Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 11

Aula 21 – Integral de Superfície de um Campo Escalar

Objetivo

- Estudar as integrais de superfície de um campo escalar.

Integral de superfície de um campo escalar

Definimos a integral de superfície de um campo escalar contínuo $f(x, y, z)$ sobre uma superfície S, parametrizada por $\varphi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, da seguinte maneira:

$$\iint_S f\, dS = \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f\big(\varphi(u, v)\big) \underbrace{\left\| \tfrac{\partial \varphi}{\partial u} \times \tfrac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv}_{dS}$$

onde $dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv$ é o elemento de área.

OBS.:

a) Temos que, se S é o gráfico da função $z = z(x, y)$, com $(x, y) \in D$, então,

$$\begin{aligned}\iint_S f\ dS &= \iint_S f(x, y, z)\, dS \\ &= \iint_D f\,(x, y, z(x, y)) \underbrace{\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy}_{dS}\end{aligned}$$

onde $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy$ é o elemento de área.

b) Se $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, então $\displaystyle\iint_S f\ dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f\ dS$.

c) Se $f(x,y,z) = 1$ em S, então $\iint\limits_S 1\,dS = \iint\limits_S dS = A(S)$.

Exemplo 1

Calcule $\iint\limits_S xy\ dS$, onde S é parametrizada por $\varphi(u,v) = (u-v, u+v, 2u+v+1)$ com $(u,v) \in D : 0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le u$.

Solução:

Temos $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = (1,1,2)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = (-1,1,1)$, portanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-3,2) \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}\,.$$

Logo, $dS = \sqrt{14}\,dudv$.

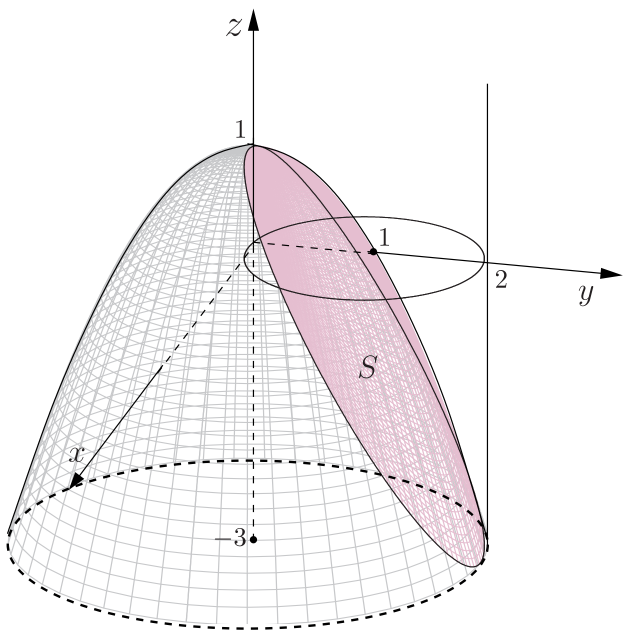
$$\begin{aligned} \iint\limits_S xy\,dS = \iint\limits_D (u-v)(u+v)\sqrt{14}\ dudv &= \sqrt{14} \iint\limits_D \left(u^2 - v^2\right)\ dudv \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \int_0^u \left(u^2 - v^2\right)\ dvdu \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \left[u^2 v - \tfrac{v^3}{3}\right]_0^u du \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 \left[u^3 - \tfrac{u^3}{3}\right] du \\ &= \tfrac{2\sqrt{14}}{3} \int_0^1 u^3\,du \\ &= \tfrac{\sqrt{14}}{6} \left[u^4\right]_0^1 \\ &= \tfrac{\sqrt{14}}{6}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule $\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS$, onde S é a parte da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \le 2y$.

Solução:

O esboço de S é dado na figura que se segue.



Temos $S: z = \underbrace{1 - x^2 - y^2}_{f(x,y)}$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 2y$. Como $dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy$, então $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$. Logo

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\; dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\; dxdy = \iint_D dxdy = A(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi\,.$$

Aula 22 – Aplicações à Física

Objetivo

- Estudar aplicações como cálculo de massa, centro de massa e momento de inércia.

Aplicações à Física

Seja S uma chapa delgada, formando uma superfície no espaço, e seja $\delta(x, y, z)$ sua densidade superficial, que supomos contínua. Então, a massa M de S é dada por

$$M = \iint_S \delta(x, y, z)\, dS\,.$$

O momento de inércia de S em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iint_S r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)\,dS$$

onde $r(x,y,z) =$ distância de (x,y,z) ao eixo E.

Se o eixo $E =$ eixo z, então $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ e

$$I_z = \iint_S \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,dS\,.$$

Se o eixo $E =$ eixo y, então $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$, portanto

$$I_y = \iint_S \left(x^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\,dS\,.$$

Se o eixo $E =$ eixo x, então $r(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$, portanto

$$I_x = \iint_S \left(y^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\,dS\,.$$

O centro de massa $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ é dado por

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_S x\delta(x,y,z)\,dS}{M}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_S y\delta(x,y,z)\,dS}{M}$$

$$\overline{z} = \frac{\displaystyle\iint_S z\delta(x,y,z)\,dS}{M}\,.$$

Exemplo 1

Calcule a massa da chapa fina S, dada por $\varphi(u,v) = (u,v,2u+v)$ com $(u,v) \in D : 0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq u$, sendo $\delta(x,y,z) = x+y+z$ a densidade superficial.

Solução:

Temos

$$M = \iint_S (x+y+z)\,dS = \iint_D (3u+2v)\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|\,dudv\,,$$

onde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,-1,1)$$

e

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}\,.$$

Logo,

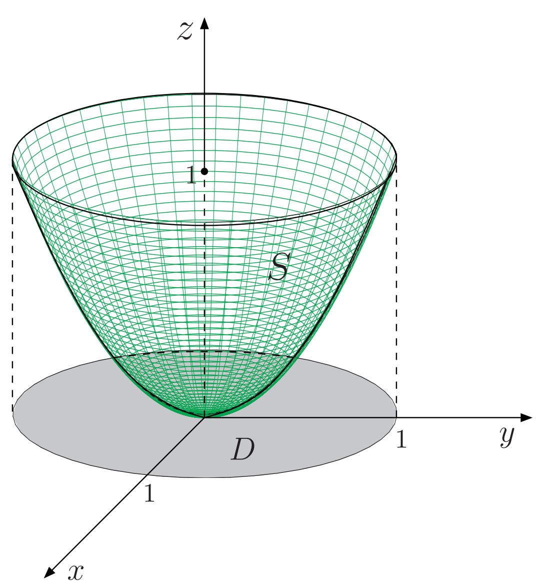
$$\begin{aligned}M=\sqrt{6}\iint_D(3u+2v)\;dudv=\sqrt{6}\int_0^1\int_0^u(3u+2v)\;dvdu &= \sqrt{6}\int_0^1\Big[3uv+v^2\Big]_0^u\;du\\ &= \sqrt{6}\int_0^1\Big[3u^2+u^2\Big]\;du\\ &= \sqrt{6}\int_0^1 4u^2\;du\\ &= \tfrac{4\sqrt{6}}{3}\;\textit{u.m.}\end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule o momento de inércia da superfície homogênea de equação $z = x^2 + y^2$, com $(x,y)\in D: x^2+y^2\leq 1$, em torno do eixo z.

Solução:

O esboço de S é:



A superfície S é descrita por

$$S: z=f(x,y)=x^2+y^2\,,\;\;(x,y)\in D: x^2+y^2\leq 1\,.$$

Temos

$$dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy\,.$$

Então,

$$I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y, z)\, dS = k \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\, dS\,,$$

pois S é homogênea. Logo,

$$I_z = k \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy\,.$$

Usando coordenadas polares, temos

$$I_z = k \iint_{D_{r\theta}} r^2 \sqrt{1 + 4r^2}\; r\, drd\theta = 2k\pi \int_0^1 r^2 \left(1 + 4r^2\right)^{1/2} r\, dr\,.$$

Fazendo $u = 1 + 4r^2$, temos $r^2 = (u - 1)/4$ e $r\ dr = du/8$. Para $r = 0$ temos $u = 1$, e, para $r = 1$ temos $u = 5$. Então

$$\begin{aligned} I_z = 2k\pi \int_1^5 \tfrac{u-1}{4} u^{1/2}\ \tfrac{du}{8} &= \tfrac{k\pi}{16} \int_1^5 \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)\, du \\ &= \frac{k\pi}{16} \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2}\right]_1^5 \\ &= \frac{k\pi}{16} \left(\frac{2}{5} 5^{5/2} - \frac{2}{3} 5^{3/2} + \frac{4}{15}\right)\,. \end{aligned}$$

Exercício 1: Calcule $\displaystyle\iint_S \left(z - x^2 + xy^2 - 1\right)\, dS$, onde S é a superfície

$$\varphi(u, v) = u\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (u^2 + 1)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

com $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2$.

Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iint_S f(x, y, z)\, dS$, onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 1$.

Exercício 3: Calcule $\displaystyle\iint_S x^2 z\, dS$, onde S é o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, com $0 \leq z \leq 1$.

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\iint_S x\, dS$, onde S é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Exercício 5: Seja S a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitado pelos planos $z = 1$ e $z = 4$.

a) Parametrize S usando as coordenadas cartesianas.

b) Parametrize S usando as coordenadas polares.

c) Calcule $\iint_S z^2 \, dS$.

Exercício 6: Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = y^2$.

Exercício 7: Determine o momento de inércia em relação ao eixo da superfície S parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, sendo a densidade constante.

Exercício 8: Uma lâmina superficial S tem a forma de um cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ e limitado pelo plano xy. Em cada ponto de S a densidade é proporcional à distância entre o ponto e o eixo z. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S.