Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 13

Aula 24 – Teorema de Gauss

Objetivo

- Estudar um teorema famoso que permite calcular fluxos através de superfícies fechadas: o teorema de Gauss.

O Teorema de Gauss

O curso de Cálculo III-A, contém alguns teoremas fascinantes como o teorema de Green, o teorema de Stokes e o teorema de Gauss. Nesse módulo apresentamos o famoso teorema de Gauss ou teorema da Divergência. No próximo módulo, apresentaremos o também famoso teorema de Stokes.

O teorema de Gauss estabelece uma relação entre uma integral tripla, numa região sólida W de $\mathbb{R}^3$, com uma integral de superfície na sua fronteira. Esse teorema é um instrumento poderoso para os modelos matemáticos que descrevem alguns fenômenos físicos como fluxos de fluidos, fluxos de campos elétricos ou magnéticos e fluxos de calor.

Agora, enunciaremos o teorema da Divergência ou de Gauss.

Teorema de Gauss: Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, cuja fronteira $\partial W = S$ está orientada positivamente com $\overrightarrow{n}$ exterior a W. Seja $\overrightarrow{F}$ um campo vetorial de classe C^1 em um aberto U contendo W. Então,

$$\iint\limits_{S=\partial W} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint\limits_{W} \text{div}\,\overrightarrow{F}\, dxdydz\,.$$

Para enunciar os teoremas de Gauss e de Stokes utilizaremos conceitos definidos na Aula 14 – Campos Vetoriais: divergente e rotacional. Lembrando aqui que:

$$\text{div}\,\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

e

$$\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}\,.$$

Exemplo 1

Verifique o teorema de Gauss para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xz\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + yz\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z^2\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$, calculando as duas integrais do enunciado, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $\vec{n}$ é a normal unitária exterior a S.

Solução:

O vetor unitário normal exterior à esfera é definido por $\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{a}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,dS &= \iint\limits_S \left(xz, yz, z^2\right)\cdot\frac{(x,y,z)}{a}\,dS \\
&= \frac{1}{a}\iint\limits_S \left(x^2z + y^2z + z^3\right)\,dS \\
&= \frac{1}{a}\iint\limits_S z\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dS \\
&= \frac{a^2}{a}\iint\limits_S z\,dS \\
&= a\iint\limits_S z\,dS\,.
\end{aligned}$$

Parametrizando S, temos $\varphi(\phi,\theta) = (a\operatorname{sen}\phi\cos\theta, a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, a\cos\phi)$, com $D: 0\le\phi\le\pi$ e $0\le\theta\le 2\pi$. Temos, também, que $dS = a^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$. Então,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,dS &= a\iint\limits_D (a\cos\phi)\left(a^2\operatorname{sen}\phi\right)\,d\phi\,d\theta \\
&= a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\phi\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta \\
&= a^4\int_0^{2\pi}\left.\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\right|_0^{\pi}\,d\theta \\
&= a^4\int_0^{2\pi}0\,d\theta \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\text{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = z+z+2z = 4z$$

e, então,

$$\begin{aligned}\iiint\limits_W \text{div}\,\overrightarrow{F}\;dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^\pi 4\rho^3\cos\phi\,\text{sen}\,\phi\;d\phi\,d\rho\,d\theta\\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\left[\frac{\text{sen}^2\,\phi}{2}\right]_0^\pi d\rho\;d\theta\\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\cdot 0\,d\rho\,d\theta\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

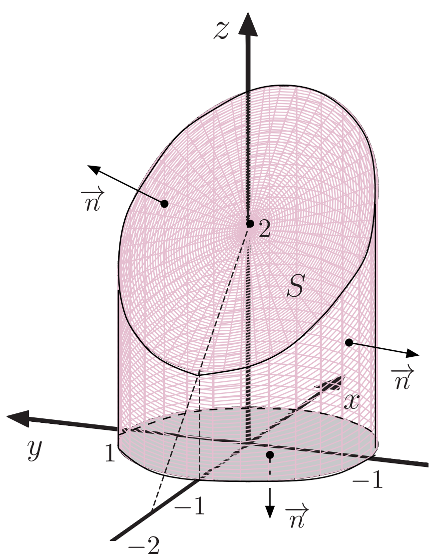
O teorema de Gauss está, portanto, verificado.

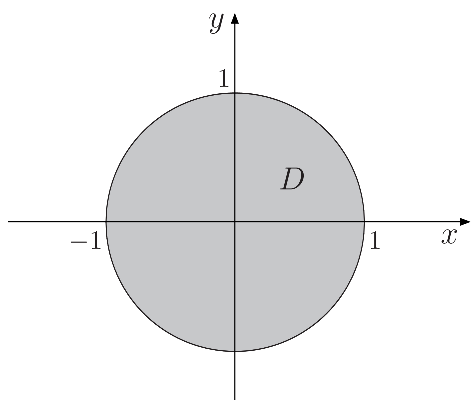
Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+ye^z, y+ze^x, z^2+xe^y)$, S é a fronteira do sólido interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, entre os planos $z=0$ e $z=x+2$ e $\vec{n}$ a normal exterior a S.

Solução:

O esboço de S é:





Seja W o sólido limitado por S. Pelo teorema de Gauss, temos:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_W \text{div}\overrightarrow{F}\, dV &= \iiint_W (1+1+2z)\, dV \\
&= 2\iint_D \int_0^{x+2} (1+z)\, dz\, dx\, dy \\
&= 2\iint_D \left[z + \frac{z^2}{2}\right]_0^{x+2} dx\, dy \\
&= 2\iint_D \left[x+2+\frac{(x+2)^2}{2}\right] dx\, dy \\
&= \iint_D \left(6x+8+x^2\right)\, dx\, dy \\
&= \underbrace{6\iint_D x\, dx\, dy}_{=\,0} + \underbrace{8\, A(D)}_{8\pi} + \iint_D x^2\, dx\, dy\,.
\end{aligned}
$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$
\iint_D x^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\text{sen}\, 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}\,.
$$

Logo,

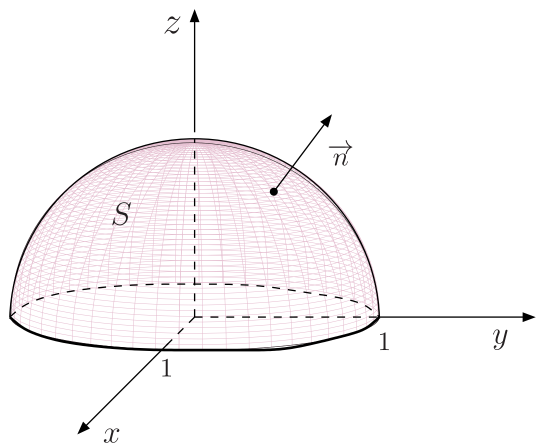
$$
\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, dS = 8\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{33\pi}{4}\,.
$$

Exemplo 3

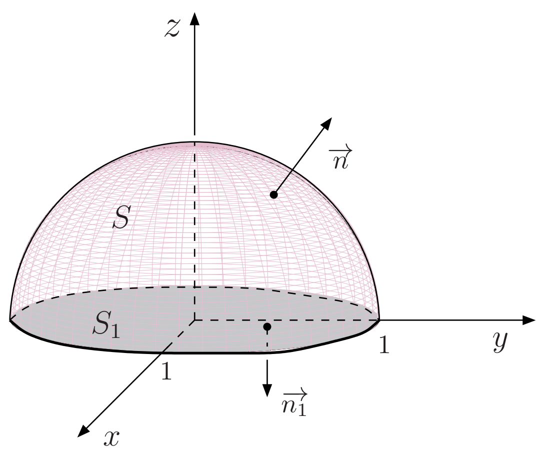
Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^3\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y^3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z^3\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e $\vec{n}$ a orientação normal exterior a $S : x^2+y^2+z^2 = 1$, com $z \geq 0$.

Solução:

O esboço de S (aberta) é:



Seja $\overline{S} = S \cup S_1$, onde $S_1 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1$, com $\vec{n}_1 = -\vec{k}$.



Seja W o sólido limitado pela superfície fechada $\overline{S}$. Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iiint_W 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dV\,.$$

Passando para coordenadas esféricas, temos $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \ d\rho\, d\phi\, d\theta$ e $W_{\rho\phi\theta} : 0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Então,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_W 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\,dV &= 3\iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2\cdot\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^4\operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\rho\,d\phi \\
&= 6\pi\int_0^{\pi/2}\int_0^1\rho^4\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\phi\,d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5}\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{6\pi}{5}\,.
\end{aligned}$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS$

Temos

$$\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS=\iint\limits_{S_1}\left(x^3,y^3,0\right)\cdot(0,0,-1)\,dS=\iint\limits_{S_1}0\,dS=0\,.$$

Logo,

$$\iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{6\pi}{5}\,.$$

Exercício 1: Verifique o teorema de Gauss calculando a integral de superfície e a integral tripla para o campo $\vec{F}(x,y,z)=2x\,\vec{\mathbf{i}}+2y\,\vec{\mathbf{j}}+z^2\,\vec{\mathbf{k}}$ e S é a superfície da seguinte região:

$$W=\left\{(x,y,z);\ x^2+y^2\leq 1\,,\,0\leq z\leq 1\right\}\,.$$

Exercício 2: Aplique o teorema da divergência para obter o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, orientada positivamente:

a) $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+y^2)\,\vec{\mathbf{i}}+(y^2-2xy)\,\vec{\mathbf{j}}+(4z-2yz)\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo cone $x=\sqrt{y^2+z^2}$ e pelo plano $x=3$.

b) $\vec{F}(x,y,z)=(x^3+y\operatorname{sen}z)\,\vec{\mathbf{i}}+(y^3+z\operatorname{sen}x)\,\vec{\mathbf{j}}+z^3\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelos hemisférios $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ e pelo plano $z=0$.

c) $\vec{F}(x,y,z)=(xy^2+\cos z)\,\vec{\mathbf{i}}+(x^2y+\operatorname{sen}z)\,\vec{\mathbf{j}}+e^y\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo paraboloide $z=x^2+y^2$ e pelo plano $z=4$.

Exercício 3: Fechando, de uma forma adequada, as superfícies abertas dadas e utilizando o teorema de Gauss, calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, com $\vec{n}$ exterior à superfície fechada

a) $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,2z)$, onde S é a superfície do paralelepípedo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x=1$, $y=2$ e $z=3$, exceto a face superior;

b) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, onde $S : x^2+y^2+z^2 = a^2$ com $z \leq 0$;

c) $\vec{F}(x,y,z) = z\,\text{arctg}(y^2)\,\vec{\mathbf{i}} + z^3\ln(x^2+1)\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$, onde $S : z = 2-x^2-y^2$, com $1 \leq z \leq 2$.

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = (e^x - y)\,\vec{\mathbf{i}} + (xz+y^2)\,\vec{\mathbf{j}} + 2yz\,\vec{\mathbf{k}}$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2-4z=0$, com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior.

Exercício 5: Seja W a região limitada pelo cilindro parabólico $z = 1-x^2$, o plano $y+z=2$ e os planos coordenados $z=0$ e $y=0$. Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = (x + e^{-y}\,\text{sen}\,z)\,\vec{\mathbf{i}} + (y + \text{arctg}\,z)\,\vec{\mathbf{j}} + (\text{sen}\,x + \cos y)\,\vec{\mathbf{k}}$ através da superfície S de W com normal $\vec{n}$ exterior à W.