Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 7

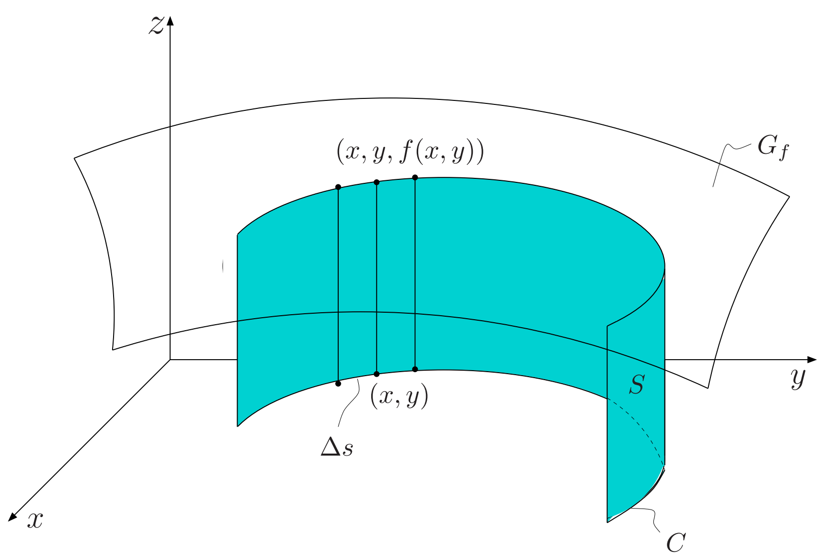
Aula 13 – Aplicações da Integral de Linha de Campo Escalar

Objetivo

- Apresentar uma interpretação geométrica.
- Apresentar algumas aplicações à Física.

Interpretação geométrica no plano

Seja $f(x,y) \geq 0$ e contínua. Então o gráfico de f, G_f, está acima do plano xy.



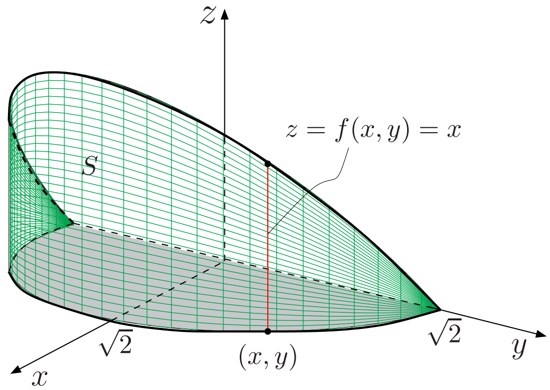
A partir da curva $C \subset$ plano xy, construa a superfície S de base C e "altura" $f(x,y)$ em $(x,y) \in C$. A integral $\displaystyle\int_C f(x,y)\, ds$ representa a área de um lado da superfície S.

Exemplo 1

A base de uma superfície é dada por $x^2 + y^2 = 2\,,\; x \geq 0$. Se a altura da superfície em (x,y) é $f(x,y) = x$, $x \geq 0$, obter a área de um lado da superfície.

Solução:

O esboço de S é:



A área de um lado de S é dada por $\int_C f(x,y)\ ds = \int_C x\ ds$, onde C é parametrizado por $\sigma(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\right)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ (pois $x \geq 0$).

Se $\sigma'(t) = \left(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{2}\cos t\right)$, então $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\, t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2}$ portanto,

$$ds = \|\sigma'(t)\|\ dt = \sqrt{2}\, dt\,.$$

Então

$$\int_C x\ ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{2}\cos t\right)\sqrt{2}\ dt = 2\,\mathrm{sen}\, t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\ u.a.$$

Interpretação Física

Se $\delta(x,y)$ representa a densidade (massa por unidade de comprimento) de um arame $C \subset \mathbb{R}^2$, então $\int_C \delta(x,y)\ ds$ representa a massa total do arame:

$$M = \int_C \delta(x,y)\, ds\,.$$

OBS.:

1. O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ do arame é dado por

$$M\overline{x} = \int_C x\delta(x,y)\,ds$$

$$M\overline{y} = \int_C y\delta(x,y)\,ds$$

2. O momento de inércia de $C \subset \mathbb{R}^2$ em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \int_C r^2(x,y)\delta(x,y)\,ds$$

onde $r(x,y) =$ distância de (x,y) ao eixo E.

3. Seja uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$, representando um arame de densidade $\delta = \delta(x,y,z)$ em $(x,y,z) \in C$. Então, observe as seguintes fórmulas:

(i) Comprimento do arame: $L = \int_C ds$

(ii) Massa do arame: $M = \int_C \delta(x,y,z)\,ds$

(iii) Centro de massa do arame $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, onde

$$M\overline{x} = \int_C x\delta(x,y,z)\,ds$$

$$M\overline{y} = \int_C y\delta(x,y,z)\,ds$$

$$M\overline{z} = \int_C z\delta(x,y,z)\,ds$$

(iv) Momento de inércia do arame em relação a um eixo E:

$$I_E = \int_C r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)\,ds$$

onde $r(x,y,z) =$ distância de (x,y,z) ao eixo E.

Exemplo 2

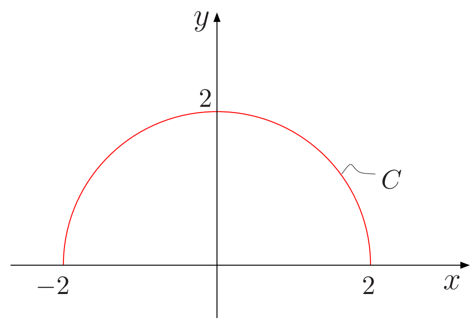
Um arame fino tem a forma de uma semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$. Se a densidade linear é uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.

Solução:

O esboço de C está representado ao lado. Temos

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_C xk\ ds}{\displaystyle\int_C k\ ds} = \frac{\displaystyle\int_C x\ ds}{\displaystyle\int_C ds}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_C y\ ds}{\displaystyle\int_C ds}$$



onde $\displaystyle\int_C ds = L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 2\pi$, pois $r = 2$. Como $M = \displaystyle\int_C kds$ então $M = k\displaystyle\int_C ds = 2k\pi$. Uma parametrização de C é dada por

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t)\ ,\ 0 \leq t \leq \pi\,.$$

Se $\sigma'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t,)$, então $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\,t + 4\cos^2 t} = 2$. Como $ds = \|\sigma'(t)\|\ dt$, então $ds = 2\,dt$. Temos

$$\int_C x\,ds = \int_0^\pi (2\cos t)2\,dt = 4\big[\mathrm{sen}\,t\big]_0^\pi = 0$$

$$\int_C y\,ds = \int_0^\pi (2\,\mathrm{sen}\,t)2\,dt = 4\big[-\cos t\big]_0^\pi = 8$$

Logo,

$$\overline{x} = 0 \text{ e } \overline{y} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}\,.$$

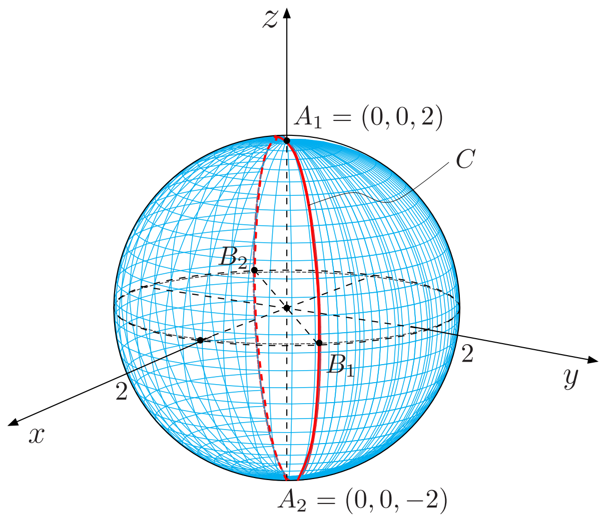
Portanto, $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 4/\pi)$.

Exemplo 3

Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z de um arame C cuja forma é a interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y = x$, sabendo que sua densidade é uma constante.

Solução:

Como a interseção de uma esfera com um plano é uma circunferência, segue que C é uma circunferência contida no plano $y = x$. Para esboçá-la procuremos encontrar pontos de interseção das suas superfícies. Observe que o plano $x = y$ contém o eixo z. Logo, os pontos $A_1 = (0, 0, 2)$ e



$A_2 = (0,0,-2)$ estão em C. Por outro lado, a reta $y = x$ do plano xy intercepta a esfera em dois pontos: B_1 e B_2. Ligando os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2, encontramos a curva C.

Para parametrizar C, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = & 4 \\ y = & x \end{cases}.$$

Temos $2x^2 + z^2 = 4$ ou $x^2/2 + z^2/4 = 1$, que representa a projeção de C no plano xz. Portanto, se $(x, y, z) \in C$, então x e z satisfazem a elipse $x^2/2 + z^2/4$. Logo, $x = \sqrt{2}\cos t$ e $z = 2\,\mathrm{sen}\, t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $y = x$, então $y = \sqrt{2}\cos t$. Portanto,

$$\sigma(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t\right),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

é uma parametrização de C.

Se $\sigma'(t) = \left(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t\right)$, então $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2\,\mathrm{sen}^2 t + 2\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t} = 2$. Assim, $ds = \|\sigma'(t)\|\, dt = 2\, dt$. O momento de inércia em relação ao eixo z é dado por

$$\begin{aligned} I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right)\delta(x, y)\, ds = k\int_C \left(x^2 + y^2\right)\, ds &= k\int_0^{2\pi} \left(2\cos^2 t + 2\cos^2 t\right) 2\, dt \\ &= 8k\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt \\ &= 8k \cdot \tfrac{1}{2}\left[t + \tfrac{\mathrm{sen}\, 2t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 8k\pi\,. \end{aligned}$$

Aula 14 – Campos Vetoriais

Objetivo

- Apresentar os campos vetoriais.
- Estudar alguns operadores diferenciais.

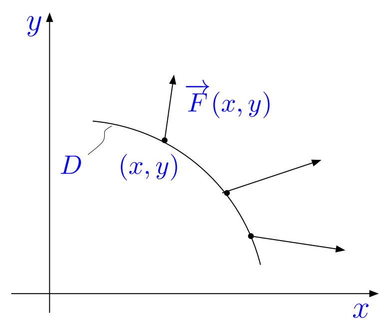
Definição de um campo vetorial:

Definição:

Sejam P e Q funções reais de x e y, definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$. A função vetorial $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = P(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^2$.



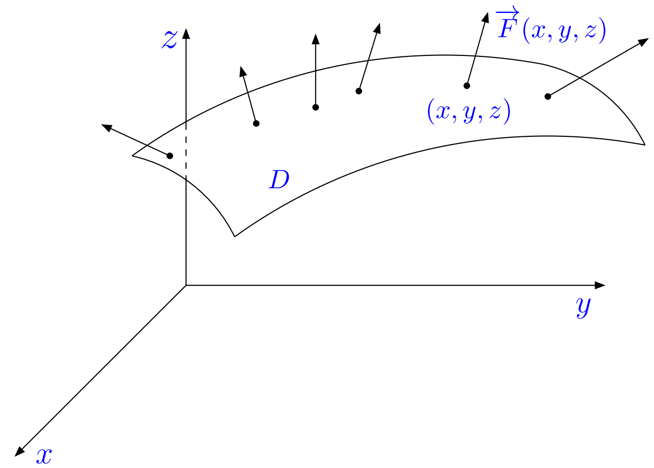
Outra notação: $\overrightarrow{F}(x,y) = (P,Q)$.

Definição:

Sejam P, Q e R funções reais de x, y e z, definidas em $D \subset \mathbb{R}^3$. Temos que a função vetorial $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = P(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^3$.

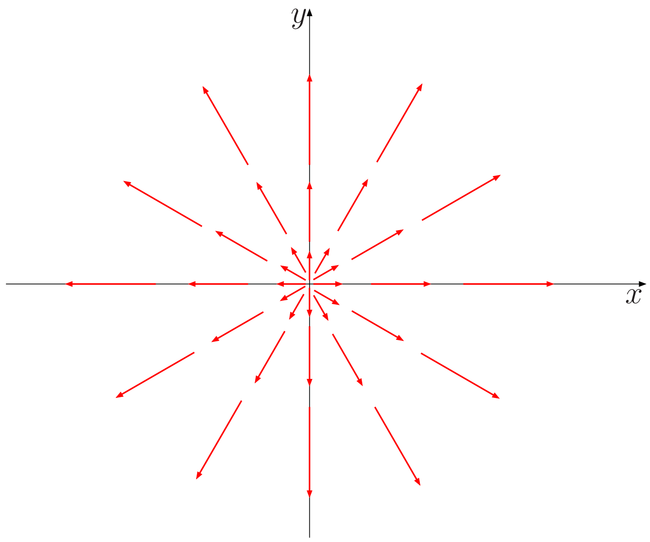


Os campos vetoriais são úteis para representar os campos de forças, campos de velocidades e campos elétricos.

Geometricamente, visualizamos um campo vetorial $\overrightarrow{F}$ no plano esboçando vetores $\overrightarrow{F}(x,y)$ com origem em (x,y).

Exemplo 1

O campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y) = (x,y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está representado por:

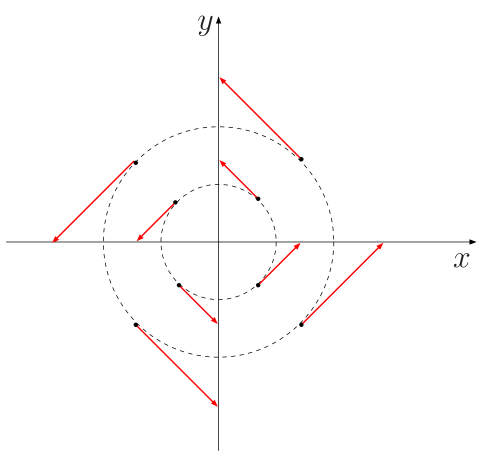


Exemplo 2

Faça a representação geométrica do campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y) = (-y,x) = -y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução:

Observemos que $\|\overrightarrow{F}(x,y)\| = \sqrt{y^2+x^2} = \|(x,y)\|$, isto é, os vetores $\overrightarrow{F}(x,y)$ e (x,y) têm mesmo comprimento. Além disso, $\overrightarrow{F}(x,y)\cdot(x,y) = (-y,x)\cdot(x,y) = -yx+xy = 0$, portanto $\overrightarrow{F}(x,y) \perp (x,y)$. Então o esboço do campo é:



Definição:

Dizemos que o campo vetorial $\overrightarrow{F}$ é contínuo, de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$ ou C^∞ se as funções componentes P e Q (ou P, Q, R) são contínuas, de classe C^k ou C^∞, respectivamente.

Operadores diferenciais

Se $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ é campo vetorial diferenciável em um conjunto aberto D do $\mathbb{R}^3$, então o divergente de $\overrightarrow{F}$ é um *campo escalar* definido por

$$\text{div}\,\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{1}$$

Se $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ é de classe C^1 em um aberto D do $\mathbb{R}^2$, então div $\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

O rotacional de $\overrightarrow{F}$ é um campo vetorial definido por

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}} \tag{2}$$

Vamos expressar (1) e (2) usando a notação de operador. Então, consideremos o operador diferencial vetorial ∇ ("del") dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

O operador ∇ sobre uma função escalar f (ou um campo escalar) produz o gradiente de f:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Consideremos o "produto vetorial" de ∇ pelo campo vetorial $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \overrightarrow{F} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ Q & R \end{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ P & R \end{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ P & Q \end{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{k}} \\
&= \left(\tfrac{\partial R}{\partial y} - \tfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} - \left(\tfrac{\partial R}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial z}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}} \\
&= \left(\tfrac{\partial R}{\partial y} - \tfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\tfrac{\partial P}{\partial z} - \tfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}} \\
&= \text{rot}\,\overrightarrow{F}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F}.$$

Consideremos o "produto interno" de ∇ pelo campo $\overrightarrow{F}$:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div}\,\overrightarrow{F}.$$

Assim,

$$\text{div}\,\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}\,.$$

Exemplo 1

Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + yz\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + zx\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Solução:

Temos

$$\text{div}\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(zx) = y + z + x\,.$$

e

$$\text{rot}\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = (0-y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (0-z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (0-x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = -y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - z\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - x\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\,.$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades para o rotacional e o divergente.

Se f e $\overrightarrow{F}$ são de classe C^2, então

(i) $\text{rot}(\text{grad} f) = \overrightarrow{0}$ ou $\nabla \times (\nabla f) = \overrightarrow{0}$

(ii) $\text{div}\big(\text{rot}\overrightarrow{F}\big) = 0$ ou $\nabla \cdot \big(\nabla \times \overrightarrow{F}\big) = 0$

(iii) $\text{div}\,(\text{grad} f) = \text{lap}\, f$ ou $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$ ou $\triangle f$ onde $\text{lap}\, f = \nabla^2 f = \triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ é dito *laplaciano de* f.

(iv) $\nabla \cdot \left(f\overrightarrow{F}\right) = f\nabla \cdot \overrightarrow{F} + \nabla f \cdot \overrightarrow{F}$.

As demonstrações de (i) e (ii) seguem das definições e do Teorema de Schwartz. A demonstração de (iii) segue das definições. Demonstraremos a propriedade (iv). Escrevendo $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$, temos $f\overrightarrow{F} = (fP, fQ, fR)$. Então,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(f\overrightarrow{F}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) &= f\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot P + f\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot Q + f\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot R \\ &= f\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R) \\ &= f\nabla \cdot \overrightarrow{F} + \nabla f \cdot \overrightarrow{F} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

OBS.: Se $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(x,y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, então:

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}\,.$$

Exercício 1: Use a integral de linha para encontrar a área da superfície lateral sobre a curva C e abaixo da superfície $z = f(x,y)$, onde

a) $C : x^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$ de $(1,0)$ a $(0,1)$ e $f(x,y) = xy$

b) $C : y = 1 - x^2$ de $(1,0)$ a $(0,1)$ e $f(x,y) = x$

Exercício 2: Determine a massa de um fio com a forma da curva $y = \ln x$, com $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$, se a densidade em cada ponto é igual ao quadrado da abscissa do ponto.

Exercício 3: Determine a massa de uma quarta parte da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, situada no primeiro quadrante se a densidade em cada ponto é igual a ordenada desse ponto.

Exercício 4: Calcule o centro de massa do fio C parametrizado por $\overrightarrow{r}(t) = (t,t,t)$, com $0 \leq t \leq 1$, com densidade linear $\delta(x,y,z) = xyz$.

Exercício 5: Seja C um fio delgado com a forma da interseção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, com $z \geq 0$ com o plano $x + y = 1$. Calcule o momento de inércia de C em relação ao eixo z, se a densidade em cada ponto é proporcional à sua distância ao plano xy.

Exercício 6: Calcule a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$ e $z = 4t$, com $0 \leq t \leq \pi/2$, se a densidade for $\delta(x,y,z) = \dfrac{kx}{1+y^2}$, com $k > 0$.

Exercício 7: Calcule $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$ e $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ sendo:

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2z - 3y\,, 3x - z\,, y - 2x)$

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (z + \operatorname{sen} y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (z - x\cos y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$

Exercício 8: Se $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ e $\overrightarrow{a}$ é um vetor constante, demonstre que $\operatorname{rot}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 2\overrightarrow{a}$ e $\operatorname{div}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 0$.