iint\limits_{D_{r\theta}} r\cdot r\,drd\theta = k\iint\limits_{D_{r\theta}} r^2\,drd\theta = k\int_0^1 r^2\int_0^\pi d\theta dr = k\pi\int_0^1 r^2\,dr = \frac{k\pi}{3}\ \textit{u.m.}$$

b) Como $\delta(x,y)$ é uma função par e D tem simetria em relação ao eixo y, então $\overline{x} = 0$. Sabemos que

$$\overline{y} = \frac{\iint\limits_D y\delta(x,y)\,dxdy}{M},$$

onde

$$
\begin{aligned}
\iint_D y\delta(x,y)\,dxdy &= k\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\
&= k\iint_{D_{r\theta}} r\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot r\cdot r\,drd\theta \\
&= k\iint_{D_{r\theta}} r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\,drd\theta \\
&= k\int_0^1 r^3\int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta dr \\
&= k\big[-\cos\theta\big]_0^\pi\int_0^1 r^3\,dr \\
&= 2k\big[\tfrac{r^4}{4}\big]_0^1 \\
&= \tfrac{k}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\overline{y} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}\,.$$

Portanto, o centro de massa está localizado em $\left(0, \frac{3}{2\pi}\right)$.

Exercício 1: Calcule a massa total M, o centro da massa $(\overline{x}, \overline{y})$ de uma lâmina triangular, com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$ se a função densidade é $\delta(x,y) = 1+3x+y$.

Exercício 2: A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância do centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Exercício 3: Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 do disco homogêneo D, com densidade $\delta(x,y) = \delta$, centro na origem e raio a.

Exercício 4: Uma lâmina delgada tem a forma da região D, que é interior à circunferência $(x-2)^2+y^2 = 4$ e exterior à circunferência $x^2+y^2 = 4$. Calcule a massa da lâmina se a densidade é dada por $\delta(x,y,z) = (x^2+y^2)^{-1/2}$.

Exercício 5: Uma placa fina está limitada pela circunferência $x^2+y^2 = a^2$ e tem densidade $\delta(x,y) = = \dfrac{a^2}{a^2+x^2+y^2}$. Mostre que o seu momento de inércia polar é dado por $I_0 = Ma^2\left(\dfrac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)$, onde M é a sua massa.

Exercício 6: Uma lâmina tem a forma semicircular $x^2+y^2 \leq a^2$, com $y \geq 0$. A densidade é diretamente proporcional à distância do eixo x. Ache o momento de inércia em relação ao eixo x.

Exercício 7: Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles, com lados iguais de comprimento a. Ache a massa, se a densidade em um ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa.