Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 6

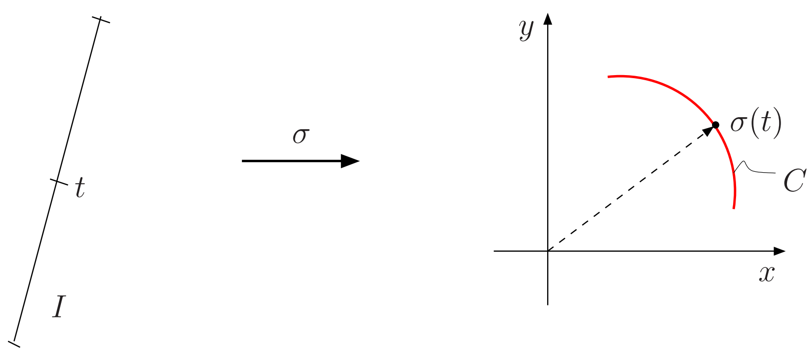
Aula 11 – Curvas Parametrizadas

Objetivo

- Parametrizar curvas planas e espaciais.

Parametrização de curvas

Parametrizar uma curva $C \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2$ ou $3)$ consiste em apresentar uma função vetorial $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2$ ou $3)$, onde I é um intervalo e $\sigma(I) = C$.



Exemplo 1

Sendo $A, B \in \mathbb{R}^n$ $(n = 2$ ou $3)$, parametrize o segmento de reta C de extremidade inicial A e final B.

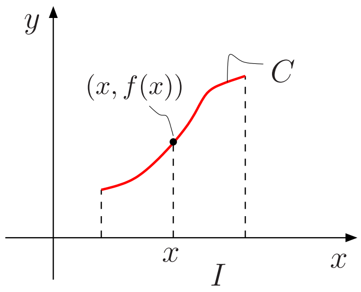
Solução:

Se $P \in C$, então $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{AB}$, $0 \leq t \leq 1$ ou $P - 0 = B - 0 + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$ ou $P = B + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$. Logo, uma parametrização do segmento C é dada por

$$\sigma(t) = B + t(B - A)\,, \; 0 \leq t \leq 1\,.$$

Exemplo 2

Seja $C \subset$ plano xy, o gráfico de uma função $y = f(x)\,,\ x \in I$.

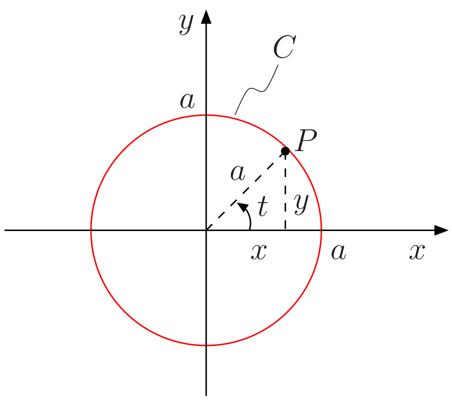


Então, uma parametrização de C é dada por

$$\sigma(t) = (t, f(t))\ , t \in I\,.$$

Exemplo 3

Seja C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2\,,\ a > 0$; $P = (x, y) \in C$ e t o ângulo em radianos entre o eixo positivo x e a semirreta OP.



Observe que quando t aumenta de 0 a 2π, o ponto $P = (x, y) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t)$ se move, uma vez sobre C no sentido anti-horário a partir do ponto $(a, 0)$. Logo, uma parametrização de C é

$$\sigma_1(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t)\ , 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Observe que $\sigma_2(t) = (a\,\mathrm{sen}\,t,\ a\cos t)\ , 0 \le t \le 2\pi$ é também uma parametrização de C, pois $x^2 + y^2 = a^2$. Neste caso, quando t aumenta de 0 a 2π, o ponto P se move uma vez ao longo de C no sentido horário, a partir do ponto $(0, a)$.

Observe que $\sigma_3(t) = (a\cos(2\pi - t),\ a\,\mathrm{sen}(2\pi - t)) = (a\cos t,\ -a\,\mathrm{sen}\,t)\ , 0 \le t \le 2\pi$ é outra parametrização de C, e P se move ao longo de C no sentido horário a partir do ponto $(a, 0)$.

Exemplo 4

Seja a circunferência $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, de centro (x_0, y_0) e raio a. Efetuando uma mudança de variáveis $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$, temos

$$u^2 + v^2 = a^2$$

que é uma circunferência no plano uv, de centro $(0, 0)$ e raio a. Logo,

$$\begin{cases} u = a\cos t \\ v = a \operatorname{sen} t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Substituindo acima, temos

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + a \operatorname{sen} t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por

$$\sigma(t) = (x_0 + a\cos t,\ y_0 + a \operatorname{sen} t)\ , 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Exemplo 5

Seja uma elipse $C : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Fazendo $u = \frac{x-x_0}{a}$ e $v = \frac{y-y_0}{b}$, mostramos que

$$\sigma(t) = (x_0 + a\cos t,\ y_0 + b \operatorname{sen} t)\ , 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma parametrização de C.

Exemplo 6

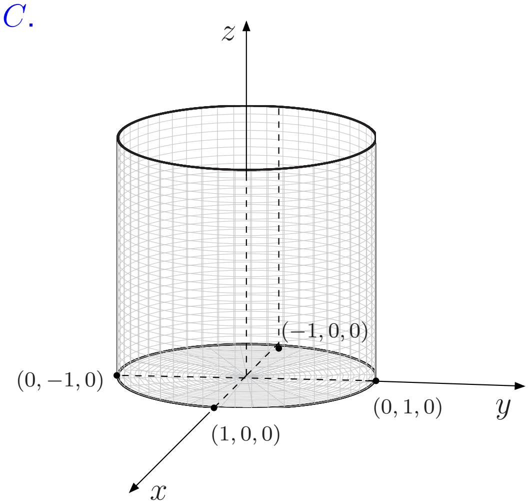
Seja C uma curva do espaço dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 2$.

a) Esboce C.

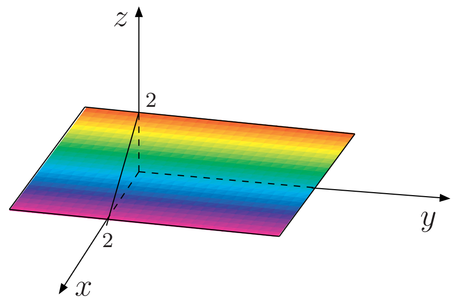
b) Apresente uma parametrização diferenciável para C.

Solução:

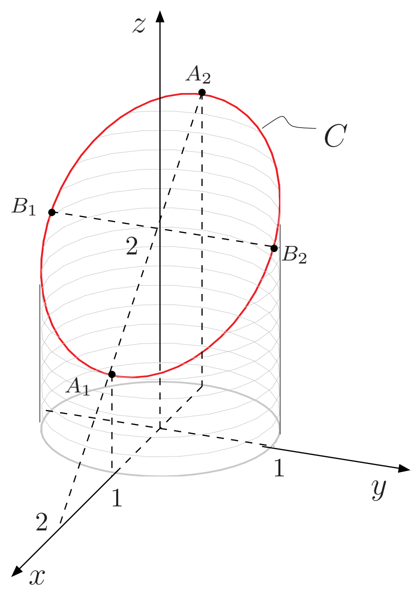
a) Inicialmente, façamos o esboço do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Desenhemos, no plano xy, a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Pelos pontos $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ tracemos paralelas ao eixo z.



Para esboçar o plano $x+z=2$, traçamos a reta $x+z=2$ no plano xz. Observe que a equação do plano não contém a variável y. Por isso, por pontos da reta traçamos paralelas ao eixo y.



Agora, juntemos as duas figuras, procurando destacar alguns pontos de interseção. A reta $x+z=2$ intercepta o cilindro nos pontos A_1 e A_2. Por outro lado, a reta do plano, paralela ao eixo y, passando por $(0,0,2)$, intercepta o cilindro nos pontos B_1 e B_2. A curva C passa por A_1, B_1, A_2 e B_2.



b) Seja $(x,y,z)\in C$. Logo, x e y satisfazem $x^2+y^2=1$. Assim, $x=\cos t\,,\ y=\operatorname{sen} t\,,\ 0\leq t\leq 2\pi$. Como $z=2-x$, então $z=2-\cos t$. Logo,

$$\sigma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,2-\cos t)\ ,\ 0\leq t\leq 2\pi$$

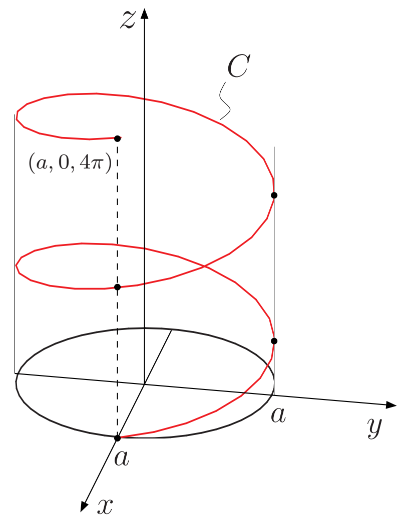
é uma parametrização de C.

Exemplo 7

Seja C a curva no espaço representada pela função vetorial $\sigma(t)=(a\cos t,a\operatorname{sen} t,bt)\,,\,0\leq t\leq 4\pi\,,$ $a>0$, $b>0$. Esboce C, dita hélice circular.

Solução:

De $x = a\cos t\,,\ y = a\,\text{sen}\,t$, temos $x^2 + y^2 = a^2$. Isso significa que C está contida no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Como $z = bt$, quando t vai de 0 a 4π, o ponto (x, y, z) percorre a hélice contida no cilindro.

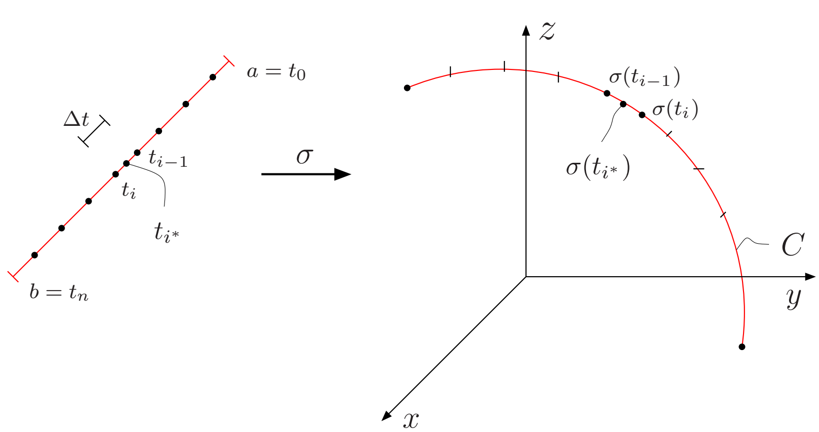


Aula 12 – Integral de Linha de Campo Escalar

Objetivo

- Compreender e noção de integral de linha de campo escalar;
- Estudar algumas propriedades.

Nesta aula definiremos uma integral similar a uma integral definida. Sejam dados um campo escalar em $\mathbb{R}^3$ ou uma função real de três variáveis $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e uma curva C em $\mathbb{R}^3$, dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))\ ,\ t \in [a, b]$, com σ de classe C^1.



Dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos I_i , $i = 1, \cdots, n$, de mesmo comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Logo, a curva C fica dividida em n subarcos de comprimento Δs_1, $\Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$, onde $\Delta s_i \simeq \|\sigma'(t_i^*)\| \, \Delta t$ para algum $t_i^* \in I_i$. Formemos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\sigma(t_i^{**})\right) \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\sigma(t_i^{**})\right) \|\sigma'(t_i^*)\| \, \Delta t \, ,$$

Definimos a integral de linha de f sobre C por

$$\int_C f \, ds = \int_C f(x,y,z) \, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\sigma(t_i^{**})\right) \|\sigma'(t_i^*)\| \, \Delta t$$

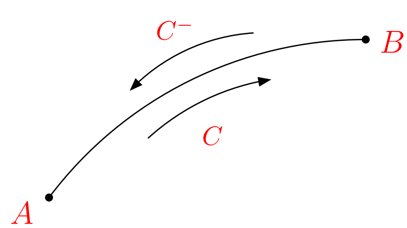
se o limite existir.

OBS.:

1) Se f é uma função contínua, então o limite existe e portanto
$$\int_C f(x,y,z) \, ds = \int_a^b f\left(\sigma(t)\right) \underbrace{\|\sigma'(t)\| \, dt}_{ds} = = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2} \; dt \, .$$

2) Se $f(x,y)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ e C uma curva em $\mathbb{R}^2$, dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, com σ de classe C^1, então definimos
$$\int_C f \quad ds = \int_C f(x,y) \quad ds = \int_a^b f\left(\sigma(t)\right) \underbrace{\|\sigma'(t)\| \, dt}_{ds} = \\ = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} \, dt \, .$$

3) Se $f(x,y) = 1$ (ou $f(x,y,z) = 1$), então
$$\int_C f \, ds = \text{ comprimento de C} \, .$$



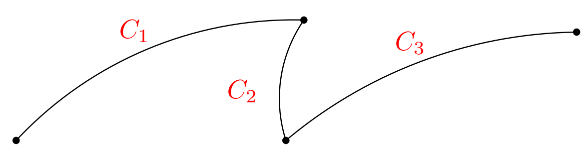
4) A integral de linha de um campo escalar f não depende da parametrização de C e nem de sua orientação, isto é, denotando por C^- a curva C percorrida em outro sentido, então

$$\int_{C^-} f\,ds = \int_C f\,ds\,.$$

5) Se C é uma curva dada por uma parametrização $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), C^1 por partes, isto é, σ é contínua e existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a,b]$ de modo que $\sigma_i = \sigma\big|_{[t_{i-1},\ t_i]}$ é de classe C^1, $i = 1, \cdots, n$, então

$$\int_C f\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f\,ds$$

onde $C_i = \sigma_i\left([t_{i-1},\ t_i]\right)$.



Exemplo 1

Seja C a interseção do cilindro parabólico $x = y^2$ com a parte do plano $z = y$, tal que $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\int_C y\,ds$.

Solução:

Façamos $y = t$. Logo, $x = t^2$ e $z = t$. Como $0 \leq y \leq 1$, então $0 \leq t \leq 1$. Assim, uma parametrização de C é dada por $\sigma(t) = (t^2, t, t)\,, 0 \leq t \leq 1$, logo $\sigma'(t) = (2t, 1, 1)$. Como, $ds = \|\sigma'(t)\|\,dt$, então $ds = \sqrt{4t^2 + 1 + 1}\,dt = \sqrt{2 + 4t^2}\,dt$. Logo,

$$\int_C y\,ds = \int_0^1 t\sqrt{2 + 4t^2}\,dt = \int_0^1 \left(2 + 4t^2\right)^{1/2} t\,dt\,.$$

Observe que $d(2 + 4t^2) = 8t\,dt$, portanto $t\,dt = \frac{d(2+4t^2)}{8}$. Logo,

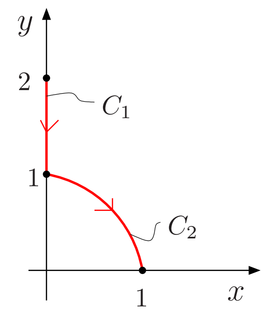
$$\int_C y\,ds = \frac{1}{8}\int_0^1 (2 + 4t^2)^{1/2}\ d(2 + 4t^2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\,(2 + 4t^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(6^{3/2} - 2^{3/2}\right) = \frac{1}{6}\left(3\sqrt{6} - \sqrt{2}\right).$$

Exemplo 2

Calcule $\int_C x\,ds$, onde C é formado pelo segmento de reta C_1 de $(0,2)$ a $(0,1)$, seguido do arco C_2 da parábola $y = 1 - x^2$ de $(0,1)$ a $(1,0)$.

Solução:

O esboço de C está representado na figura que se segue.



Como $C = C_1 \cup C_2$, temos:

$$\int_C x\,ds = \int_{C_1} x\,ds + \int_{C_2} x\,ds = \int_{C_1^-} x\,ds + \int_{C_2} x\,ds\,.$$

Cálculo de $\int_{C_1^-} x\ ds$

Uma parametrização de C_1^- é dada por $\sigma(t) = (0,t)\,, 1 \leq t \leq 2$. Logo, $\sigma'(t) = (0,1)$, logo $\|\sigma'(t)\| = 1$ e, portanto, $ds = \|\sigma'(t)\|\ dt = dt$.

Assim,

$$\int_{C_1^-} x\,ds = \int_1^2 0\,dt = 0\,.$$

Cálculo de $\int_{C_2} x\,ds$

Uma parametrização de C_2 é dada por $\sigma(t) = (t, 1-t^2)\,, 0 \leq t \leq 1$, portanto $\sigma'(t) = (1,-2t)$. Logo $ds = \|\sigma'(t)\|\ dt = \sqrt{1+4t^2}\,dt$. Então,

$$\int_{C_2} x\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_0^1 \left(1+4t^2\right)^{1/2} dt\,.$$

Observe que $t\,dt = \frac{d(1+4t^2)}{8}$. Logo,

$$\int_{C_2} x\ ds = \tfrac{1}{8}\int_0^1 (1+4t^2)^{1/2}\ d(1+4t^2) = \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{2}{3}\,(1+4t^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Portanto,

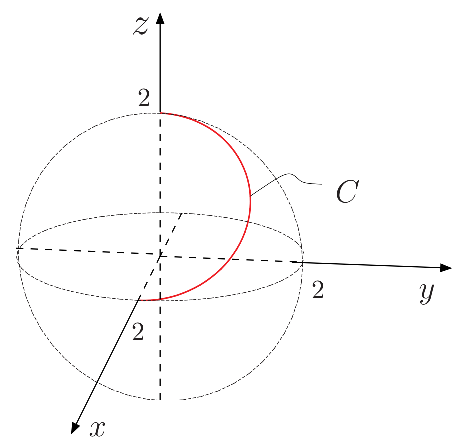
$$\int_C x\,ds = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Exemplo 3

Seja a curva C obtida como interseção da semiesfera $x^2+y^2+z^2=4\,,y\geq 0$ com o plano $x+z=2$. Calcule $\int_C f(x,y,z)\,ds$, onde $f(x,y,z)$ é dada por $f(x,y,z)=xy$.

Solução:

O esboço de C é:



Seja $(x,y,z)\in C$. Então $x^2+y^2+z^2=4\,,y\geq 0$ e $x+z=2$. Logo, $x^2+y^2+(2-x)^2=4\,,y\geq 0$ ou $2x^2-4x+y^2=0\,,y\geq 0$ ou $2(x-1)^2+y^2=2\,,y\geq 0$ ou $(x-1)^2+\frac{y^2}{2}=1\,,y\geq 0$. Logo, a projeção de C sobre o plano xy é a semi-elipse de centro $(1,0)$ e semi-eixos 1 e $\sqrt{2}$. Então,

$$\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t \\ z = 2-(1+\cos t) = 1-\cos t \end{cases}.$$

Como $y\geq 0$, $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\geq 0$, portanto $0\leq t\leq\pi$. Logo, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t)=\left(1+\cos t,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t,1-\cos t\right),0\leq t\leq\pi.$$

Temos

$$\sigma'(t)=\left(-\,\mathrm{sen}\,t,\sqrt{2}\cos t,\mathrm{sen}\,t\right)$$

portanto

$$ds=\|\sigma'(t)\|\;dt=\sqrt{\mathrm{sen}^2\,t+2\cos^2 t+\mathrm{sen}^2\,t}\,dt=\sqrt{2}\,dt\,.$$

Então,

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_C xy\,ds = \int_0^\pi (1+\cos t)\left(\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)\sqrt{2}\,dt \;=\; 2\int_0^\pi (\mathrm{sen}\,t + \mathrm{sen}\,t\cos t)\,dt$$

$$= 2\left[-\cos t + \tfrac{\mathrm{sen}^2 t}{2}\right]_0^\pi$$

$$= 4\,.$$

Exercício 1: Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

a) C é o segmento de $(1,2)$ a $(-2,8)$.

b) C é a parte da parábola $y = 3x^2$ de $(-1,3)$ a $(2,12)$.

c) C é o gráfico de $y^3 = x$ de $(0,0)$ a $(1,1)$.

d) C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.

e) C é o gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

f) C é o arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$, com $x \geq 0$.

g) C é a curva $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$.

h) C é a curva $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$.

Exercício 2: Apresente uma parametrização diferenciável para a curva C em $\mathbb{R}^3$, interseção das superfícies dadas por

a) $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$.

b) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante.

c) $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $x + z = 1$.

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y = 1$.

e) $x^2 + y^2 = z^2\,,\, z \geq 0$ e $x = y^2$ do ponto $(0,0,0)$ a $\left(1,1,\sqrt{2}\right)$.

f) $z = 1 - y^2\,,\, z \geq 0$ e $2x + 3z = 6$ de $(3,1,0)$ a $(3,-1,0)$.

g) $z = 3x^2 + y^2$ e $z + 6x = 9$.

h) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$.

Exercício 3: Calcule $\int_C (xy + y + z)\ ds$ ao longo da curva $\overrightarrow{r}(t) = 2t\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + t\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (2-2t)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, com $0 \leq t \leq 1$.

Exercício 4: Calcule $\int_C (x + \sqrt{4}y)\ ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Exercício 5: Calcule a integral $\int_C \left(x^2 + y^2\right) ds$, onde C é a quarta parte da circunferência $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, situada no primeiro octante.

Exercício 6: Calcule a integral $\int_C \sqrt{3}xyz\ ds$, onde C é a curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$, situada no primeiro octante.