# Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias por Série de Potências e Transformada de Laplace

Roberto Toscano Couto
rtoscano@id.uff.br
http://www.professores.uff.br/rtoscano/
Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense
Niterói, RJ

6 de setembro de 2016

# Prefácio

Trata-se de um texto didático para a disciplina "EQUAÇÕES DIFERENCIAIS"(ministrada pelo Departamento de Matemática Aplicada da UFF), cujo objetivo é a resolução de equações diferenciais ordinárias por série de potências (incluindo o método de Frobenius) e da transformada de Laplace, bem como sistemas simples de equações diferenciais ordinárias. Nesse sentido, faz-se preliminarmente um estudo básico das séries e da transformada de Laplace.

Este texto baseia-se consideravelmente nas referências bibliográficas e contém exatamente o que se apresenta nas aulas, evitando que o aluno as copie, assim se obtendo mais a sua atenção e economizando tempo, bem como definindo com clareza o que se deve estudar. Para o seu aprendizado são imprescindíveis as explicações dadas nas aulas, quando, então, se detalham muitas das passagens matemáticas.

# Sumário

# Capítulo 1

# Sequências e Séries

## 1.1 Sequências

Se a cada inteiro positivo $n$ associarmos um número $a_n$, dizemos que esses números formam uma sequência, que é ordenada segundo seus índices:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \cdots, \quad a_n, \quad a_{n+1}, \quad \cdots .$$

Exemplos:

i) $a_n = 1/2^n$ : $\quad a_1 = 1/2, \quad a_2 = 1/4, \quad a_3 = 1/8, \quad \cdots$

ii) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ : $\quad a_1 = 4, \quad a_2 = \frac{9}{4}, \quad a_3 = \frac{16}{9}, \quad \cdots$

Chamamos $a_n$ de termo geral da sequência, o qual é usado também para indicar a própria sequência, isto é, dizemos simplesmente, por exemplo, "que a sequência $a_n = n^2$ é formada pelos quadrados dos naturais."

Se o que denominamos limite da sequência, dado por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad ,$$

for finito, isto é, se para qualquer $\epsilon > 0$ é possível achar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \epsilon \ \text{ para } \ n > N \quad ,$$

dizemos que a sequência $a_n$ converge para $a$. Se aquele limite não existe, dizemos que a sequência $a_n$ é divergente.

Observe que uma sequência $a_n$ pode ser vista como uma função $a(n)$ da variável natural $n$. Com isso, a definição do limite acima é formalmente a mesma que aquela adotada no caso de uma função $f(x)$ da variável real $x$.

Sejam $m$ e $n$ naturais quaisquer, com $m < n$. Dizemos que uma sequência $a_n$ é

- crescente se $a_m \leq a_n$ [Ex: $2, 5, 5, 6, 7, 7, 11, \cdots$]
- decrescente se $a_m \geq a_n$ [Ex: $6, 6, 3, 2, 2, 1, \cdots$]
- monótona se for crescente ou decrescente
- limitada superiormente se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq \lambda \; \forall n \in \mathbb{N}$
- limitada inferiormente se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq \lambda \; \forall\, n \in \mathbb{N}$
- limitada se existem $\lambda_1$ e $\lambda_2$ tais que $\lambda_1 \leq a_n \leq \lambda_2 \forall\, n \in \mathbb{N}$

Note que, na definição de sequências crescente e decrescente, permite-se a igualdade entre termos, o que possibilita considerar a sequência constante (aquela cujo termo geral é constante; por exemplo: 3, 3, 3, $\cdots$) tanto como uma sequência crescente quanto decrescente e, por conseguinte, também como monótona.

Teorema 1

É convergente uma sequência que

- é crescente e limitada superiormente
- é decrescente e limitada inferiormente

É divergente uma sequência que

- é crescente e que não é limitada superiormente (ela diverge para $\infty$)
- é decrescente e que não é limitada inferiormente (ela diverge para $-\infty$)

## 1.2 Séries de números reais

Dada uma sequência $a_k$, a sequência de termo geral

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad (n = m,\ m+1,\ \cdots)$$

[ou seja,

$$\begin{array}{rcll} s_m &=& a_m & (1^{\underline{o}} \text{ termo}) \\ s_{m+1} &=& a_m + a_{m+1} & \\ &\vdots& & \\ s_n &=& a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n & (\text{termo geral})\ ] \end{array}$$

é denominada de série associada à sequência $a_n$. Os números $a_n$ são chamados de termos da série, e os números $s_n$, de somas parciais da série.

O limite da série é o limite da sequência das somas parciais $s_n$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots \quad ,$$

o qual, quando existe, denomina-se soma da série, caso em que a série é dita convergente. Se o somatório $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ não existir [limite inexistente, isto é, não-único ou infinito $(\pm\infty)$], a série é dita divergente.

O símbolo $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ usado para indicar a soma da série é usado também para indicar a própria série.

Por exemplo, a soma da série geométrica, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, é igual a $1/(1-q)$ se $|q|<1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} \quad \text{se} \quad |q| < 1}\ ^{(*)} \quad .$$

De fato:

$$\left.\begin{array}{rcccl} s_n &=& \sum\limits_{k=0}^{n} q^k &=& 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ q\, s_n &=& \sum\limits_{k=0}^{n} q^{k+1} &=& q + q^2 + \cdots + q^{n+1} \end{array}\right\} \overset{(-)}{\Longrightarrow} s_n - q\, s_n = (1-q)\, s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cancelto{0}{q^{n+1}}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \Big[\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \ \text{ se } \ |q|<1\Big] \quad .$$

(*) Convencionalmente, $x^0 \equiv 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ , isto é, $x^0$ denota a função constante $f(x) = 1$.

Vejamos duas aplicações da fórmula acima:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}\ ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{1/2}=2\ .$$

Uma fórmula da soma da série geométrica com o termo inicial mais genérico $q^i$ ($i \in \mathbb{N}$), em vez do termo inicial $q^0 = 1$, é a seguinte, deduzida a partir dos resultados já obtidos acima:

$$\boxed{\sum_{k=i}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{i-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^i}{1-q} = \frac{q^i}{1-q} \ \text{ se } |q|<1}\ .$$

Observe que trabalhar com a série

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots\ ,$$

que começa com o índice $m$, é equivalente a trabalhar com a série de termo geral $a_{m+k}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} = a_m + a_{m+1} + \cdots\ ,$$

que começa com o índice 0. Por isso, de agora em diante, todos os resultados serão estabelecidos para séries que começam com o índice 0: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Teorema 2

Se $\alpha$ é um real dado e as séries $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ convergem, então:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha\, a_k = \alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ converge

Teorema 3

Para que a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ convirja, é necessário que o termo geral tenda a zero, isto é, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Segue desse teorema o critério do termo geral para a divergência: se $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ difere de zero ou não existe então a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ é divergente.

Exemplos:

i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[1+(-1)^k\right]$ diverge, pois os termos dessa série são os da sequência

$$a_k = 1+(-1)^k = \begin{cases} 2 \text{ se } k \text{ for par} \\ 0 \text{ se } k \text{ for ímpar} \end{cases}\ ,$$

cujo limite $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ não existe. Além disso, vemos que

$$s_1 = 0\,,\quad s_2 = 0+2\,,\quad s_3 = 0+2+0\,,\quad s_4 = 0+2+0+2 = 4\,,\cdots\ ,$$

isto é, a sequência $s_n$ das somas parciais é crescente e não é limitada superiormente; logo, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[1+(-1)^k\right] = \infty$, de acordo com o Teorema 1.

ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^2}{k^2+3}$ diverge, pois $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2}{k^2+3} = 1 \neq 0$. Em vista disso e do fato de $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2}{k^2+3}$ ser uma sequência crescente (por ser formada de termos positivos), temos que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^2}{k^2+3} = \infty$.

iii) A série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$ satisfaz a condição necessária de o seu termo geral tender a zero $\big(\lim\limits_{k\to\infty} 1/k = 0\big)$; entretanto, ela diverge para $\infty$ , como veremos adiante.

iv) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^3$ satisfaz a condição necessária de o seu termo geral tender a zero $\big(\lim\limits_{k\to\infty} 1/k^3 = 0\big)$ e é convergente, como veremos adiante.

Uma série do tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

em que $a_k$ nunca muda de sinal é dita <u>alternada</u>. Exemplos:

i) $2 - 3 + 4 - 5 + \cdots = \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k k$

ii) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{1}{k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k+1}$

<u>Teorema 4: Critério de convergência para série alternada</u>

A série alternada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ $[a_k > 0]$ é convergente se a sequência (de termos positivos) $a_k$ é decrescente e $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ .

Exemplo: A série $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{\ln k}$ converge, pois satisfaz as condições do Teorema 4: é alternada, e a sequência $a_k = \dfrac{1}{\ln k}\Big|_{k\geq 2}$ é positiva, decrescente e tende a zero.

## 1.3 Critérios de convergência e divergência

<u>Teorema 5: Critério da integral</u>

Considere uma série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ com $a_k > 0$ para $k$ maior ou igual a algum natural $l$. Se existe uma função $f$ contínua, positiva, decrescente satisfazendo $f(a_k) = a_k$ para $k \geq l$ então aquela série será convergente ou divergente conforme a integral imprópria $\displaystyle\int_l^{\infty} f(x)\,dx$ seja convergente ou divergente, respectivamente.

Exemplos:

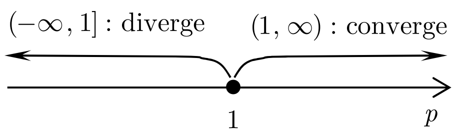
i) A série $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$, com $a_k = \dfrac{1}{k \ln k}$ . A função $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ é contínua, positiva, decrescente em $[2, \infty)$ e tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 2$ . Como

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = \infty \ ,$$

temos que a série dada é divergente.

ii) A chamada <u>série harmônica de ordem $p$</u> ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \ ,$$



converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$ . De fato:

Se $p \leq 0$, o termo geral $\dfrac{1}{n^p}$ não tende a zero quando $n \to \infty$; portanto, segundo o Teorema 3, a série diverge.

Se $p > 0$, o critério da integral, com $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ , fornece

- para $p = 1$ : $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \ln b}_{\infty} - \ln 1 = \infty$ ,

mostrando que a série diverge.

- para $p \in (0,1) \cup (1,\infty)$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\Bigg(\underbrace{\lim_{b\to\infty} b^{1-p}}_{\infty} - 1\Bigg) = \infty \ \text{ se } \ p \in (0,1) \\[2ex] \dfrac{1}{1-p}\Bigg(\underbrace{\lim_{b\to\infty} \dfrac{1}{b^{p-1}}}_{0} - 1\Bigg) = \dfrac{1}{p-1} \ \text{ se } \ p \in (1,\infty) \ , \end{cases}$$

mostrando que a série diverge se $p \in (0,1)$ e converge se $p > 1$ .

<u>Teorema 6: Critério da comparação</u>

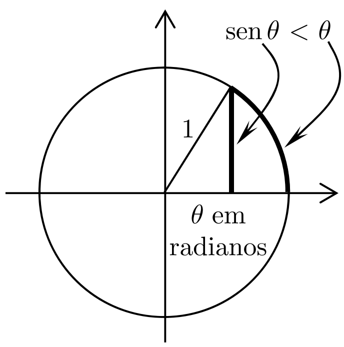
Se $0 \leq a_k \leq b_k$ para $k$ maior ou igual a algum natural $l$, então:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge

Exemplos:

i) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\text{sen}\,\frac{1}{k}$ .




A figura à direita ilustra o fato de que $\text{sen}\,\theta < \theta$ se $\theta > 0$ . Assim, $\text{sen}\,\frac{1}{k} < \frac{1}{k}$ , o que nos permite escrever

$$0 \leq \frac{1}{k}\,\text{sen}\,\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^2} \quad .$$

Logo, como a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ converge (por ser a série harmônica de ordem 2), a série dada também converge.

ii) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+2k+5}$ .

Temos, para $k \geq 1$, que:

$$\frac{k}{k^2+2k+5} \geq \frac{k}{k^2+2k^2+5k^2} = \frac{k}{8k^2} = \frac{1}{8k} \quad .$$

Logo, como a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{8k} = \dfrac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ diverge (por ser a série harmônica de ordem 1), a série dada também diverge.

iii) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ converge, pois

$$0 \leq \frac{1}{n\,2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{para } n \geq 1 \ ,$$

e a série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (geométrica) é convergente:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(1/2)^3}{1 - 1/2} = \frac{1}{4} \quad .$$

Dizemos que uma série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é <u>absolutamente convergente</u> se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ for convergente. Uma série convergente que não é absolutamente convergente é dita <u>condicionalmente convergente</u>.

<u>Teorema 7</u>

É convergente a série que converge absolutamente.

Exemplo: Considere a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ . Constatamos, por comparação, que ela converge absolutamente: $0 \leq |\frac{\operatorname{sen} k}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}$ . Logo, ela própria é convergente.

<u>Teorema 8: Critério da razão</u>

Considere uma série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, com $a_k \neq 0$, tal que $L = \lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$ exista ou seja infinito. Podemos afirmar que

a) Se $L < 1$ , a série dada converge absolutamente

b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$ , a série diverge

c) Se $L = 1$ , o critério nada revela

Exemplos:

i) A série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , com $a_k = 2^k/k!$ , converge, pois

$$L = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}/\,(k+1)!}{2^k/\,k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k}\,\frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1 \quad .$$

ii) A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , com $a_k = k^k/k!$ , diverge, pois

$$L = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}/\,(k+1)!}{k^k/\,k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\,\frac{k!}{(k+1)!}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k\,\cancel{(k+1)}}{k^k}\,\frac{1}{\cancel{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e > 1 \quad .$$

iii) Cálculo de $x$ de modo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , com $a_n = n\,x^n$ , seja convergente.

Se $x = 0$ então $a_n = 0$, e a soma da série é zero (série convergente).
Se $x \neq 0$, pelo critério da razão, temos que

$$L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{n\,x^n}| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x| \cdot 1 = |x| \quad ,$$

mostrando que a série é convergente para $|x| < 1$ . Mas, para $|x| = 1$, o critério da razão nada revela, e uma análise separada é necessária:

Para $x = 1$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n \Big|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$ (série divergente).

Para $x=-1$, temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^n\Big|_{x=-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^n$ , que é uma série divergente, de acordo com o Teorema 3, pois $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(-1)^n$ não existe.

Resposta: a série dada é convergente para $|x|<1$.

iv) A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5+(-1)^k}{6\cdot 2^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48} + \cdots \quad ,$$

formada por duas séries geométricas de razão $1/4$ (uma constituída pelos termos pares e a outra, pelos termos ímpares), é tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{5+(-1)^{k+1}}{6\cdot 2^{k+1}} \cdot \frac{6\cdot 2^k}{5+(-1)^k}\right| = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{5+(-1)^{k+1}}{5+(-1)^k} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5-1}{5+1} = \dfrac{1}{3} & \text{se } k\to\infty \text{ tomando valores pares} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5+1}{5-1} = \dfrac{3}{4} & \text{se } k\to\infty \text{ tomando valores ímpares ;} \end{cases}
\end{aligned}$$

logo, esse limite não existe, o que inviabiliza a aplicação do critério da razão enunciado acima(*).

<u>Teorema 9: Critério da raiz</u>

Considere uma série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ tal que $L = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ exista ou seja infinito. Podemos afirmar que

a) Se $L<1$ , a série dada converge absolutamente

b) Se $L>1$ , a série diverge

c) Se $L=1$ , o critério nada revela

Exemplo: A série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, com $a_k = k^3/3^k$, é convergente, pois

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} k^{3/k} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} e^{3\left(\frac{\ln k}{k}\right)} = \frac{1}{3}\, e^{3\left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}\right)} = \frac{1}{3}\, e^0 = \frac{1}{3} < 1\,.^{(\dagger)}$$

Outro exemplo: vimos, no Exemplo (iv) logo acima, que o critério da razão (teorema 8) falha com a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{5+(-1)^k}{6\cdot 2^k}$. Vamos, entretanto, empregar o critério da raiz; uma vez que

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{5+(-1)^k}{6\cdot 2^k}\right|} = \begin{cases} \sqrt[k]{\dfrac{5+1}{6\cdot 2^k}} = \sqrt[k]{\dfrac{1}{2^k}} = \dfrac{1}{2} & \text{se } k \text{ for par} \\[2ex] \sqrt[k]{\dfrac{5-1}{6\cdot 2^k}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[k]{\dfrac{4}{6}} \to \dfrac{1}{2} & \text{quando } k\to\infty \text{ tomando valores ímpares ,} \end{cases}$$

isto é, $L = 1/2 < 1$, concluímos que a série é convergente(‡).

(*) O critério da razão admite uma formulação mais genérica pela qual se verifica a convergência da série acima: cf. a seção 6-8 da referência bibliográfica [5].

(†) Usando a regra de l'Hopital, vemos que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1/k}{1} = 0$ .

(‡) Foi usado o seguinte resultado: se $a>0$ então $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\frac{\ln a}{k}} = e^{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln a}{k}} = e^0 = 1$ .

## 1.4 Séries de potências

Seja $x$ uma variável real e considere um valor $x_0$ fixo dessa variável. Entendemos por série de potências uma série cujo termo geral é o da sequência $a_n(x-x_0)^{E_n}$ (uma potência de $x-x_0$ multiplicada por uma constante): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^{E_n}$. Neste texto, o expoente $E_n$ consistirá simplesmente nos números naturais, $E_n = n \in \mathbb{N}$, ou nestes acrescidos de um número real $r$ fixo, $E_n = n + r$. Ou seja, trabalharemos com as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^{n+r} = a_0(x-x_0)^r + a_1(x-x_0)^{1+r} + a_2(x-x_0)^{2+r} + \cdots \quad .$$

A série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^{E_n}$ é dita série de potências *relativa a* $x_0$ (ou *em torno de* $x_0$, ou ainda *centrada em* $x_0$), na qual $x_0$ é denominado ponto de expansão da série. É bastante frequente a série de potências centrada em zero; por exemplo: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ .

Seguem dois teoremas fundamentais no estudo das séries de potências:

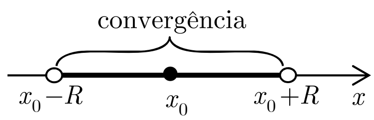
Teorema 10

Toda série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ tem um raio de convergência $R$ tal que a série converge absolutamente se $|x-x_0| < R$ e diverge se $|x-x_0| > R$ .

O número $R$ pode ser 0 (caso em que a série converge somente para $x = x_0$), um número real positivo, ou $\infty$ (caso em que a série converge para todo $x$), podendo ser calculado pela fórmula

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad ,$$

contanto que, para algum natural $N$, $a_n \neq 0$ se $n \geq N$, e o limite forneça um único resultado, finito ou infinito.




Observe que o teorema nada diz se $|x-x_0| = R$: nos pontos $x = x_0 \pm R$, a série pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. Além disso, se $a_n$ se anula uma infinidade de vezes, o raio de convergência $R$ não pode ser calculado com as fórmulas acima; nesse caso, exemplificaremos como $R$ pode ser determinado por meio dos critérios da razão e da raiz.

O conjunto dos valores reais de $x$ para os quais a série é convergente é chamado de intervalo de convergência. Este, segundo o teorema, pode consistir apenas no ponto $x_0$, se $R = 0$, ou, se $R > 0$, nos intervalos $(x_0 - R, x_0 + R)$, $[x_0 - R, x_0 + R)$, $(x_0 - R, x_0 + R]$ ou $[x_0 - R, x_0 + R]$, conforme a série seja convergente, ou não, em $x_0 \pm R$.

Por exemplo, vamos calcular o raio de convergência $R$ e o intervalo de convergência

**i)** da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n\,x^n$ :

$$R = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = 0\cdot\dfrac{1}{e} = 0 \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

e, portanto, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n\,x^n$ só converge em $x = 0$ .

**ii)** da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$ :

$$R = \left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/(n+2)}{1/(n+3)} = 1 \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{n+2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ converge } \forall\, x \in (-1,1)\ .$$

Analisemos a convergência nos ponto $x = \pm 1$. Se $x = 1$, temos a série divergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+2}$ $\Big[ = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n} \Big]$. Se $x = -1$, temos a série alternada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n+2}$ , que, segundo o Teorema 4, é convergente (condicionalmente convergente, obviamente).

Resposta: A série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$ converge no intervalo $[-1,1)$, sendo $R = 1$ .

**iii)** da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ :

$$R = \left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \cdots = \infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ converge } \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

**iv)** da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-3)^n}{2^n n}$ :

$$R = \left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2 \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{2^n n}}_{2\,\sqrt[n]{n}} = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(x-3)^n}{2^n n} \text{ converge } \forall\, x \in (3-2, 3+2) = (1,5)\ .$$

Analisemos a convergência nos pontos extremos desse intervalo. Se $x = 1$, temos a série divergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ . Se $x = 5$, temos a série alternada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, que, segundo o Teorema 4, é convergente (condicionalmente convergente).

Resposta: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-3)^n}{2^n n}$ converge no intervalo $(1,5]$, sendo $R = 2$ .

**v)** da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5+(-1)^n}{6\cdot 2^n} \cdot x^n$ :

Os coeficientes $a_n = \dfrac{5+(-1)^n}{6\cdot 2^n}$ são tais que $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}| = 3$ ou $\dfrac{4}{3}$ , conforme $n \to \infty$ tomando valores pares ou ímpares, respectivamente (isso já foi verificado na pág. 10); assim, por não existir esse limite, calculemos o raio de convergência usando a fórmula de $R$ envolvendo a raiz $n$-ésima:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\dfrac{5+(-1)^n}{6\cdot 2^n}|}}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{6\cdot 2^n}{5+1}} = 2 & \text{se } n\to\infty \text{ tomando valores pares} \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{6\cdot 2^n}{5-1}} = 2 \overbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{6}{4}}}^{1} = 2 & \text{se } n\to\infty \text{ tomando valores ímpares ,} \end{cases}$$

isto é, $R = 2$, convergindo a série no intervalo $(-2, 2)$. Uma vez que, nos extremos desse intervalo, a série toma as formas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{6 \cdot 2^n} \cdot x^n \Bigg|_{x=-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5+(-1)^n}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{6 \cdot 2^n} \cdot x^n \Bigg|_{x=2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{6} \ ,$$

que são séries divergentes (pois o termo geral não tende a zero), temos, como resposta, que a série dada converge no intervalo $(-2, 2)$.

**vi)** da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{2n}}{64^n n^2}$ :

Não podemos empregar as fórmulas de cálculo do raio de convergência fornecidas no Teorema 10, pois todos os coeficientes das potências ímpares de $(x-5)$ se anulam $\Big[$note que a série pode ser escrita na forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-5)^n$, com $a_n = 0$ se $n = 1, 3, 5, \cdots$ e $a_n = \dfrac{(-1)^{n/2}}{64^{n/2}(n/2)^2}$ se $n = 2, 4, 6, \cdots \Big]$. Nesse caso, empregamos o critério da razão ou o da raiz para determinar os valores de $x$ que tornam convergente a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, onde $c_n = \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{2n}}{64^n n^2}$ .

Para $x \neq 5$ (ponto no qual a série é obviamente convergente), o critério da razão fornece

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{c_{n+1}}{c_n}\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{(x-5)^{2(n+1)}}{64^{n+1}(n+1)^2} \cdot \frac{64^n n^2}{(x-5)^{2n}}\Big| = \frac{(x-5)^2}{64} \overbrace{\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2}^{1} < 1$$
$$\Rightarrow \quad (x-5)^2 < 64 \quad \Rightarrow \quad -8 < x-5 < 8 \quad \Rightarrow \quad -3 < x < 13 \ .$$

O mesmo resultado é obtido com o critério da raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Big|\frac{(-1)^n\,(x-5)^{2n}}{64^n n^2}\Big|} = \frac{(x-5)^2}{64} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}} < 1 \ \Rightarrow \ (x-5)^2 < 64 \ \Rightarrow -3 < x < 13 \ ,$$

uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (n^2)^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n^2}{n}} = e^{2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{2(0)} = e^0 = 1$ .

Por outro lado, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{2n}}{64^n n^2}\Bigg|_{x=-3 \text{ ou } 13} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Resposta: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{2n}}{64^n n^2}$ converge no intervalo $[-3, 13]$, sendo $R = 8$ .

**vii)** da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}}$ :

Nesta série nota-se a ausência de toda potência $(x-5)^k$ em que $k$ não seja múltiplo de 3, motivo pelo qual novamente convém empregar os critérios da razão ou da raiz.

Com $c_n = \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}}$ , e para $x \neq 5$, obtemos, pelo critério da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{c_{n+1}}{c_n}\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{(x-5)^{3(n+1)}}{64^{n+1}\sqrt{n+1}} \cdot \frac{64^n \sqrt{n}}{(x-5)^{3n}}\Big| = \frac{|x-5|^3}{64} \overbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}}^{1} < 1$$
$$\Rightarrow \quad |x-5|^3 < 64 \quad \Rightarrow \quad |x-5| < \sqrt[3]{64} = 4 \quad \Rightarrow \quad -4 < x-5 < 4 \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 9 \ .$$

Esse mesmo resultado é obtido pelo critério da raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Big|\frac{(-1)^n\,(x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}}\Big|} = \frac{|x-5|^3}{64} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}}} < 1 \ \Rightarrow \ |x-5|^3 < 64 \ \Rightarrow 1 < x < 9$$

pois $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}\,)^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\sqrt{n}}{n}} = e^{\frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$ .

Além disso,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{3n}}{64^n \sqrt{n}}\Bigg|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (uma série harmônica de ordem menor ou igual a 1) é divergente.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{3n}}{64^n\sqrt{n}}\Bigg|_{x=9} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é uma série alternada convergente.

Resposta: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-5)^{3n}}{64^n\sqrt{n}}$ converge no intervalo $(1,9]$ , sendo $R=4$ .

Teorema 11

Uma série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ com raio de convergência $R>0$ apresenta as seguintes propriedades no intervalo $(x_0-R\;,\;x_0+R)$:

a) sua soma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n = f(x)$ é uma função contínua;

b) ela pode ser diferenciada termo a termo para se obter $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n\,(x-x_0)^{n-1} = f'(x)$ ;

c) ela pode ser integrada termo a termo para se obter $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1}\,(x-x_0)^{n+1} = \displaystyle\int f(x)\,dx$ .

Observe que, de acordo com esse mesmo teorema, a série de potências produzida por diferenciação pode ser novamente diferenciada para se obter uma nova série de potências que converge para $f''(x)$ no mesmo intervalo $(x_0-R\;,\;x_0+R)$. Ou seja, diferenciações sucessivas produzem as derivadas $f^{(n)}(x)$ $[n=1,2,\cdots]$, todas definidas no mesmo intervalo. Isso significa que a soma de uma série de potências centrada em $x_0$ com raio de convergência $R>0$ é, no intervalo $(x_0-R\,,\,x_0+R)$, uma função infinitamente diferenciável, isto é, uma função que pode ser diferenciada um número qualquer de vezes.

## 1.5 Séries de Taylor e MacLaurin

Para estabelecer o teorema abaixo, é fundamental o fato de a soma $f(x)$ de uma série de potências com raio de convergência não-nulo ser, como garante o Teorema 11, uma função infinitamente diferenciável no intervalo de convergência:

Teorema 12

Os coeficientes de uma série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ com raio de convergência $R>0$ são dados por $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ , onde $f(x)$ é a função para a qual aquela série converge no seu intervalo de convergência.

Esse teorema admite uma recíproca, incorporada no próximo teorema:

Teorema 13

Qualquer função $f(x)$ infinitamente diferenciável num ponto $x=x_0$ pode ser desenvolvida numa série de potências como segue:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x-x_0)^3 + \cdots \ .$$

Essa é a chamada série de Taylor relativa a $x_0$, válida no seu intervalo de convergência. A série de Taylor relativa à origem ($x_0=0$) é denominada série de MacLaurin. (Esse teorema nada diz sobre o intervalo de convergência, que pode se determinado por meio do Teorema 10.)

Os seguintes exemplos serão desenvolvidos em sala de aula:

a) $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x\in\mathbb{R})$ .

b) $\displaystyle \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (x\in\mathbb{R})$ .

c) $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (x\in\mathbb{R})$ .

d) $\ln x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots \quad (0 < x \le 2)$ ,

ou, em função da variável $u = x - 1$ ,

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots \quad (-1 < u \le 1) .$$

e) $x^4 e^{-3x} = x^4 \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\right]_{u=-3x} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^{4+n}}{n!} = x^4 - 3x^5 + \frac{9x^6}{4} - \frac{27x^7}{6} + \cdots$ .

f) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots$ .

A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$, que converge para $1/(1-x)$ se $|x| < 1$, pode ser empregada para se obter mais facilmente a série de Taylor de algumas funções.

g) $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ se $|(-x^2)| = x^2 < 1$, i.e., $-1 < x < 1$ .

h) $\dfrac{x^2}{3-4x} = \dfrac{x^2}{3}\cdot\dfrac{1}{1-(4x/3)} = \dfrac{x^2}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4x/3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{x^2}{3} + \frac{4x^3}{3^2} + \frac{4x^4}{3^3} + \frac{4x^5}{3^4} + \cdots$ se $|4x/3| < 1$ , i.e., $-3/4 < x < 3/4$ .

De grande auxílio no desenvolvimento de certas funções em série de Taylor é o Teorema 11. Nos dois exemplos que seguem, para se obter o desenvolvimento em série da função $f(x)$, primeiramente desenvolvemos $f'(x)$ em série e depois integramos essa série termo a termo. Esse método funciona bem, obviamente, quando é mais fácil expandir $f'(x)$ em série do que $f(x)$.

i) $f(x) = \arctan x \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ (série já obtida acima, válida para $-1 < x < 1$)

$\Rightarrow\; f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + c$. Como essa série é convergente para $x = \pm 1$ (segundo o critério para séries alternadas), e $c = 0$ [pois $f(0) = 0$], temos, finalmente, que $f(x) = \arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (1 \le x \le 1)$ .

j) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n$ se $-1 < x < 1 \;\Rightarrow\; f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c.$

Como essa série é divergente para $x = \pm 1$, e $c = 0$ [pois $f(0) = 0$], obtemos finalmente $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 < x < 1)$ .

Uma aplicação das séries de Taylor é o cálculo da integral de uma função cuja primitiva não é conhecida como um expressão *fechada* (isto é, em termos das funções elementares). Por exemplo, não conhecemos a integral indefinida de $e^{x^2}$; contudo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &= \int_0^1 \Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\Big]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1/(2n+1)}{n!} = 1 + \frac{1/3}{1!} + \frac{1/5}{2!} + \frac{1/7}{3!} + \frac{1/9}{4!} + \cdots \quad .\end{aligned}$$

## 1.6 Apêndice: prova dos teoremas

Teorema 1: V. prova *in* referência [3], vol. 4, seç. 1.2, p.11.

Teorema 2: V. referência [3], vol. 4, seç. 2.1, pp. 17 e 18.

Teorema 3:

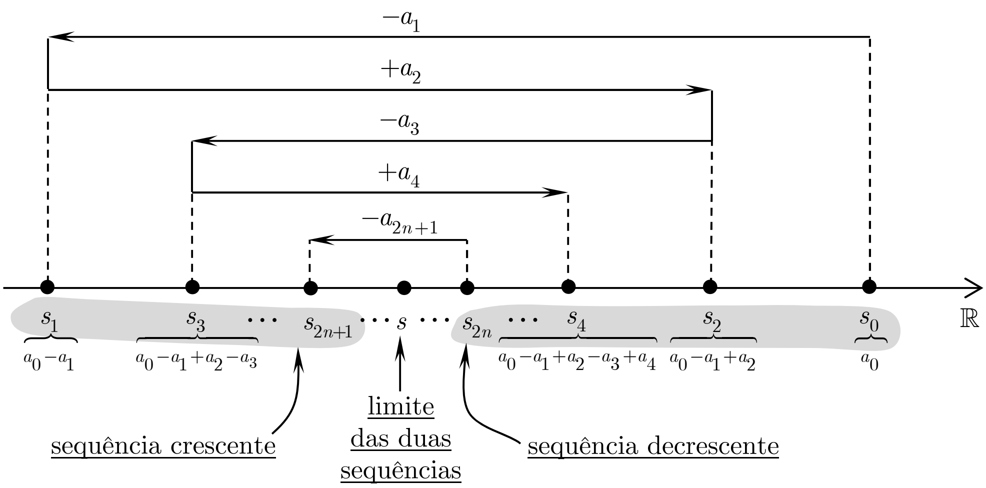
Se $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge então, fazendo $s_n \equiv \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ e usando o fato que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =$ número finito $s$, temos necessariamente o seguinte resultado:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_k^n a_k - \sum_k^{n-1} a_k\Big) = \lim_{n\to\infty}\big(\overset{\nearrow s}{s_n} - \overset{\nearrow s}{s_{n-1}}\big) = \;0\;. \text{ CQD.}$$

Teorema 4

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= s_0 - a_1 < s_0 \\
s_2 &= \underbrace{s_1 + a_2}_{>s_1} = \underbrace{s_0 - \overbrace{(a_1 - a_2)}^{>0}}_{<s_0} \quad\Rightarrow\quad s_1 < s_2 < s_0 \\
s_3 &= \underbrace{s_2 - a_3}_{<s_2} = \underbrace{s_1 + \overbrace{(a_2 - a_3)}^{>0}}_{>s_1} \quad\Rightarrow\quad s_1 < s_3 < s_2 \\
s_4 &= \underbrace{s_3 + a_4}_{>s_3} = \underbrace{s_2 - \overbrace{(a_3 - a_4)}^{>0}}_{<s_2} \quad\Rightarrow\quad s_3 < s_4 < s_2 \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Raciocinando desse modo, podemos desenhar o seguinte:




Assim, concluímos que

$$s_1 < s_3 < \cdots < s_{2n+1} < \cdots < s_{2n} < \cdots < s_4 < s_2 < s_0 \;\;;$$

isto é, que as somas parciais ímpares formam uma sequência crescente, e as somas parciais pares formam uma sequência decrescente, que são limitadas superiormente e inferiormente, respectivamente, o que, de acordo com Teorema 1, nos diz que ambas convergem:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s^*\;, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s^{**}\;.$$

Mas $a_{2n+1} = s_{2n} - s_{2n+1}$ e, portanto,

$$0 = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = s^{**} - s^*$$

$\Rightarrow \quad s^* = s^{**} = s$ : que é o limite da série alternada considerada (veja-o na figura acima).

Teorema 5

Como $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \overbrace{\sum\limits_{k=0}^{l} a_k}^{\text{finito}} + \sum\limits_{k=l+1}^{\infty} a_k$ , a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ será convergente ou divergente conforme a série $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty} a_k$ seja convergente ou divergente, respectivamente.

a) No caso de $\int_l^\infty f(x)\,dx$ convergir, considere, para essa integral, a soma de Riemann *inferior* representada na figura abaixo, no gráfico à esquerda, pela área hachurada de uma infinidade de retângulos situados desde $x = l$ até $x \to \infty$. Note que

$$\text{área hachurada} = a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k \leq \int_l^\infty f(x)\,dx = \text{valor finito} \ ,$$

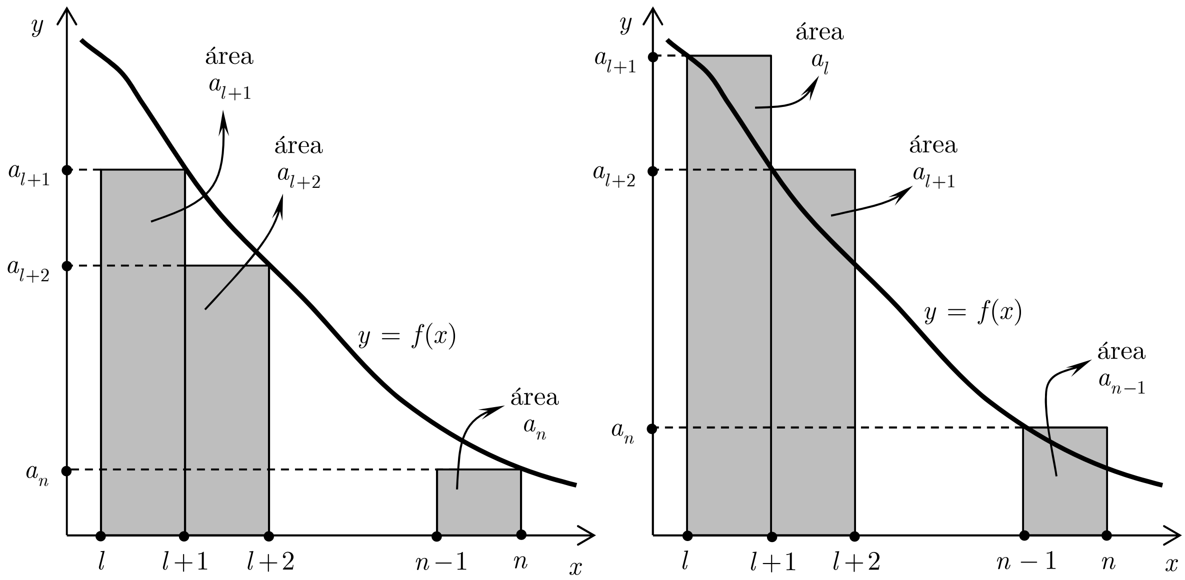
ou seja, a série $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty} a_k$ é convergente.

b) No caso de $\int_l^\infty f(x)\,dx = \infty$, considere, para a integral $\int_l^\infty f(x)\,dx$ (que é divergente também), a soma de Riemann *superior* representada na figura abaixo, no gráfico à direita, pela área hachurada de uma infinidade de retângulos. Temos que

$$\text{área hachurada} = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{n-1} + \cdots = \sum_{k=l}^{\infty} a_k \geq \int_l^\infty f(x)\,dx = \infty \ ,$$

ou seja, $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty} a_k = \cancelto{\infty}{\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k} - a_l = \infty$ (divergente).

O teorema está provado.




Teorema 6

Prova do item (a): A sequência $s_n = \sum\limits_{k=l}^{n} a_k$ é crescente (pois $a_k \geq 0$) e limitada superiormente (pois $s_n = \sum\limits_{k=l}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=l}^{n} b_k < \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ = valor finito), sendo, portanto, convergente, de acordo com o Teorema 1. Isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ = valor finito, o que acarreta na convergência da série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Prova do item (b): Se a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ fosse convergente, então, pelo item (a), a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ também seria convergente, o que contraria a hipótese. Logo, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ não pode ser convergente.

O teorema está provado.

Teorema 7

A série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente, pois

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\, \big(\, |a_k| + a_k \big) - |a_k| \,\Big] \;\overset{(1)}{=}\; \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \big(\, |a_k| + a_k \big)}_{\text{convergente}^{(2)}} \;-\; \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\substack{\text{convergente}\\ \text{p/ hipótese}}} \quad .$$

Seguem as duas notas indicadas no desenvolvimento acima:

(1) Nesta passagem é usado o Teorema 2(b).

(2) Para verificar a convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} \big(\, |a_k| + a_k \big)$ , usamos o critério da comparação: temos, por um lado, que $0 \leq |a_k| + a_k \leq 2\,|a_k|$ e, por outro, que $\sum_{k=0}^{\infty} 2|a_k|$ é convergente, como consequência da hipótese e o Teorema 2(a).

Teorema 8

a) Caso $L < 1$

Seja $q$ um real qualquer entre $L$ e 1. Como $b_k \equiv |a_{k+1}/a_k| \xrightarrow{k\to\infty} L$ , existe $N$ tal que $b_k < q$ para $k \geq N$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad &= \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|}_{\text{valor finito } \sigma} + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| = \sigma + |a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots \\
&= \quad \sigma + |a_N| \left( 1 + \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} + \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|}\,\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} + \frac{|a_{N+3}|}{|a_{N+2}|}\,\frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|}\,\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} + \cdots \right) \\
&= \quad \sigma + |a_N|\,(1 + b_N + b_{N+1}\,b_N + b_{N+2}\,b_{N+1}\,b_N + \cdots) \\
&< \quad \sigma + |a_N|\,\underbrace{(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)}_{\substack{\text{série convergente, por}\\ \text{ser de razão } q<1}} = \text{ valor finito } \ . \ \text{CQD.}
\end{aligned}$$

b) Caso $L > 1$

Seja $q$ um real qualquer entre 1 e $L$ . Como $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| = L$, existe $N$ tal que, para $k \geq N$, $|a_{k+1}/a_k| > q\,(> 1)$ , ou $|a_{k+1}| > |a_k|$ . Isso significa que $|a_N| < |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < \cdots$ , ou, em palavras, que $|a_k|$ é uma sequência crescente que não é limitada superiormente, sendo impossível, portanto, que $|a_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Logo, pelo Teorema 3, a série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ é divergente.

c) Caso $L = 1$

A série pode convergir ou divergir. Por exemplo, no caso da série harmônica de ordem $p$ , $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| = \lim_{k\to\infty} |\frac{1/(k+1)^p}{1/k^p}| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^p = 1^p = 1 \quad .$$

No entanto, já vimos que tal série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Teorema 9

a) Caso $L < 1$

Seja $q$ um real qualquer entre $L$ e 1. Como $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$ , existe $N$ tal que, para $k \geq N$ , $\sqrt[k]{|a_k|} < q$ , ou $|a_k| < q^k$ . Logo, por comparação com a série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ (convergente, pois

$q < 1$), vemos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ é convergente.

b) Caso $L > 1$

Seja $q$ um real qualquer entre 1 e $L$ . Existe $N$ tal que, para $k \geq N$ , $\sqrt[k]{|a_k|} > q\,(> 1)$ , ou $|a_k| > 1$, mostrando que o termo geral da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ não pode convergir para zero, significando, pelo Teorema 3, que a própria série é divergente.

c) Caso $L = 1$

O critério falha, como novamente mostra a série harmônica de ordem $p$ . Vejamos: para $a_k = 1/k^p$ (que converge se $p < 1$ e diverge se $p > 1$), temos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^{p/k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{p\left(\frac{\ln k}{k}\right)}} = \frac{1}{e^{p\left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}\right)}} = \frac{1}{e^0} = 1 \;\; ,$$

onde foi usado o resultado obtido no rodapé da p. 10.

Teorema 10

Calculemos o parâmetro $L$ definido no Teorema 8, que é o critério da razão:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-x_0|}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{|x-x_0|}{R} \quad , \qquad \text{(I)}$$

onde $R \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ . Assim, a série divergirá se

$$L = \frac{|x-x_0|}{R} > 1 \text{ , i.e., } |x-x_0| > R$$

ou

$$L = \frac{|x-x_0|}{R} = \infty \text{ , i.e., } x \neq x_0 \text{ e } R = 0 \;\; ;$$

convergirá absolutamente se

$$L = \frac{|x-x_0|}{R} < 1 \text{ , i.e., } |x-x_0| < R$$

e, obviamente, para $x = 0$, independentemente de $R$.

Calculemos o parâmetro $L$ definido no Teorema 9 (critério da raiz):

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = \frac{|x-x_0|}{R} \quad , \qquad \text{(II)}$$

onde $R \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ . Como a equação (II) é semelhante à equação (I), seguem as mesmas conclusões acima, mas agora com uma nova fórmula de cálculo do raio de convergência, que acabamos de deduzir. CQD.

Teorema 11: V. referência [3], vol. 4, seç. 8.3.

Teorema 12

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = a_0 = 0!\,a_0 \\
f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = a_1 = 1!\,a_1 \\
f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,a_k\,(x-x_0)^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} k\,(k-1)\,a_k\,(x-x_0)^{k-2} \\
&\quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = 2\cdot 1\cdot a_3 = 2!\,a_2 \\
f'''(x) &= \sum_{k=3}^{\infty} k\,(k-1)\,(k-2)\,a_k\,(x-x_0)^{k-2} = 3\cdot 2\,a_3 + \sum_{k=4}^{\infty} k\,(k-1)\,(k-2)\,a_k\,(x-x_0)^{k-3} \\
&\quad \Rightarrow \quad f'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 = 3!\,a_3 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = f^{(n)}(x_0)/\,n!\ .\ \text{CQD}\ .
\end{aligned}
$$

Teorema 13: V. referência [3], vol. 1.

## 1.7 Exercícios

1. Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ , caso exista, sendo:

   a) $a_n = \dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$ b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ c) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ d) $a_n = \sqrt[n]{n}$

2. Calcule a soma da série:

   a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-k}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k}$ d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2}$ e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2^{2k-1}}{7^k}$

   f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} 2^{n-1}3^{1-n}$ g) $0,032 + 0,0032 + 0,00032 + \cdots$

3. Usando o critério do termo geral, mostre a divergência de:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \dfrac{k^2\pi}{2}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k}{k^3}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \ln \dfrac{k+5}{k+2}$

4. Usando o critério da integral, determine a convergência de:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1}$ b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln^2 k}$

5. Usando o critério da integral, determine a divergência de:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{k^2+1}$ b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}$ c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln k}$ d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{(k \ln k)(\ln \ln k)}$

6. Usando o critério da comparação, mostre a convergência de:

   a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{k-1}{2k^3+1}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}\,(1+\sqrt{k^3}\,)}$ c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^2 \ln k}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k}{k^3\sqrt{k}}$ e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k}{k^2}$

   f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k}{k^{3/2}}$

7. Usando o critério da comparação, mostre a divergência de:

   a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2-3k-4}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2+3k+4}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k-1}{k^2-3k+4}$ d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k-9}{k^2-3k+4}$

   e) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln k}$ f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 k}$ g) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}\ln k}$ h) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\ln k}}$

8. Usando o critério da comparação, determine se é convergente ou divergente:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k+1}{2k^3-1}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k^6-4k^5+3k-6}{3k^9+2k^2-2k+1}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k-1}{k^2-3k+4}$

9. Usando o critério da razão, determine a convergência ou divergência de:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{3^k+k}{2^k+1}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k!2^k}{k^k}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(4-\pi)^k}{k^3+4}$

10. Usando o critério da raiz, mostre a convergência de:

    a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^k}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

11. Determine $x$ para que a série seja convergente:

    a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n^3+1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)x^n}{n!}$ d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{3^{n-1}}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+6)^n \ln(n+1)}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$

12. Usando o critério para série alternada, mostre a convergência de:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{\ln k}{k}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sen} \dfrac{1}{k}$ c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k k^3}{k^4+3}$ d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 2^k k}{(k+1)\, e^{k+1}}$

13. Classifique, justificando, se são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+2)}}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{k^2}{4^k}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

14. (Séries telescópicas) Seja $a_k$ uma sequência convergente e denote $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \equiv a$. Mostre que

a) $\boxed{\sum\limits_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_j - a}$ b) $\boxed{\sum\limits_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+2}) = a_j + a_{j+1} - 2a}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$ d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{3}{4}$ e) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{9}$

f) $\sum\limits_{k=6}^{\infty} \left(\dfrac{1}{4k+1} - \dfrac{1}{4k+5}\right) = \dfrac{1}{25}$ g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi+\pi}{3k+6}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi}{3k+3}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

h) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(3k-2)(3k+4)} = \dfrac{1}{12}$ i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{4}$ j) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{4k}{(k^2-1)^2} = \dfrac{5}{4}$

k) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - \sqrt[k+1]{k+1}\right) = \sqrt{2}-1$ l) $\sum\limits_{k=4}^{\infty} \left(k \ln \dfrac{k+3}{k-3} - k \ln \dfrac{k+4}{k-2} - \ln \dfrac{k+4}{k-2}\right) = 4\ln 7 - 6$

15. Determinar se são convergentes ou divergentes:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k-4}{\sqrt{k^6-3k-5}}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3k-1000}{k\, 2^k}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^k}{k+1}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^9}{k!-k^2}$

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \ln k}{2k+3}$ f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\ln^2 k - 1}{k + \ln^2 k}$ g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k - 1}{k \ln^2 k}$ h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k+1}{2k}\right)^k$

i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{5+\cos\sqrt{k^3}}{k+1}$ j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos k\pi}{k+2}$

16. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}\,(x-7)^n}{(n+5)^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2x)^n}{(n+1)^2+2}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n (x-1)^n}{n!}$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^n (x-2)^n}{2^n}$ f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+2)^{3n}}{8^n \ln(n+2)}$

17. No intervalo $(-1, 1)$, desenvolva as seguintes funções numa série de MacLaurin:

a) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ b) $\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$ c) $\dfrac{x+1}{3x+2}$

18. Identifique as seguintes funções:

a) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ b) $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n$ c) $h(x) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} x^{2n+1}$

d) $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{2n+1}$

19. Desenvolva as seguintes funções numa série de MacLaurin, fornecendo o intervalo de convergência:

a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\, dt$ b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{t^2}\, dt$ c) $\displaystyle\int_0^x \ln(1 + 125t^3)\, dt$

20. Calcule a soma das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{-2n}}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

21. Se $f(x) = \operatorname{sen} x^3$, calcule $f^{15}(0)$.

22. Estabeleça que

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln k)^q}$ é divergente

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^q}$ é convergente somente se $q > 1$

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^p \ln k}$ é convergente somente se $p > 1$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^p(\ln k)^q}$ é convergente somente se $p > 1$ ou $p = 1$ e $q > 1$

23. Mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k!a^k}{k^k}$ é convergente para $0 \leq a < e$ e divergente para $a \geq e$.

Nota: Para $a = e$, o problema é mais complicado, sendo necessário mostrar antes a desigualdade

$$(k-1)!\,\frac{e^k}{e} \quad \leq \quad k^k \quad \leq \quad k!\,\frac{e^k}{e} \quad ,$$

o que se consegue a partir da desigualdade

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(k-1) \leq \int_1^k \ln x\, dx \ \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln k \quad ,$$

obtida por meio das somas de Riemann inferior e superior.

24. Considere a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k/k^p$. Mostre que, se $\lim_{k\to\infty} b_k$ existe e é positivo, então a série é convergente para $p > 1$ e divergente para $p \leq 1$.

25. Usando o problema 24, determine se é convergente ou divergente a série:

a) do problema 8a b) do problema 8b c) do problema 8c d) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^2 - 3}{\sqrt[3]{k^9 + k^2 + 1}}$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt[k]{k}}$ f) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k^4 - k^2}}$

## 1.8 Soluções dos Exercícios

**Prob. 1**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{4+\frac{2}{n^3}} = \frac{1}{4}$

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

**c)** Como $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = e^2$

**d)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\right)} \overset{\text{(l' H)}}{=} e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}\right)} = e^0 = 1$

**Prob. 2**

Neste problema fazemos uso da fórmula da soma da série geométrica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ se $|q|<1$.

**a)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k = \dfrac{(1/3)^2}{1-1/3} = \dfrac{1}{6}$

**b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(e^{-1}\right)^k = \dfrac{1}{1-e^{-1}} = \dfrac{e}{e-1}$

**c)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^k = \dfrac{1}{1-(-1/2)} = \dfrac{2}{3}$

**d)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(2^{-1/2}\right)^k = \dfrac{1}{1-2^{-1/2}} = \dfrac{1}{1-1/\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2-1} = 2+\sqrt{2}$

**e)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2^{2k-1}}{7^k} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-2^2/7)^k = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-2^2/7)^1}{1-(-2^2/7)} = \dfrac{-2}{7+4} = -\dfrac{2}{11}$

**f)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} 2^{n-1}3^{1-n} = \dfrac{3}{2}\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(2/3)^2}{1-2/3} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4/9}{1/3} = 2$

**g)** $0,032+0,0032+0,00032+\cdots = 0,032\left[(10^{-1})^0+(10^{-1})^1+(10^{-1})^2+\cdots\right] = 0,032\sum\limits_{k=1}^{\infty}(10^{-1})^k$

$$= 0,032\cdot\frac{1}{1-10^{-1}} = 0,032\cdot\frac{10}{9} = \frac{32}{900}$$

**Prob. 3**

Neste problema, basta mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ não exite ou, existindo, que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ .

**a)** $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{sen}\dfrac{k^2\pi}{2}$ não existe ($a_k$ oscila nos valores 0 e 1)

**b)** $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k}{k^3} \overset{\text{(l' H)}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k\ln 2}{3k^2} \overset{\text{(l' H)}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k\ln^2 2}{6k} \overset{\text{(l' H)}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k\ln^3 2}{6} = \infty$ (não existe)

**c)** $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} k\ln\dfrac{k+5}{k+2} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln\frac{k+5}{k+2}}{k^{-1}} \overset{\text{(l' H)}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\frac{-3}{(k+2)(k+5)}}{-k^{-2}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3k^2}{k^2+7k+10} = 3 \neq 0$

**Prob. 4**

Observe que, em cada integral $\int_K^\infty f(x)\,dx$ usada, a função $f(x)$ é contínua, positiva, decrescente e tal que $f(k)=a_k$ (o termo geral da série) para $k\geq K$, assim satisfazendo as condições do critério da integral. Neste problema, basta mostrar que essa integral imprópria existe.

**a)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x\Big|_1^\infty = \arctan\infty - \arctan 1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

**b)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = -\ln^{-1} x\Big|_2^\infty = -\frac{1}{\ln\infty}+\frac{1}{\ln 2} = 0+\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

**Prob. 5**

Devemos mostrar que a integral imprópria construída segundo o critério da integral (v. o início da resolução do Prob. 4) não existe.

**a)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}(\underbrace{\ln\infty}_{\infty} - \ln 2) = \infty$

**b)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_2^\infty = 2\,(\underbrace{\sqrt{\ln\infty}}_{\infty} - \sqrt{\ln 2}) = \infty$

**c)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x|\,\Big|_2^\infty = \underbrace{\ln\ln\infty}_{\infty} - \ln\ln 2 = \infty$

**d)** $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x\ln x)\ln\ln x}\,dx = \ln\ln\ln x\,\Big|_3^\infty = \underbrace{\ln\ln\ln\infty}_{\infty} - \ln\ln\ln 3 = \infty$ (note que $\ln\ln x > 0$ se $x \geq 3$)

**Prob. 6**

Pelo critério da comparação entre séries de termos gerais positivos, para mostrar que uma série é convergente, basta mostrar que, assintoticamente (i.e., para $k$ maior que algum natural, ou $k \to \infty$), o seu t.g. (termo geral) é menor ou igual que o t.g. de alguma sér. conv. (série convergente).

**a)** $\dfrac{k-1}{2k^3+1} \leq \dfrac{k-1+1}{2k^3+1-1} = \dfrac{1}{2k^2}$ : t.g. de uma sér. conv.

**b)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(1+\sqrt{n^3})} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}\,(1-1+\sqrt{n^3})} = \dfrac{1}{n^2}$ : t.g. de uma sér. conv.

**c)** $\dfrac{1}{k^2\ln k} \leq \dfrac{1}{k^2}$ : t.g. de uma sér. conv.

**d)** $\dfrac{\ln k}{k^3\sqrt{k}} \leq \dfrac{k}{k^3\sqrt{k}} = \dfrac{1}{k^{2,5}}$ : t.g. de uma sér. conv.

**e)** $\dfrac{\ln k}{k^2} \leq \dfrac{\sqrt{k}}{k^2} = \dfrac{1}{k^{1,5}}$ : t.g. de uma sér. conv.

**Prob. 7**

Pelo critério da comparação entre séries de termos gerais positivos, para mostrar que uma série é divergente, basta mostrar que, assintoticamente (i.e., para $k$ maior que algum inteiro positivo), o seu t.g. é maior ou igual que o t.g. de alguma sér. div. (série divergente).

**a)** $\dfrac{2k+1}{k^2-3k-4} \geq \dfrac{2k+1-1}{k^2-3k-4+3k+4} = \dfrac{2}{k}$ : t.g. de uma sér. div.

**b)** $\dfrac{2k+1}{k^2+3k+4} \geq \dfrac{2k+1-1}{k^2+3k^2+4k^2} = \dfrac{1}{4k}$ : t.g. de uma sér. div.

**c)** $\dfrac{2k-1}{k^2-3k+4} \geq \dfrac{2k-k}{k^2-3k+3k+4k^2} = \dfrac{1}{5k}$ : t.g. de uma sér. div.

**d)** $\dfrac{2k-9}{k^2-3k+4} \geq \dfrac{2k-k}{k^2-3k+3k+4k^2} = \dfrac{1}{5k}$ $(k \geq 9)$ : t.g. de uma sér. div.

**e)** $\dfrac{1}{\ln k} \geq \dfrac{1}{k}$ : t.g. de uma sér. div.

**f)** $\dfrac{1}{(\ln k)^2} \geq \dfrac{1}{(\sqrt{k})^2} = \dfrac{1}{k}$ : t.g. de uma sér. div.

**g)** $\dfrac{1}{\sqrt{k}\ln k} \geq \dfrac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}} = \dfrac{1}{k}$ : t.g. de uma sér. div.

**h)** $\dfrac{1}{\sqrt{\ln k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{k}}} = \dfrac{1}{k^{1/4}}$ : t.g. de uma sér. div.

**Prob. 8**

**a)** Conv., pois $\dfrac{k+1}{2k^3-1} \leq \dfrac{k+k}{2k^3-k^3} = \dfrac{2}{k^2}$ é o t.g. de uma sér. conv.

**b)** Conv., pois $\dfrac{2k^6-4k^5+3k-6}{3k^9+2k^2-2k+1} \le \dfrac{2k^6-4k^5+4k^5+3k^6-6+6}{3k^9+2k^2-2k^2-2k^9+1-1} = \dfrac{5}{k^3}$ é o t.g. de uma sér. conv.

**c)** Div., pois $\dfrac{2k-1}{k^2-3k+4} \ge \dfrac{2k-k}{k^2-3k+3k+4k^2} = \dfrac{1}{5k}$ é o t.g. de uma sér. div.

**Prob. 9**

Seja $L \equiv \lim\limits_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$, onde $a_k$ é o termo geral da série dada. Abaixo, os resultados $L<1$ e $L>1$ indicam séries convergentes e divergentes, respectivamente. (O símbolo de módulo será omitido no caso de termo geral positivo.)

**a)** $L = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^{k+1}/(k+1)!}{(-1)^k/k!}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k!}{(k+1)!} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\cancel{k!}}{\cancel{k!}\,(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k+1} = 0 < 1$

**b)** $L = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3^{k+1}+k+1}{2^{k+1}+1} \cdot \dfrac{2^k+1}{3^k+k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\dfrac{3^{k+1}+k+1}{3^k}}{\dfrac{2^{k+1}+1}{2^k}} \cdot \dfrac{\dfrac{2^k+1}{2^k}}{\dfrac{3^k+k}{3^k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3+\overbrace{\cancel{\dfrac{k+1}{3^k}}}^{0}}{2+\underbrace{\cancel{\dfrac{1}{2^k}}}_{0}} \cdot \dfrac{1+\overbrace{\cancel{\dfrac{1}{2^k}}}^{0}}{1+\underbrace{\cancel{\dfrac{k}{3^k}}}_{0}} = \dfrac{3}{2} > 1$

**c)** $L = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)!\,2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \dfrac{k^k}{k!\,2^k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k \cancel{\dfrac{(k+1)!}{k!}}\,\dfrac{2}{\cancel{k+1}} = 2 \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{(1+1/k)^k} = 2\cdot\dfrac{1}{e} < 1$

**d)** $L = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(4-\pi)^{k+1}}{(k+1)^3+4} \cdot \dfrac{k^3+4}{(4-\pi)^k} = (4-\pi)\cdot \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^3+4}{(k+1)^3+4} = (4-\pi)\cdot 1 < 1$

**Prob. 10**

Seja $L \equiv \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ , onde $a_k$ é o termo geral da série dada. Abaixo, os resultados $L<1$ e $L>1$ indicam séries convergentes e divergentes, respectivamente. (O símbolo de módulo será omitido no caso de termo geral positivo.)

**a)** $L = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{1/k^k} = \lim\limits_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k^k} = \lim\limits_{k\to\infty} 1/k = 0 < 1$

**b)** $L = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{(1+1/k)^k} = \dfrac{1}{e} < 1$

**Prob. 11**

Segundo o critério da razão, os valores de $x$ que tornam a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ convergente são os que satisfazem a inequação $\Phi(x) < 1$, onde $\Phi(x) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_{n+1}(x)/\varphi_n(x)|$. Uma investigação separada é necessária para verificar se a convergência da série também ocorre com os valores de $x$ que satisfazem a equação $\Phi(x) = 1$.

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(x-3)^{n+1}/(n+1)}{(x-3)^n/n}\right| = |x-3| \lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\dfrac{n}{n+1}}^{1} = |x-3|\cdot 1 < 1 \;\Rightarrow\; -1 < x-3 < 1 \;\Rightarrow\; x > 2$ e $x < 4$ .

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n}\Big|_{x=2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ , que é uma série alternada convergente.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n}\Big|_{x=4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ , que é divergente. Resposta: $x \in [2,4)$

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+1)x^{n+1}}{(n+1)^3+1} \div \dfrac{nx^n}{n^3+1}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\dfrac{n+1}{n}}^{\to 1} \cdot \overbrace{\dfrac{n^3+1}{(n+1)^3+1}}^{\to 1} = |x| < 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n^3+1}\Big|_{x=-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\dfrac{n}{n^3+1}}_{\to 0}$ , que é uma série alternada convergente.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n^3+1}\Big|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3+1} \;\left[\le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3}\right]$ é convergente. Resposta: $x \in [-1,1]$

**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{[2(n+1)+1]x^{n+1}}{(n+1)!}\div\dfrac{(2n+1)x^n}{n!}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\overbrace{\dfrac{2n+3}{2n+1}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\dfrac{n!}{(n+1)!}}^{=\frac{1}{n+1}\ \to 0} = 0\ \forall x.$  Resposta: $x\in\mathbb{R}$

**d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+2}/3^n}{x^{n+1}/3^{n-1}}\right| = \dfrac{|x|}{3} < 1 \ \Rightarrow\ |x|<3$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{3^{n-1}}\Big|_{x=-3} = 9\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}$, que é uma série divergente.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{3^{n-1}}\Big|_{x=3} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}9$, que é uma série divergente.  Resposta: $x\in(-3,3)$

Outro modo, baseado no fato de que a série dada é a uma série geométrica, é o seguinte: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{3^{n-1}} = 3^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^{n-1}$, que é convergente se $\left|\dfrac{x}{3}\right|<1$ , isto é, se $|x|<3$ .

**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(x+6)^n\ln(n+1)}{(x+6)^{n+1}\ln(n+2)}\right| = \dfrac{1}{|x+6|}\overbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}}^{=1\ (\text{l'H})} < 1 \ \Rightarrow\ |x+6|>1 \ \Rightarrow\ x<-7 \ \text{ ou } \ x>-5$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+6)^n\ln(n+1)}\Big|_{x=-7} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\dfrac{1}{\ln(n+1)}}_{\to 0}$ , que é uma série alternada convergente.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+6)^n\ln(n+1)}\Big|_{x=-5} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}\ \left[\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\right]$ é div.  Resposta: $x\in(-\infty,-7\,]\cup(-5,\infty)$

**f)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1-x)^{n+1}} = \dfrac{1}{1-x}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n$. Essa série geométrica é convergente se $\left|\dfrac{x}{1-x}\right|<1$, ou $|x-1|>|x|$ . Como os modulandos mudam de sinal em $x=0$ e $x=1$, convém resolver a inequação nos intervalos separados por esses valores de $x$.

No intervalo $x<0$ : $-x+1>-x$, ou $1>0$, que é verídico $\forall x<0$ .

No intervalo $(0,1)$ : $-x+1>x$, ou $x<1/2$; logo, $x\in(0,1/2)$ .

No intervalo $x>1$ : $x-1>x$, ou $-1>0$, um absurdo; logo, não existe solução no intervalo $(1,\infty)$.

Além disso, $\left|\dfrac{x}{1-x}\right|\Big|_{x=0} = 0<1$ , e $\left|\dfrac{x}{1-x}\right|\Big|_{x=1}$ não existe.

A união dos valores de $x$ que satisfazem a inequação fornece a resposta: $x<1/2$ .

**Prob. 12**

Aplicamos o critério de convergência para uma série alternada $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ $[a_k>0]$, que consiste em verificar se a sequência $a_k$ é decrescente e com limite igual a zero. Abaixo, cada sequência $a_k$ dada é claramente decrescente (o que, caso se duvide, pode ser confirmado constatando que a derivada da função $f(k)=a_k$ é negativa). Assim, mostraremos a convergência verificando tão-somente que $\lim_{k\to\infty}a_k=0$.

**a)** $\lim\limits_{k\to\infty}a_k = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln k}{k} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1/k}{1} = 0$ ✓

**b)** $\lim\limits_{k\to\infty}a_k = \lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{sen}\dfrac{1}{k} = \operatorname{sen}\Big(\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\Big) = \operatorname{sen}0 = 0$ ✓

**c)** $\lim\limits_{k\to\infty}a_k = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^3}{k^4+3} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k+\cancelto{0}{(3/k^3)}} = 0$ ✓

**d)** $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^k k}{(k+1)\,e^{k+1}} = \dfrac{1}{e}\lim\limits_{k\to\infty}\underbrace{(2/e)^k}_{\to 0}\underbrace{\dfrac{k}{k+1}}_{\to 1} = 0$ ✓

**Prob. 13**

**a)** Vejamos a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+2)}}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}$ ; vemos, por comparação, que essa série é divergente, pois $\frac{1}{\sqrt{k^2+2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k^2+2k^2}} = \frac{1}{k\sqrt{3}}$ , que é o t.g. de uma sér. div. Assim, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+2)}}$ não converge absolutamente; mas essa série é convergente, o que se deduz do critério para série alternada $\Big[\frac{1}{\sqrt{k(k+2)}}$ é uma sequência positiva, decrescente e tal que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+2)}} = 0\Big]$. Logo, a série dada é condicionalmente convergente.

**b)** Vejamos a série $\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{(-1)^k k^2}{4^k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k}$ ; ela é convergente segundo o critério da razão: $\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2/4^{k+1}}{k^2/4^k} = \frac{1}{4} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$ . Ou seja, a série dada é absolutamente convergente.

**c)** A série é divergente segundo o critério do termo geral: $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{\theta\to 0} (\,\mathrm{sen}\theta)/\,\theta = 1 \neq 0$, onde fizemos a mudança de índice $1/\sqrt{k} \equiv \theta$ ($\to 0$ quando $k \to \infty$).

**Prob. 14**

**a)** $\sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sum_{k=j}^{n} a_k - \sum_{k=j}^{n} a_{k+1} \Big\} = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \big[\, a_j + \cancel{(a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_n)}\, \big]$
$-\big[\, \cancel{(a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_n)} + a_{n+1} \big] \Big\} = a_j - \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{a} = a_j - a$

**b)** $\sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+2}) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sum_{k=j}^{n} a_k - \sum_{k=j}^{n} a_{k+2} \Big\} = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \big[\, a_j + a_{j+1} + \cancel{(a_{j+2} + a_{j+3} + \cdots + a_n)}\, \big]$
$-\big[\, \cancel{(a_{j+2} + a_{j+3} + \cdots + a_n)} + a_{n+1} + a_{n+2}, \big] \Big\} = a_j + a_{j+1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{a} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+2}}_{a} = a_j + a_{j+1} - 2a$

**c)** $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big( \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{k\to\infty} a_k = 1 - 0 = 1$$

**d)** $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{-1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k-1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \Big( \underbrace{\frac{1}{k-1}}_{a_{k-1}} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \Big)$$
$$= (1/2) \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_{k+1}) = (1/2) \big(a_1 + a_2 - 2 \lim_{k\to\infty} a_k\big) = (1/2)\,(1 + 1/2 - 0) = 3/4$$

**e)** $$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=3}^{\infty} \Big[ \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}}_{a_{k+1}} \Big] = \sum_{k=3}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_3 - \underbrace{\lim_{k\to\infty} a_k}_{0} = \frac{1}{9}$$

**f)** $$\sum_{k=6}^{\infty} \Big( \underbrace{\frac{1}{4k+1}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{4k+5}}_{a_{k+1}} \Big) = \sum_{k=6}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_6 - \underbrace{\lim_{k\to\infty} a_k}_{0} = \frac{1}{25}$$

**g)** $$\sum_{k=1}^{\infty} \Big[ \underbrace{\mathrm{sen}\Big(\frac{k\pi+\pi}{3k+6}\Big)}_{a_{k+1}} - \underbrace{\mathrm{sen}\Big(\frac{k\pi}{3k+3}\Big)}_{a_k} \Big] = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - a_1 = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

**h)** $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big( \underbrace{\frac{1/6}{3k-2}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1/6}{3k+4}}_{a_{k+2}} \Big) = a_0 + a_1 - 2 \lim_{k\to\infty} \frac{1/6}{3k-2} = \frac{1/6}{-2} + \frac{1/6}{1} - 2\cdot 0 = \frac{1}{12}$$

**i)** $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[ \frac{1}{2}\Big( \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \Big) - \frac{1}{2}\Big( \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{b_k} - \underbrace{\frac{1}{k+2}}_{b_{k+1}} \Big) \Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big(a_1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{2}\Big(b_1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - 0\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

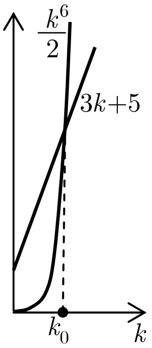
**j)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{4k}{(k^2-1)^2}=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\Big[\underbrace{\dfrac{1}{(k-1)^2}}_{a_k}-\underbrace{\dfrac{1}{(k+1)^2}}_{a_{k+2}}\Big]=a_2+a_3-\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{(k-1)^2}=1+\dfrac{1}{4}-0=\dfrac{5}{4}$

**k)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\big(\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{a_k}-\underbrace{\sqrt[k+1]{k+1}}_{a_{k+1}}\big)=a_2-\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=\sqrt{2}-1$

**l)** $\sum\limits_{k=4}^{\infty}\left(k\,\ln\dfrac{k+3}{k-3}-k\,\ln\dfrac{k+4}{k-2}-\ln\dfrac{k+4}{k-2}\right)=\sum\limits_{k=4}^{\infty}\Big[\overbrace{k\,\ln\dfrac{k+3}{k-3}}^{a_k}-\overbrace{(k+1)\,\ln\dfrac{k+4}{k-2}}^{a_{k+1}}\Big]=\sum\limits_{k=4}^{\infty}(a_k-a_{k+1})$

$$=a_4-\lim_{k\to\infty}a_k\;=\;4\ln 7-\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\dfrac{k+3}{k-3}}{k^{-1}}\;\overset{\text{l'H}}{=}\;4\ln 7-\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{-6}{k^2-3}}{-k^{-2}}$$

$$=4\ln 7-\lim_{k\to\infty}\frac{6k^2}{k^2-3}\;=\;4\ln 7-6$$




**Prob. 15**

**a)** Temos que $\dfrac{k-4}{\sqrt{k^6-3k-5}}=\dfrac{k-4}{\sqrt{k^6-(3k-5)}}\le\dfrac{k}{\sqrt{k^6-(k^6/2)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{k^2}$ , que é o termo geral de uma série convergente. Logo, por comparação, a série dada é convergente.

Note que a desigualdade acima é válida se $3k-5\le k^6/2$, isto é, para $k$ maior que o valor $k_0$ indicado na figura à direita.

**b)** A série é convergente, pois, para ela, o parâmetro $L$ no teste da razão é menor que 1:

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{3(k+1)-1000}{(k+1)2^{k+1}}\cdot\frac{k\,2^k}{3k-1000}\right|=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{3k-997}{3k-1000}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\to 1}=\frac{1}{2}<1\;.$$

**c)** A série é divergente, pois o parâmetro $L$ no teste da razão é $L=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{e^{k+1}}{k+2}\cdot\dfrac{k+1}{e^k}\right|=e>1$ .

**d)** A série é convergente segundo o teste da comparação, uma vez que se consegue mostrar que, para $k$ maior ou igual que algum natural $l$, seu termo geral é maior que o termo geral $b_k$ de uma série convergente. De fato, temos que

$$\frac{k^9}{k!-k^2}\le\frac{k^9}{k!-k!/2}=\frac{2k^9}{k!}\equiv b_k\qquad(\text{se } k^2\le k!/2,\text{ isto é, para } k\ge l=5)$$

e, usando o teste da razão, constatamos que $b_k$ forma uma série convergente:

$$\lim_{k\to\infty}|b_{k+1}/b_k|=\lim_{k\to\infty}\frac{2(k+1)^9}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2k^9}=\lim_{k\to\infty}\underbrace{\left(\frac{k+1}{k}\right)^9}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\to 0}=0<1\;.$$

**e)** A série é convergente consoante o critério para séries alternadas, pois a sequência $a_k=(\ln k)/(2k+3)$ é positiva, decrescente e tende a zero quando $k\to\infty$ .

**f** e **g)** Por comparação, constatamos que as séries são divergentes, pois, para $k$ maior que algum natural $l$, temos que

$$\frac{\ln^2 k-1}{k+\ln^2 k}\ge\frac{\ln^2 k-(\ln^2 k)/2}{k+(\sqrt{k})^2}=\frac{(\ln^2 k)/2}{2k}\ge\frac{1/2}{2k}\;:\;\text{ t.g. de série divergente.}$$

e

$$\frac{\ln k-1}{k\ln^2 k}\ge\frac{\ln k-(\ln k)/2}{k\ln^2 k}=\frac{(\ln k)/2}{k\ln^2 k}=\frac{1/2}{k\ln k}\;:\;\text{ t.g. de série div. [v. Exemplo (i) na pág. 7].}$$

**h)** Pelo critério da raiz, com $a_k=\left(\frac{k+1}{2k}\right)^k$, verificamos que a série é convergente:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2k}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2k}=\frac{1}{2}<1\;.$$

**i)** Por comparação verifica-se que a série é divergente:

$$\frac{5+\cos\sqrt{k^3}}{k+1} \geq \frac{5-1}{k+k} = \frac{2}{k} \ : \ \text{t.g. de série divergente.}$$

**Prob. 16**

**a)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\overbrace{(-1)^n/n}^{a_n}]\,x^n \ \Rightarrow\ R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(-1)^n/n}{(-1)^{n+1}/(n+1)}|=1 \ \Rightarrow\ x_0\pm R=-1 \text{ ou } 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\,(-1)^n/n\,]\,x^n\Big|_{x=-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1/n]$ é divergente

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\,(-1)^n/n\,]\,x^n\Big|_{x=1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^n/n]$ é uma sér. altern. convergente  <u>Resposta</u>: $(-1,1]$

**b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2}}_{a_n}(x-7)^n \ \Rightarrow\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{\frac{n+3}{n+4}}}_{\to 1}\ \underbrace{\left(\frac{n+6}{n+5}\right)^2}_{\to 1}=1 \ \Rightarrow\ x_0\pm R=6 \text{ ou } 8$

$\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2}(x-7)^n\right]_{x=6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2}}_{\to 0}$ é conv., segundo o critério p/ séries alternadas

$\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2}(x-7)^n\right]_{x=8}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{(n+5)^2}\left[\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3n}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{1,5}}\right]$ é conv.  <u>Resposta</u>: $[6,8]$

**c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-2)^n}{(n+1)^2+2}}_{a_n}x^n \ \Rightarrow\ R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(-2)^n}{(n+1)^2+2}\ \frac{(n+2)^2+2}{(-2)^{n+1}}|=\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ x_0\pm R=\pm\frac{1}{2}$

$\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{(n+1)^2+2}\right]_{x=-1/2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2+2}\left[\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right]$ é convergente

$\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{(n+1)^2+2}\right]_{x=1/2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2+2}}_{\to 0}$ é uma sér. alt. conv.  <u>Resposta</u>: $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

**d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{5^n}{n!}}_{a_n}(x-1)^n \ \Rightarrow\ R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}\ \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty$  <u>Resposta</u>: $x\in\mathbb{R}$

**e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{n^n}{2^n}}_{a_n}(x-2)^n \ \Rightarrow\ R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{2^n}\ \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{2}{n+1}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{1}{(1+1/n)^n}}_{\to 1/e}=0$$

<u>Resposta</u>: $x=2$

**f)** Para a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{8^n\ln(n+2)}$, o critério da razão fornece $L=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(x+2)^{3(n+1)}}{8^{n+1}\ln(n+3)}\cdot\frac{8^n\ln(n+2)}{(x+2)^{3n}}|=$

$$\frac{|x+2|^3}{8}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}}_{1}<1 \quad\Rightarrow\quad |x+2|<2 \quad\Rightarrow\quad -2<x+2<2 \quad\Rightarrow\quad -4<x<0\ .$$

$\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{8^n\ln(n+2)}\right]_{x=-4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ : série alternada condicionalmente convergente

$\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{8^n\ln(n+2)}\right]_{x=0}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}\left[=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\geq\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\right]$ : divergente  <u>Resposta</u>: $[-4,0)$

**Prob. 17**

**a)** $\dfrac{x}{(1-x)^2} = x\,\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big) = x\,\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

**b)** $\dfrac{x^2}{(1-x)^3} = \dfrac{x^2}{2}\dfrac{d}{dx}(1-x)^{-2} = \dfrac{x^2}{2}\dfrac{d}{dx}\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big) = \dfrac{x^2}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{x^2}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$
$= \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n(n-1)}{2}x^n$

**c)** $\dfrac{x+1}{3x+2} = \dfrac{x+1}{2}\,\dfrac{1}{1-(-3x/2)} = \dfrac{x+1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{-3x}{2}\Big)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3)^n x^{n+1}}{2^{n+1}} + \Big\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3)^n x^n}{2^{n+1}}\Big\}$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^{n-1}x^n}{2^n} + \Big\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n x^n}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2}\Big\} = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[-\dfrac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^n} + \dfrac{(-1)^n 3^n}{2^{n+1}}\Big]x^n$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, onde $a_0 = \dfrac{1}{2}$ e $a_n\Big|_{n\geq 1} = -\dfrac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^n} + \dfrac{(-1)^n 3^n}{2^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^{n+1}}$

**Prob. 18**

**a)** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \dfrac{d}{dx}\Big(x\cdot\dfrac{1}{1-x}\Big) = \dfrac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

**b)** $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n = x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2} = x^2\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-1} = x^2\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$
$= x^2\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{x}{1-x}\Big) = x^2\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$

**c)** $h(x) = \sum\limits_{n=3}^{\infty}x^{2n+1} = x\cdot\sum\limits_{n=3}^{\infty}(x^2)^n = x\cdot\dfrac{(x^2)^3}{1-x^2} = \dfrac{x^7}{1-x^2}$

**d)** $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{2n+1} = x^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x^2)^{n-1} \overset{x^2=y}{=} x^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}ny^{n-1} = x^3\dfrac{d}{dy}\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^n = x^3\dfrac{d}{dy}\Big(\dfrac{1}{1-y}\Big)$
$= x^3\cdot\dfrac{1}{(1-y)^2} = \dfrac{x^3}{(1-x^2)^2}$

**Prob. 19**

**a)** $\displaystyle\int_0^x\frac{\cos t-1}{t}\,dt = \int_0^x\frac{1}{t}\Big[\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}^{\cos x} - 1\Big]dt = \int_0^x\frac{1}{t}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\Big]dt = \int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}\Big]dt$
$\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^x t^{2n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big[\frac{t^{2n}}{2n}\Big]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!\,2n}\quad [x\in\mathbb{R}]$

**b)** $\displaystyle\int_0^x\frac{\operatorname{sen} t^2}{t^2}\,dt = \int_0^x\frac{1}{t^2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big]dt = \int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{4n}}{(2n+1)!}\Big]dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{4n}dt$
$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\Big[\frac{t^{4n+1}}{4n+1}\Big]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n+1)!(4n+1)}\quad [x\in\mathbb{R}]$

**c)** $\displaystyle\int_0^x\ln[1+(5t)^3]\,dt = \int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[(5t)^3]^n}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^{3n}}{n}\int_0^x t^{3n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^{3n}x^{3n+1}}{n(3n+1)}$ .

Nesse caso, a máxima variação de $t$ é dada por $(5t)^3\in(-1,1]$, ou $t\in(-1/5,1/5]$; esse é o intervalo de integração máximo possível. Vemos então que $x$ pode variar no intervalo $(-1/5,1/5]$ .

**Prob. 20**

**a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{-2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2^{-2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\Big|_{x=2^{-2}} = \ln(1+x)\Big|_{x=1/4} = \ln\frac{5}{4}$ .

Obs.: $1/4\in(-1,1]$, que é o intervalo de convergência da série de MacLaurin de $\ln(1+x)$ que foi usada.

**b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = \Bigg[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\operatorname{sen} x} - x\Bigg]_{x=\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2}$

**c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_{x=1} \overset{(1)}{=} \arctan x\Bigg|_{x=1} = \frac{\pi}{4}$

$^{(1)}$De acordo com o resultado obtido no Exemplo (i) da seção 1.5, página 15 .

**Prob. 21**

$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)\,x + \dfrac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(15)}(0)}{15!}\,x^{15} + \cdots \;=\; \operatorname{sen} x^3 \;=\; x^3 - \dfrac{(x^3)^3}{3!} + \dfrac{(x^3)^5}{5!} - \cdots$

$\Rightarrow \quad \dfrac{f^{(15)}(0)}{15!} = \dfrac{1}{5!} \quad \Rightarrow \quad f^{(15)}(0) = \dfrac{15!}{5!}$ .

# Capítulo 2

# Resolução de equação diferencial ordinária linear por série de potências

Sabemos que a solução geral da EDO linear de 1ª ordem

$$y' - 2x\,y(x) = 0 \tag{2.1}$$

é

$$y(x) = c_1\,e^{x^2} = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ . \tag{2.2}$$

Isso sugere que também possamos resolver a EDO em (2.1) tentando uma série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \tag{2.3}$$

donde

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ . \tag{2.4}$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \ = \ y' - 2xy \ &= \ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \\ &= \ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} 2 a_{n-2} x^{n-1} \\ &= \ a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n a_n - 2 a_{n-2})\, x^{n-1} \ , \end{aligned}$$

uma equação que só pode ser válida para todos os valores de $x$ se os coeficientes das potências se anularem, isto é:

$$a_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad (n a_n - 2 a_{n-2})\big|_{\,n \geq 2} = 0 \ .$$

Desta segunda equação, deduzimos que

$$a_n = \frac{2}{n}\, a_{n-2} \quad \text{para} \ \ n \geq 2 \ .$$

Essa equação é chamada de <u>relação de recorrência</u>. Por meio dela, determinamos os coeficientes $a_n$.

Fazendo $n$ igual a naturais pares, obtemos

$$\begin{aligned}
n=2: \quad a_2 &= a_0 \\
n=4: \quad a_4 &= \frac{2}{4}\,a_2 = \frac{1}{2}\,a_0 \\
n=6: \quad a_6 &= \frac{2}{6}\,a_4 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,a_0 \\
n=8: \quad a_8 &= \frac{2}{8}\,a_6 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,a_0 \\
&\vdots \\
\therefore\ a_{2n} &= \frac{1}{n!}\,a_0 \quad (n\ge 0)\ .
\end{aligned}$$

Agora, com $n$ igual a ímpares, temos

$$\begin{aligned}
n=3: \quad a_3 &= \frac{2}{3}\,a_1 = 0 \\
n=5: \quad a_5 &= \frac{2}{5}\,a_3 = 0 \\
&\vdots \\
\therefore\ a_{2n+1} &= 0 \quad (n\ge 0)\ .
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo essas expressões dos coeficientes em (2.3), obtemos

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{n!}\,x^{2n}=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=a_0\,e^{x^2}\quad ,$$

que é a solução dada em (2.2), pois o coeficiente $a_0$ permanece como uma constante arbitrária.

Vejamos mais um exemplo. Considere a seguinte EDO e a sua solução geral (conhecida):

$$4y''+y(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \text{solução geral }\ y(x)=c_1\cos(x/2)+c_2\,\mathrm{sen}\,(x/2)\ . \tag{2.5}$$

Vamos recalcular essa solução geral pelo método das séries de potências(*). Os passos são os seguintes:

Passo 1 - Escrevemos a série de potências que se admite como solução e as derivadas dessas séries que serão usadas:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2}\end{aligned}\right.$$

Passo 2) Na EDO, substituímos $y, y'$ e $y''$ pelas respectivas séries para deduzir a relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
0 \ =\ 4y''+y \ &=\ 4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left[4n(n-1)a_n+a_{n-2}\right]x^{n-2}=0 \quad\Rightarrow\quad a_n=-\frac{a_{n-2}}{4n(n-1)}\quad (n\ge 2)
\end{aligned}$$

Passo 3) Usamos a relação de recorrência para calcular os coeficientes em termos dos coeficientes

(*)Estamos começando a estudar um poderoso método que servirá, naturalmente, para obter soluções de EDOs que não sabemos resolver analiticamente; mas os exemplos ora apresentados são educativos: ilustram o método e as manipulações matemáticas costumeiras.

que permanecem arbitrários ($a_0$ e $a_1$):

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{4\cdot 2\,(1)} \\
a_3 &= -\frac{a_1}{4\cdot 3\,(2)} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4\cdot 4\,(3)} = \frac{a_0}{4^2\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{a_0}{4!\,2^4} \\
a_5 &= -\frac{a_3}{4\cdot 5\,(4)} = \frac{a_1}{4^2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{2a_1}{5!\,2^5} \\
a_6 &= -\frac{a_4}{4\cdot 6\,(5)} = -\frac{a_0}{4^3\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = -\frac{a_0}{6!\,2^6} \\
a_7 &= -\frac{a_5}{4\cdot 7\,(6)} = -\frac{a_1}{4^3\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = -\frac{2a_1}{7!\,2^7} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Passo 4) Deduzimos uma expressão genérica para os coeficientes em termos de $a_0$ e $a_1$. Do passo 3, concluímos que,

$$\text{para } n\geq 0: \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!\,2^{2n}} \qquad \text{e} \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2a_1}{(2n+1)!\,2^{2n+1}} \ .$$

Passo 5) Substituímos a expressão genérica dos coeficientes na série de $y(x)$ para deduzir uma expressão fechada para a solução:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\,x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\,x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!\,2^{2n}}\,x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a_1}{(2n+1)!\,2^{2n+1}}\,x^{2n+1} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n} + \underbrace{2a_1}_{\equiv a_1'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n+1} = a_0\,\cos\frac{x}{2} + a_1'\,\operatorname{sen}\frac{x}{2} \ ,
\end{aligned}
$$

que é a solução geral apresentada em (2.5).

Ressalte-se que o passo 4 é frequentemente difícil, e o passo 5 é raramente possível. Por isso, nas resoluções por série de potências que seguem, não nos preocuparemos, ordinariamente, com a implementação do passo 4 (o que seria até elegante, mas este passo, embora de certa importância, está fora dos nossos propósitos aqui, que é o entendimento do método) e do passo 5.

## 2.1 Resolução em torno de um ponto ordinário

### 2.1.1 Definições

a) Uma função $f(x)$ é dita analítica no ponto $x = x_0$ se ela pode ser desenvolvida numa série de Taylor relativa a esse ponto que tenha raio de convergência positivo.

b) Considere a EDO linear de 2ª ordem

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y(x) = 0 \ , \tag{2.6}$$

que pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y(x) = 0 \ , \tag{2.7}$$

com $p(x) \equiv B(x)/A(x)$ e $q(x) \equiv C(x)/A(x)$. Dizemos que $x = x_0$ é um ponto ordinário, ou não-singular, dessa EDO se, nesse ponto, $p(x)$ e $q(x)$ ou suas extensões contínuas(*) são funções

(*) *Recordação*:
Uma função $f(x)$ definida num ponto $x = x_0$ é dita contínua nesse ponto se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

A extensão contínua de uma função $f(x)$ num ponto $x = x_0$ em que ela não é definida, mas tem limite finito, é a função $g(x)$ que é igual a $f(x)$ se $x \neq x_0$ e, naquele ponto, é dada por $g(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Por exemplo, a extensão contínua da função $(\operatorname{sen} x)/x$ em $x = 0$ é a função $g(x)$ igual a $(\operatorname{sen} x)/x$ se $x \neq 0$ e com $g(0) = \lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$.

analíticas. Um ponto que não é ordinário é dito um ponto singular, ou uma singularidade, da EDO.

Exemplos:

i) $y'' + (\ln x)\,y(x) = 0$ : $x = 0$ é ponto singular, pois $f(x) = \ln x$ não é analítica nesse ponto (não existindo $f(0), f'(0)$, etc, $f(x)$ não pode ser desenvolvida numa série de Taylor em torno de $x = 0$).

ii) $y'' + (x-1)^{5/3}y' + y = 0$ : $x = 1$ é ponto singular, pois $(x-1)^{5/3}$ não pode ser expandida em potências de $(x-1)$ [a segunda derivada de $(x-1)^{5/3}$, igual a $(10/9)(x-1)^{-1/3}$, é infinita em $x = 1$].

iii) $xy'' + (\operatorname{sen} x)\,y' + (1-\cos x)\,y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{q(x)} y(x) = 0.$

Essa EDO não tem ponto singular, isto é, todos pontos de $\mathbb{R}$ são ordinários, inclusive $x = 0$. De fato, como

$$\frac{1}{x}\operatorname{sen} x = \frac{1}{x}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\Big) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

e

$$\frac{1}{x}(1-\cos x) = \frac{1}{x}\Big(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots\Big) = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \frac{x^7}{8!} + \cdots$$

são as séries de Taylor relativa a $x = 0$ das extensões contínuas de $p(x)$ e $q(x)$ nesse ponto, a analiticidade em $x = 0$ está verificada.

iv) $(x^2+1)y'' + xy' - y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \dfrac{x}{x^2+1}\,y' - \dfrac{1}{x^2+1}\,y(x) = 0$ .

Os pontos singulares dessa EDO são as raízes de $x^2 + 1 = 0$, a saber, $x = \pm\mathrm{i}$, nos quais $x/(x^2+1)$ e $1/(x^2+1)$ não admitem extensão contínua, pois apresentam limites infinitos nesses pontos. Esse exemplo ilustra que pontos singulares não são necessariamente reais.

Percebe-se que a caracterização de pontos ordinários e singulares com base no conceito de analiticidade pode complicar, às vezes, a determinação deles. Ora, o conceito de função analítica é pormenorizadamente estudado num curso de funções complexas, e é exatamente a falta desse estudo que nos traz dificuldades aqui. Mas não precisamos de muita teoria para prosseguir, uma vez que estaremos, na maioria das vezes, preocupados apenas com EDOs cujos coeficientes são polinômios. Nesse caso, fornecemos a seguinte receita:

A EDO (2.6) – no caso em que $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ são polinômios sem fator comum – tem, em $x = x_0$ (real ou imaginário), um ponto
- *ordinário* se $A(x_0) \neq 0$
- *singular* se $A(x_0) = 0$

Por exemplo:

i) $(x^2-1)y'' + 2xy' + 6y(x) = 0$ : os pontos singulares são as raízes de $x^2 - 1 = 0$, isto é, $x = \pm 1$. Todos os outros pontos são ordinários.

ii) $(x-1)^2y'' + (x^2-1)y' + (x-1)^2y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)y'' + (x+1)y' + (x-1)y(x) = 0$ : ponto singular em $x = 1$.

iii) $(x-1)y'' + (x^2-1)y' + (x-1)^2y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + (x+1)y' + (x-1)y(x) = 0$ : não tem ponto singular (todos pontos de $\mathbb{R}$ são ordinários).

iv) $x^2y'' + x^2y' + x(x-1)y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad xy'' + xy' + (x-1)y(x) = 0$ : ponto singular em $x = 0$.

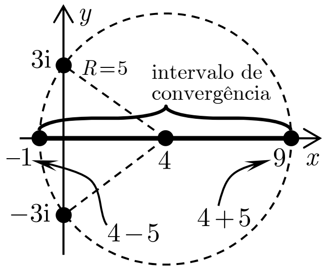
v) $(x^2+1)y'' + y(x) = 0$ : pontos singulares em $x = \pm\mathrm{i}$ .

### 2.1.2 Teorema da existência de soluções em série de potências

Se $x = x_0$ for um ponto ordinário da EDO (2.6), podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma da série de potências $\sum_n^\infty a_n(x-x_0)^n$, convergindo cada série, pelo menos, no intervalo $(x_0 - R,\, x_0 + R)$, em que $R$ é a distância do ponto $x_0$ ao ponto singular (real ou não) mais próximo.

Por exemplo, a solução da EDO $(x-1)y'' + xy' + y = 0$ na forma $\sum_n^\infty a_n(x-4)^n$, isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário $x = 4$, é convergente para $(4-3,\, 4+3) = (1, 7)$, pois, nesse caso, a distância $R$ do ponto $x = 4$ ao ponto singular mais próximo, que é o ponto $x = 1$, é $R = |4-1| = 3$.

Outro exemplo: a solução da EDO $(x^2+9)y'' + xy' + y = 0$ na forma $\sum_n^\infty a_n(x-4)^n$, isto é, na forma de uma série de potências em torno do ponto ordinário $x = 4$, é convergente para $(4-5,\, 4+5) = (-1, 9)$, pois, nesse caso, a distância $R$ do ponto $x = 4$ (do eixo das abscissas, que também é o ponto $z_1 = 4$ do plano complexo) ao ponto singular mais próximo, que são os pontos $z_2^{\pm} = \pm 3\mathrm{i}$ do plano complexo, é $R = |z_1 - z_2^{\pm}| = |4 - 3\mathrm{i}| = |4 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5^{(*)}$. A figura à direita mostra que o intervalo $(-1, 9)$ é a parte do eixo real que jaz no interior da circunferência de raio $R = 5$ centrada no ponto $x = 4$ desse eixo.




### 2.1.3 Exemplos de resolução de EDOs lineares por séries de potências em torno de ponto ordinário

> *Nota:* Aqui, por questão de simplicidade, supomos que a origem $x = 0$ seja sempre o ponto ordinário em torno do qual se deseja obter a solução da EDO na forma de uma série de potências, $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ no caso. Isso não significa perda de generalidade, pois, mediante a mudança para a variável $t = x - x_0$, sempre podemos transformar uma EDO com ponto ordinário em $x = x_0$ noutra com ponto ordinário em $t = 0$.

<u>Exemplo 1</u>: $y'' - 2xy = 0$

Como não há pontos singulares, a solução em série obtida abaixo é convergente para todo $x$ real.

$$0 = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^\infty 2a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=3}^\infty 2a_{n-3}x^{n-2} = \underbrace{2a_2}_{0} + \sum_{n=3}^\infty \underbrace{[n(n-1)a_n - 2a_{n-3}]}_{0}\, x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = 0 \quad \text{e} \quad a_n\Big|_{n\geq 3} = \frac{2a_{n-3}}{n(n-1)}$$

Como $a_2 = 0$, temos que $a_5 = a_8 = \cdots = a_{3k+2}\Big|_{k\geq 0} = 0$.

O coeficiente $a_0$ permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes $a_{3k}\Big|_{k\geq 1}$:

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{2a_0}{(3)(2)} = \frac{a_0}{3}\\
a_6 &= \frac{2a_3}{(6)(5)} = \frac{1}{15}\frac{a_0}{3} = \frac{a_0}{45}\\
a_9 &= \frac{2a_6}{(9)(8)} = \frac{1}{36}\frac{a_0}{45} = \frac{a_0}{1620}\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

---

(*) Recorde-se de que a distância entre dois pontos $z_1$ e $z_2$ do plano complexo é dada por $|z_1 - z_2|$, e que o módulo de um número complexo $z = a + b\mathrm{i}$ é $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Por exemplo, a distância entre os pontos $6 + 13\mathrm{i}$ e $1 + \mathrm{i}$ é $|6 + 13\mathrm{i} - (1+\mathrm{i})| = |5 + 12\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$.

O coeficiente $a_1$ também permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes $a_{3k+1}\Big|_{k\geq 1}$:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{2a_1}{(4)(3)} = \frac{a_1}{6} \\ a_7 &= \frac{2a_4}{(7)(6)} = \frac{1}{21}\frac{a_6}{6} = \frac{a_1}{126} \\ a_{10} &= \frac{2a_7}{(10)(9)} = \frac{1}{45}\frac{a_1}{126} = \frac{a_1}{5670} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + \\ &\underbrace{a_2}_{0} x^2 + \underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{3}} x^3 + \underbrace{a_4}_{\frac{a_1}{6}} x^4 + \underbrace{a_5}_{0} x^5 + \underbrace{a_6}_{\frac{a_0}{45}} x^6 + \underbrace{a_7}_{\frac{a_1}{126}} x^7 + \underbrace{a_8}_{0} x^8 + \underbrace{a_9}_{\frac{a_0}{1620}} x^9 + \underbrace{a_{10}}_{\frac{a_1}{5670}} x^{10} + \cdots \\ &= a_0\Big(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{45} + \frac{x^9}{1620} + \cdots\Big) + a_1\Big(x + \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{126} + \frac{x^{10}}{5670} + \cdots\Big) \end{aligned}$$

é a solução desejada, sendo as séries entre parênteses duas soluções linearmente independentes da EDO.

Exemplo 2: $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$

Os pontos singulares são $x = \pm\mathrm{i}$. A distância entre esses pontos e o ponto de expansão $x = 0$ é $R = |0 \pm \mathrm{i}| = |\mathrm{i}| = 1$. Logo, a solução em série obtida abaixo é convergente para $x \in (0-R, 0+R) = (-1,1)$.

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} \\ &= \underbrace{2a_2 + 6a_3 x + \cancel{a_1 x} - a_0 - \cancel{a_1 x}}_{2a_2 - a_0\, +\, 6a_3 x} + \sum_{n=4}^{\infty}\Big\{n(n-1)a_n + \underbrace{\big[(n-2)(n-3) + n - 2 - 1\big]}_{(n-1)(n-3)} a_{n-2}\Big\}x^{n-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2a_2 - a_0 = 0\,, \quad a_3 = 0 \quad \text{e} \quad a_n\Big|_{n\geq 4} = -\frac{(n-3)\,a_{n-2}}{n}$$

O coeficiente $a_0$ permanece arbitrário, dele dependendo os coeficientes $a_{2k}\Big|_{k\geq 1}$:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4} = -\frac{a_0/2}{4} = -\frac{a_0}{8} \\ a_6 &= -\frac{3a_4}{6} = -\frac{-a_0/8}{2} = \frac{a_0}{16} \\ &\vdots \end{aligned}$$

O coeficiente $a_1$ também permanece arbitrário, e, como $a_3 = 0$, vemos, pela relação de recorrência, que $a_5 = a_7 = a_9 = \cdots = 0$. Logo,

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{2}} x^2 + \underbrace{a_3}_{0} x^3 + \underbrace{a_4}_{-\frac{a_0}{8}} x^4 + \underbrace{a_5}_{0} x^5 + \underbrace{a_6}_{\frac{a_0}{16}} x^6 + \underbrace{a_7}_{0} x^7 + \cdots$$

$$= a_1 x \;+\; a_0\Big(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}+\cdots\Big)\;.$$

Exemplo 3: $\quad y''-(1+x)y=0$

Não existem pontos singulares, convergindo, para todo $x$ real, a série que se obtém a seguir.

$$0=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}-\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-3}x^{n-2}$$

$$=2a_2-a_0+\sum_{n=3}^{\infty}\big[n(n-1)a_n-a_{n-2}-a_{n-3}\big]x^{n-2}\quad,$$

donde $a_2=a_0/2$ e

$$a_n\Big|_{n\geq 3}=\frac{a_{n-3}+a_{n-2}}{n(n-1)}$$

é a relação de recorrência. Como $a_0$ e $a_1$ permanecem arbitrários, em termos deles escrevemos todos os demais coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{a_0}{2}\\
a_3 &= \frac{a_0+a_1}{6}\\
a_4 &= \frac{a_1+a_2}{12}=\frac{1}{12}\Big(a_1+\frac{a_0}{2}\Big)=\frac{a_0}{24}+\frac{a_1}{12}\\
a_5 &= \frac{a_2+a_3}{20}=\frac{1}{20}\Big(\frac{a_0}{2}+\frac{a_0+a_1}{6}\Big)=\frac{a_0}{30}+\frac{a_1}{120}\\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0+a_1x+\underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{2}}x^2+\underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{6}+\frac{a_1}{6}}x^3+\underbrace{a_4}_{\frac{a_0}{24}+\frac{a_1}{12}}x^4+\underbrace{a_5}_{\frac{a_0}{30}+\frac{a_1}{120}}x^5+\cdots\\
&= a_0\Big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{30}+\cdots\Big)+a_1\Big(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{120}+\cdots\Big)\;.
\end{aligned}$$

### 2.1.4 Problema de valor inicial (PVI)

Considere os dois PVIs seguintes, formados com a EDO já resolvida no Exemplo 1 acima e diferindo apenas quanto ao ponto do domínio no qual as condições iniciais são definidas:

- $y''-2xy=0\,,\ y(0)=-2\,,\ y'(0)=5$
- $y''-2xy=0\,,\ y(3)=-2\,,\ y'(3)=5$

Como já temos a solução geral da EDO, dada por

$$y(x)=\;a_0\Big(1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{45}+\frac{x^9}{1620}+\cdots\Big)+\;a_1\Big(x+\frac{x^4}{6}+\frac{x^7}{126}+\frac{x^{10}}{5670}+\cdots\Big)\quad,$$

falta, para completar a resolução dos PVIs, determinar as constantes $a_0$ e $a_1$ a partir das condições iniciais, o que exigirá a expressão da derivada de $y(x)$:

$$y'(x)=\;a_0\Big(x^2+\frac{6x^5}{45}+\frac{9x^8}{1620}+\cdots\Big)+\;a_1\Big(1+\frac{4x^3}{6}+\frac{7x^6}{126}+\frac{10x^9}{5670}+\cdots\Big)\quad.$$

No caso do primeiro PVI, as condições iniciais fornecem diretamente $y(0) = a_0 = -2$ e $y'(0) = a_1 = 5$. Mas, no segundo PVI, temos complicações: as condições iniciais fornecem

$$y(3) \;=\; a_0\underbrace{\Big(1 + \frac{3^3}{3} + \frac{3^6}{45} + \frac{3^9}{1620} + \cdots\Big)}_{S_1} + a_1\underbrace{\Big(3 + \frac{3^4}{6} + \frac{3^7}{126} + \frac{3^{10}}{5670} + \cdots\Big)}_{S_2} \;=\; -2$$

e

$$y'(3) \;=\; a_0\underbrace{\Big(3^2 + \frac{6\cdot 3^5}{45} + \frac{9\cdot 3^8}{1620} + \cdots\Big)}_{S_3} + a_1\underbrace{\Big(1 + \frac{4\cdot 3^3}{6} + \frac{7\cdot 3^6}{126} + \frac{10\cdot 3^9}{5670} + \cdots\Big)}_{S_4} = 5 \;.$$

Essas duas equações formam um sistema algébrico com as duas incógnitas $a_0$ e $a_1$, o qual, para ser resolvido, é necessário, antes, executar a difícil tarefar de calcular as somas $S_1$, $S_2$, $S_3$ e $S_4$.

Vê-se, assim, que a determinação das constantes arbitrárias na solução geral $y(x)$ torna-se complicada quando $y(x)$ não é uma série centrada no mesmo ponto do domínio no qual são definidas as condições iniciais. Assim, concluímos o seguinte:

Ao se revolver por série o problema de valor inicial formado por uma EDO $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y(x) = 0$ e condições iniciais dadas pelos valores conhecidos de $y(x_0)$ e $y'(x_0)$, se $x_0$ for um ponto ordinário da EDO, é vantagem obter a solução geral como uma série centrada nesse ponto, isto é, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, pois as constantes arbitrárias $a_0$ e $a_1$ podem ser determinadas com simplicidade, sendo iguais a $y(x_0)$ e $y'(x_0)$, respectivamente. De fato; observe:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad\Rightarrow\quad y(x_0) = a_0 \;, \\ y'(x) &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1} \quad\Rightarrow\quad y'(x_0) = a_1 \;. \end{aligned}$$

Vamos, então, resolver o segundo PVI acima. Segundo a conclusão acima, convém primeiramente obter a solução como uma série centrada em $x = 3$. Isso será menos trabalhoso se fizermos a mudança de variável $t = x - 3$. As transformações correspondentes das derivadas de $y$ são obtidas pela regra da cadeia:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{1} = \frac{dy}{dt} = y'(t) \quad \text{e, portanto,} \quad y''(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d}{dt}\underbrace{\Big(\frac{dy}{dx}\Big)}_{y'(t)}\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{1} = y''(t)\;.$$

Com esses resultados, e tendo em conta que $y(x) = y(x(t)) = y(t)^{(*)}$, a EDO $y'' - 2x\,y(x) = 0$ toma a forma $y'' - 2(t-3)y(t) = 0$. Substituindo nessa equação a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (lembrando que uma série centrada em $t = 0$ equivale à série desejada, centrada em $x = 3$), obtemos

$$0 \;=\; y'' - 2(t-3)y \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2(t-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3}t^{n-2} + 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}t^{n-2}$$

$$= \underbrace{2a_2 + 6a_0}_{0} + \sum_{n=3}^{\infty}\underbrace{\big[n(n-1)a_n - 2a_{n-3} + 6a_{n-2}\big]}_{0}t^{n-2} \quad\Rightarrow\quad a_2 = -3a_0 \;\text{ e }\; a_n\Big|_{n\geq 3} = \frac{2a_{n-3} - 6a_{n-2}}{n(n-1)} \;.$$

$$\begin{aligned} \therefore\; a_2 &= -3a_0 \\ a_3 &= \frac{2a_0 - 6a_1}{3(2)} = \frac{a_0}{3} - a_1 \\ a_4 &= \frac{2a_1 - 6a_2}{4(3)} = \frac{a_1}{6} - \frac{6(-3a_0)}{12} = \frac{3a_0}{2} + \frac{a_1}{6} \\ a_5 &= \frac{2a_2 - 6a_3}{5(4)} = \frac{2}{20}(-3a_0) - \frac{6}{20}\Big(\frac{a_0}{3} - a_1\Big) = \Big(-\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\Big)a_0 + \frac{6}{20}a_1 = -\frac{2a_0}{5} + \frac{3a_1}{10} \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

(*) na notação empregada, $y(t)$ designa a função composta $y(x(t))$

$$\therefore\ y(t) = a_0 + a_1 t + \underbrace{a_2}_{-3a_0} t^2 + \underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{3}-a_1} t^3 + \underbrace{a_4}_{\frac{3a_0}{2}+\frac{a_1}{6}} t^4 + \underbrace{a_5}_{-\frac{2a_0}{5}+\frac{3a_1}{10}} t^5 + \cdots$$

$$= a_0\Big(1 - 3t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{3t^4}{2} - \frac{2t^5}{5} + \cdots\Big) + a_1\Big(t - t^3 + \frac{t^4}{6} + \frac{3t^5}{10} + \cdots\Big)\ .$$

Com a substituição de $t = x - 3$ , $a_0 = -2$ e $a_1 = 5$, obtemos, finalmente, a solução do segundo PVI:

$$\begin{aligned} y(x) &= -2\left[1 - 3(x-3)^2 + \frac{(x-3)^3}{3} + \frac{3(x-3)^4}{2} - \frac{2(x-3)^5}{5} + \cdots\right] \\ &\quad +5\left[(x-3) - (x-3)^3 + \frac{(x-3)^4}{6} + \frac{3(x-3)^5}{10} + \cdots\right]\ . \end{aligned}$$

## 2.2 Resolução em torno de ponto singular

### 2.2.1 Definições

Os pontos singulares, já definidos na seção 2.1.1, são, por sua vez, classificados em regulares e irregulares como segue.

Dizemos que um ponto singular da EDO (2.6) é um ponto singular regular (ou uma singularidade regular) se, ao reescrevermos essa EDO na forma dada por (2.7), constatamos que $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2 q(x)$ ou suas extensões contínuas são funções analíticas em $x_0$.

O ponto singular que não é regular é chamado de ponto singular irregular (ou singularidade irregular).

Novamente, para evitar a análise de analiticidade de funções, fornece-se a seguinte receita, válida no caso de EDO cujos coeficientes são polinômios:

> Considere (2.6) com coeficientes polinomiais, e escreva essa EDO como em (2.7), mas com $p(x)$ e $q(x)$ na forma de um quociente irredutível de polinômios completamente fatorados em monômios. Se o fator $(x - x_0)$ aparece nos denominadores de $p(x)$ e $q(x)$ com multiplicidades $m_p$ e $m_q$, respectivamente, então $x = x_0$ é um ponto singular
> - *regular* se $m_p \le 1$ e $m_q \le 2$
> - *irregular* se $m_p > 1$ ou $m_q > 2$

Assim, por exemplo:

i) Os pontos $x = 1$ e $x = \pm 2$ são pontos singulares da EDO $(x-1)(x^2-4)^2 y'' + (x-1)(x-2)y' + y = 0$ (sem fator comum nos coeficientes polinomiais). Reescrevendo essa equação na forma

$$y'' + \frac{1}{(x+2)^2(x-2)}\, y' + \frac{1}{(x-1)(x+2)^2(x-2)^2}\, y = 0\ ,$$

verificamos, de acordo com a receita acima, que $x = -2$ é um ponto singular *irregular*; já $x = 1$ e $x = 2$ são pontos singulares *regulares*.

ii) A EDO $x^2(x+1)^2 y'' + (x^2-1)y' + 2y(x) = 0$, ou

$$y'' + \frac{x-1}{x^2(x+1)}\, y' + \frac{2}{x^2(x+1)^2}\, y = 0\ ,$$

tem, em $x = 0$, um ponto singular *irregular* e, em $x = -1$, um ponto singular *regular*.

iii) $\underbrace{(1-x^2)}_{(x+1)(x-1)} y'' - 2xy' + 30y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$ são pontos singulares *regulares*.

iv) $x^3 y'' - 2xy' + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - \dfrac{2}{x^2}\, y' + \dfrac{5}{x^3}\, y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ é ponto singular *irregular*.

v) $8xy'' - 2x^2 y' + 5xy = 0$, ou (cancelando o fator comum $x$) $8y'' - 2xy' + 5y = 0 \quad \Rightarrow$ a EDO não tem ponto singular (somente pontos ordinários).

vi) $(x^2+9)y'' - 3xy' + (1-x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - \dfrac{3xy}{(x-3\mathrm{i})(x+3\mathrm{i})}\,y' + \dfrac{1-x}{(x-3\mathrm{i})(x+3\mathrm{i})}\,y = 0 \quad \Rightarrow$ $x = \pm 3\mathrm{i}$ são pontos singulares *regulares*.

A seguir estudamos o chamado método de Frobenius, usado para se obter solução em série de EDO linear em torno de ponto singular regular. Antes de explicar esse método, convém apresentar dois fatos que motivam esse método:

- $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln x$ são soluções de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ para $x \in (0,\infty)$. Essa EDO tem um ponto singular regular em $x=0$, em torno do qual, se intentássemos uma série de potências $\sum a_n x^n$ como solução, só obteríamos $y_1 = x^2$, pois o fator $\ln x$ na solução $y_2$ não tem série de Taylor em torno de $x=0$.

- A EDO $6x^2y'' + 5xy' + (x^2-1)y = 0$ tem um ponto singular regular em $x=0$, mas não possui solução alguma em série de potências em torno desse ponto. Pelo método de Frobenius, podemos obter duas soluções em série com as formas $y_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2}$ e $y_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1/3}$.

### 2.2.2 O Método de Frobenius – Parte 1

Considere o problema de resolver a EDO (2.6), isto é,

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \ ,$$

em torno de um *ponto singular regular* $x = x_0$. Aqui, pela mesma razão dada no início da seção 2.1.3, supomos, por simplicidade, mas sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$. Pelo chamado método de Frobenius, é sempre possível encontrar uma solução na forma da série (relativa a $x_0 = 0$)

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots \ , \ \text{com} \ \ a_0 \neq 0 \ . \qquad (2.8)$$

Não permitindo que $a_0$ se anule, impomos que esse coeficiente seja o primeiro da série. Faz parte da resolução determinar:

1. Os valores de $r$ para os quais a EDO tem solução na forma da série em (2.8). Esses valores surgem da resolução de uma equação algébrica do 2º grau (do 3º grau se a EDO fosse de 3ª ordem e assim por diante), denominada equação indicial, cujas soluções $r_1$ e $r_2$ são as chamadas raízes indiciais.

2. A relação de recorrência para os coeficientes $a_n$.

3. O intervalo de convergência da solução em série obtida.

Os detalhes do método(*) serão apresentados através de exemplos, nos quais $x=0$ é o ponto singular regular em torno do qual se deseja a solução. Conforme as raízes indiciais, três casos importantes devem ser considerados:

#### 2.2.2.1 Caso de raízes indiciais que não diferem por um inteiro: $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

Neste caso, o método de Frobenius sempre fornece duas soluções linearmente independentes.

Exemplo 1: $3xy'' + y' - y = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}$$

$$3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

(*)Consulte as seções 4.3 a 4.6 da referência [4]

$$(3r-2)ra_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{\big[3(n+r-1)(n+r)+(n+r)\big]}_{(3n+3r-2)(n+r)}a_n-a_{n-1}\Big\}x^{n+r-1}=0$$

$$\underbrace{r(3r-2)}_{0}a_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\big[(3n+3r-2)(n+r)a_n-a_{n-1}\big]}_{0}x^{n+r-1}=0$$

$$\therefore\ \begin{cases} r(3r-2)=0\ \ (\underline{\text{equação indicial}}) \quad\Rightarrow\quad r=0\ \text{ ou }\ 2/3\ \ (\underline{\text{raízes indiciais}}) \\ \\ (3n+3r-2)(n+r)a_n-a_{n-1}=0\ \ (\underline{\text{relação de recorrência dependente da raiz indicial}}) \end{cases}$$

As relações de recorrência específicas para cada raiz indicial são dadas por

$$\left.\begin{cases} r=0 \quad\Rightarrow\quad a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n(3n-2)} \\ \text{ou} \\ r=\dfrac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n(3n+2)} \end{cases}\right|_{n\geq 1}$$

A essas duas relações de recorrência correspondem duas séries distintas, nas quais $a_0$ permanece arbitrário:

<u>A série correspondente a $r=0$:</u>

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{(1)(1)}=a_0 \\ a_2 &= \frac{a_1}{(2)(4)}=\frac{a_0}{8} \\ a_3 &= \frac{a_2}{(3)(7)}=\frac{a_0/8}{21}=\frac{a_0}{168} \\ a_4 &= \frac{a_3}{(4)(10)}=\frac{a_0/168}{40}=\frac{a_0}{6720} \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$$\therefore\ y_1(x)\ =\ x^0(a_0+\underbrace{a_1}_{a_0}x+\underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{8}}x^2+\underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{168}}x^3+\underbrace{a_4}_{\frac{a_0}{6720}}x^4+\cdots)\ =\ a_0\Big(1+x+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{168}+\frac{x^4}{6720}+\cdots\Big)\ .$$

<u>A série correspondente a $r=2/3$:</u>

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{(1)(5)}=\frac{a_0}{5} \\ a_2 &= \frac{a_1}{(2)(8)}=\frac{a_0/5}{16}=\frac{a_0}{80} \\ a_3 &= \frac{a_2}{(3)(11)}=\frac{a_0/80}{33}=\frac{a_0}{2640} \\ a_4 &= \frac{a_3}{(4)(14)}=\frac{a_0/2640}{56}=\frac{a_0}{147840} \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ y_2(x) &= x^{2/3}(a_0+\underbrace{a_1}_{\frac{a_0}{5}}x+\underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{80}}x^2+\underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{2640}}x^3+\underbrace{a_4}_{\frac{a_0}{147840}}x^4+\cdots) \\ &= a_0x^{2/3}\Big(1+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{80}+\frac{x^3}{2640}+\frac{x^4}{147840}+\cdots\Big)\ . \end{aligned}$$

Assim, obtemos duas soluções, cuja combinação linear é a solução geral: $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ (considerando o $a_0$ que multiplica cada uma delas como sendo duas constantes arbitrárias independentes).

#### 2.2.2.2 Caso de raízes indiciais iguais

Neste caso só se consegue uma única solução na forma da série em (2.8), na qual $r$ é igual ao único valor da raiz indicial.

Exemplo 2: $xy'' + y' - 4y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$[(r-1)r+r]a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\big[\underbrace{(n+r-1)(n+r)+(n+r)}_{(n+r)^2}\big]a_n - 4a_{n-1}\Big\}x^{n+r-1} = 0$$

$$\underbrace{r^2}_{0}a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[(n+r)^2 a_n - 4a_{n-1}\right]}_{0}x^{n+r-1} = 0 \ .$$

Vemos que $r=0$ é o único valor da raiz indicial e que

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{(r+n)^2} \quad \text{para} \quad n \geq 1 \ . \tag{2.9}$$

Essa equação, com $r=0$, torna-se $a_n = 4a_{n-1}/n^2 \ \ (n \geq 1)$, donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4a_0}{1^2} \\
a_2 &= \frac{4a_1}{2^2} = \frac{4^2 a_0}{(1\cdot 2)^2} \\
a_3 &= \frac{4a_2}{3^2} = \frac{4^3 a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{4^n a_0}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

Logo, temos a única solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}\Bigg|_{r=0} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(n!)^2}x^n = a_0\Big(1+4x+4x^2+\frac{16}{9}x^3+\cdots\Big) \ . \tag{2.10}$$

#### 2.2.2.3 Caso de raízes indiciais que diferem por um inteiro positivo: $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}^*$

Nesse caso, a série em (2.8),

1. Com $r_1$ (a maior raiz indicial), sempre fornece uma única solução.
2. Com $r = r_2$ (a menor raiz indicial), leva a uma das duas ocorrências:
   (a) Ela não fornece nenhuma solução.
   (b) Ela fornece a solução geral (permanecendo arbitrários dois coeficientes), que inclui, portanto, a solução correspondente à maior raiz ($r_1$).

Disso concluímos que convém tentar obter primeiramente a solução correspondente à menor raiz indicial, pois, ocorrendo 2(b), a resolução estará concluída.

Exemplo 3 — ocorrência de 2(a): $xy'' + 3y' - y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

$$\underbrace{[(r-1)r+3r]}_{r(r+2)}a_0 x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{[(n+r-1)(n+r)+3(n+r)]}_{(n+r+2)(n+r)}a_n-a_{n-1}\Big\}x^{n+r-1}=0$$

$$\underbrace{r(r+2)}_{0}a_0 x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\big[(n+r+2)(n+r)a_n-a_{n-1}\big]}_{0}x^{n+r-1}=0$$

Vemos que $r=-2$ e $r=0$ são as raízes indiciais; além disso, a relação de recorrência dependente de $r$ é dada por

$$(n+r+2)(n+r)a_n-a_{n-1}=0 \quad (n\geq 1)\ . \tag{2.11}$$

Se $r=-2$:

A relação de recorrência específica para $r=-2$,

$$n(n-2)a_n=a_{n-1} \quad (n\geq 1)\ ,$$

fornece

- com $n=1$ : $\quad 1(-1)a_1=a_0 \quad \Rightarrow \quad a_1=-a_0$
- com $n=2$ : $\quad 2(0)a_2=a_1 \quad \Rightarrow \quad 0=a_1=-a_0$

Mas $a_0=0$ é contrário à nossa hipótese estipulada em (2.8). Logo, não existe série associada à raiz indicial $r=-2$. Passemos, então, ao cálculo da única solução linearmente independente associada à maior raiz indicial, que, conforme o item 1 acima, sempre existe:

Se $r=0$:

A relação de recorrência específica para $r=0$,

$$(n+2)na_n-a_{n-1}=0 \quad \Rightarrow \quad a_n=\frac{a_{n-1}}{n(n+2)} \quad (n\geq 1)\ ,$$

fornece

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_0}{(3)(1)}=\frac{a_0}{3}\\
a_2 &= \frac{a_1}{(4)(2)}=\frac{a_0/3}{8}=\frac{a_0}{24}\\
a_3 &= \frac{a_2}{(5)(3)}=\frac{a_0/24}{15}=\frac{a_0}{360}\\
a_4 &= \frac{a_3}{(6)(4)}=\frac{a_0/360}{24}=\frac{a_0}{8640}\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Temos, portanto, a única solução linearmente independente:

$$y(x)\ =\ x^0(a_0+\underbrace{a_1}_{\frac{a_0}{3}}x+\underbrace{a_2}_{\frac{a_0}{24}}x^2+\underbrace{a_3}_{\frac{a_0}{360}}x^3+\underbrace{a_4}_{\frac{a_0}{8640}}x^4+\cdots)\ =\ a_0\Big(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{360}+\frac{x^4}{8640}+\cdots\Big). \tag{2.12}$$

Exemplo 4 — ocorrência de 2(b): $\quad x^2y''+(x^2+x)y'-y=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

$$\underbrace{\big[(r-1)r+r-1\big]}_{(r-1)(r+1)\,=\,r^2-1} a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{\big[(n+r-1)(n+r)+n+r-1\big]}_{(n+r-1)(n+r+1)} a_n + (n+r-1)a_{n-1}\Big\}x^{n+r} = 0$$

$$\underbrace{(r^2-1)}_{0} a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\Big\{(n+r-1)(n+r+1)a_n + (n+r-1)a_{n-1}\Big\}}_{0} x^{n+r} = 0$$

donde obtemos as raízes indiciais $r = r_1 = 1$ e $r = r_2 = -1$ e também que

$$(n+r-1)\big[(n+r+1)a_n + a_{n-1}\big] = 0 \quad , \quad \text{para } \ n \geq 1 \ .$$

Se $r = -1$:

A relação de recorrência é $(n-2)[na_n + a_{n-1}] = 0$ $(n \geq 1)$, donde:

- Com $n = 1$, obtemos $-[a_1 + a_0] = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_0$ .

- Com $n = 2$, obtemos 0=0, significando que $a_2$ permanece arbitrário.

- Para $n \geq 3$, temos que $a_n = -a_{n-1}/n$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{a_2}{3} = -\frac{2a_2}{2\cdot 3}\\
a_4 &= -\frac{a_3}{4} = \frac{a_2}{3\cdot 4} = \frac{2a_2}{2\cdot 3\cdot 4}\\
a_5 &= -\frac{a_4}{5} = -\frac{2a_2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\\
&\ \ \vdots\\
a_n &= \frac{(-1)^n 2a_2}{n!}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\Big|_{r=-1} = a_0 x^{-1} + \underbrace{a_1}_{-a_0} + a_2 x + \underbrace{a_3}_{-\frac{2a_2}{3!}} x^2 + \underbrace{a_4}_{\frac{2a_2}{4!}} x^3 + \underbrace{a_5}_{-\frac{2a_2}{5!}} x^4 + \cdots\\
&= a_0 \underbrace{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}_{u_1(x)} + 2a_2 \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^4}{5!} + \cdots\right)}_{u_2(x)} ,
\end{aligned}$$

que é a solução geral da EDO, pois é a combinação linear das duas funções linearmente independentes $u_1(x)$ e $u_2(x)$ formada com as constantes arbitrárias $a_0$ e $2a_2$. Note que

$$u_2(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^4}{5!} + \cdots = \frac{\dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^5}{5!} + \cdots}{x} = \frac{e^{-x} - 1 + x}{x} \ .$$

Fica como exercício mostrar que, se fizéssemos os cálculos com a maior raiz indicial, $r = 1$, obteríamos apenas a solução $u_2(x)$.

### 2.2.3 O Método de Frobenius – Parte 2

Descrevemos aqui alguns procedimentos para o cálculo de uma segunda solução linearmente independente $y_2(x)$ quando apenas uma solução $y_1(x) \equiv a_0 u_1(x)$ de (2.6) na forma da série em (2.8) é obtida; a saber, quando as raízes indiciais $r_1$ e $r_2$ se enquadram numa das circunstâncias:

- 1ª circunstância: $r_1 = r_2$

- 2ª circunstância: $r_1 - r_2 = K \in \mathbb{N}^*$ e não existe solução na forma de (2.8) com $r = r_2$ (a menor raiz)

**Procedimento 1**: Fazemos uso da fórmula

$$y_2(x) = \; C u_1(x) \int \Big[ e^{-\int p(x)dx} \Big] \Big[ \frac{1}{u_1^2(x)} \Big] \, dx \;\; , \tag{2.13}$$

obtida pela técnica da redução de ordem (cf. referência [6], onde essa fórmula é deduzida e apresentada como a equação (4) da seção 4.2). Acima, $p(x)$ é o coeficiente de $y'$ na EDO escrita na forma dada por (2.7), e $C$ é uma constante arbitrária.

**Procedimento 2**: Usamos o seguinte resultado (cf. seção 4.5 da referência [4]):

$$y_2(x) = \alpha \, a_0 \, u_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \;\; , \tag{2.14}$$

onde

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet \text{ na 1ª circunstância}: \;\; \alpha = 1 & \text{e} & b_n = \left.\dfrac{d}{dr}\, a_n(r)\right|_{r\,=\,r_2} \\[3ex] \bullet \text{ na 2ª circunstância}: \;\; \alpha = \left[ (r - r_2)\, \dfrac{a_K(r)}{a_0} \right]_{r=r_2} & \text{e} & b_n = \left.\dfrac{d}{dr} \big[ (r - r_2) a_n(r) \big] \right|_{r\,=\,r_2} \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

sendo $a_n(r)$ a expressão que se obtém para o coeficiente $a_n$ em termos de $r$ e $a_0$ por meio do uso reiterado da *relação de recorrência dependente da raiz indicial* (e não do uso reiterado da relação de recorrência específica para a raiz indicial $r_2$, ou seja, o valor $r_2$ não é substituído no lugar de $r$ antes de se usar a relação de recorrência reiteradamente na dedução dos coeficientes $a_n$ em termos do primeiro coeficiente, $a_0$, permanecendo, portanto, a presença de $r$ nas expressões desses coeficientes).

**Procedimento 3**: Usamos (2.14) com $\alpha = 1$ e sendo $r_2$ o único ou o menor valor da raiz indicial, conforme a circunstância. Mas, em vez de calcular os coeficientes $b_n$ empregando (2.15) [ignoramos essa fórmula], substituímos (2.14) na EDO para determiná-los.

Para exemplificar esses procedimentos, usemo-los para completar a resolução das EDOs dos exemplos 2 e 3, obtendo uma segunda solução linearmente independente.

Uma segunda solução no Exemplo 2: $xy'' + y' - 4y = 0$

Cálculo com o procedimento 1

Tendo em vista o uso de (2.13), expliquemos os passos necessários:

1) Para calcular $u_1^2(x)$, usamos a fórmula $(a+b+c+\cdots)^2 = a^2+b^2+c^2+\cdots+2ab+2ac+2bc+\cdots$ (que é a soma de dois somatórios: dos quadrados de cada termo e dos dobros de cada produto de dois termos distintos); não explicitaremos as potências com grau maior que 3. Assim, usando (2.10), que é a expressão de $u_1(x)$ obtida no exemplo 2, temos que

$$u_1^2(x) = \Big(1+4x+4x^2+\frac{16}{9}x^3+\cdots\Big)^2 = 1+16x^2+8x+8x^2+\frac{32}{9}x^3+32x^3+\cdots = 1+8x+24x^2+\frac{320}{9}x^3+\cdots \; .$$

2) Para calcular $1/u_1^2(x) \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, reescrevemos essa equação, tendo já substituído a expressão de $u_1^2(x)$ deduzida acima, na forma

$$u_1^2(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \Big(1 + 8x + 24x^2 + \frac{320}{9}x^3 + \cdots\Big)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\right) = 1 \;\; ,$$

donde, mantendo explícitas apenas as potências com grau até 3, obtemos

$$\underbrace{c_0}_{1} + \underbrace{(c_1 + 8c_0)}_{0}\, x + \underbrace{(c_2 + 8c_1 + 24c_0)}_{0}\, x^2 + \underbrace{\left(c_3 + 8c_2 + 24c_1 + \frac{320}{9}c_0\right)}_{0} x^3 + \cdots = 1 \quad .$$

Logo, calculando iteradamente os valores de $c_n$ a partir das equações indicadas pelas chaves acima, obtemos:

$$c_0 = 1 \quad\rightarrow\quad c_1 = -8 \quad\rightarrow\quad c_2 = -8c_1 - 24c_0 = 40 \quad\rightarrow\quad c_3 = -8c_2 - 24c_1 - \frac{320}{9}c_0 = -\frac{1472}{9} \quad .$$

Assim,

$$\frac{1}{u_1^2(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots = 1 - 8x + 40x^2 - \frac{1472}{9}x^3 + \cdots \quad .$$

3) A EDO na forma apresentada em (2.7), isto é, $y'' + (1/x)y' - (4/x)y = 0$, mostra que $p(x) = 1/x$ e, portanto, que

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int (1/x)\,dx} = e^{-\ln x} = 1/x \quad .$$

4) Logo, usando (2.13), obtemos, finalmente.

$$\begin{aligned} y_2(x) &= Cu_1(x)\int \left[e^{-\int p(x)dx}\right]\left[\frac{1}{u_1^2(x)}\right] dx = Cu_1(x)\int \frac{1}{x}\Big(1 - 8x + 40x^2 - \frac{1472}{9}x^3 + \cdots\Big)\, dx \\ &= Cu_1(x)\int \Big(\frac{1}{x} - 8 + 40x - \frac{1472}{9}x^2 + \cdots\Big)\, dx \\ &= Cu_1(x)\Big(\ln x - 8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \cdots\Big) \quad [u_1(x) \text{ dado por (2.10)}] \ \blacksquare \end{aligned} \tag{2.16}$$

<u>Cálculo com o procedimento 2</u>

Na resolução apresentada no exemplo 2, obtivemos: (a) as raízes indiciais $r_1 = r_2 = 0$, mostrando que devemos usar (2.14) e (2.15), com a formulação referente à 1ª circunstância, e (b) a relação de recorrência dependente da raiz indicial, na equação (2.9),

$$a_n(r) = \frac{4a_{n-1}(r)}{(r+n)^2} \quad \text{para} \quad n \geq 1 \quad .$$

Uma vez que $a_0(r) = a_0 = $ const., temos que

$$\begin{aligned} a_1(r) &= \frac{4a_0}{(r+1)^2} \\ a_2(r) &= \frac{4^2a_0}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &\vdots \\ a_n(r) &= \frac{4^na_0}{[(r+1)(r+2)\cdots(r+n)]^2} \end{aligned}$$

Para calcular a derivada $a_n'(r)$, convém empregar a derivação logarítmica:

$$\ln a_n(r) = \ln(4^na_0) - 2[\ln(r+1) + \ln(r+2) + \cdots + \ln(r+n)] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a_n'(r)}{a_n(r)}\Big|_{r=0} = -2\left[\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \cdots + \frac{1}{r+n}\right]_{r=0} \quad\Rightarrow\quad \frac{a_n'(0)}{a_n(0)} = -2\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right],$$

onde, substituindo $a_n(0) = \dfrac{4^na_0}{(1\cdot 2\cdots n)^2} = \dfrac{4^na_0}{(n!)^2}$, obtemos

$$a_n'(0) = \frac{4^na_0}{(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \quad .$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
a_0' &= 0 \quad (a_0 \text{ é constante}) \\
a_1'(0) &= -2a_0 4(1) = -8a_0 \\
a_2'(0) &= \frac{-2a_0 4^2}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = -12a_0 \\
a_3'(0) &= \frac{-2a_0 4^3}{6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{176}{27}a_0
\end{aligned}
$$

e, assim, finalmente,

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= u_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(0)x^{n+0} \\
&= u_1(x)\ln x + a_0\left(-8x - 12x^2 - \frac{176}{27}x^3 + \cdots\right) \quad [u_1(x) \text{ dado por } (2.10)] \ \blacksquare \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Cálculo com o procedimento 3

Impondo uma segunda solução para a EDO $\hat{L}y = xy'' + y' - 4y = 0$ com a forma

$$
y_2(x) = a_0 \underbrace{u_1(x)\ln x}_{\equiv f(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}}_{\equiv g(x)} \quad [r_2 = 0] \ ,
$$

sendo $u_1(x)$ dado por (2.10), isto é,

$$
u_1(x) = 1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \cdots \ ,
$$

obtemos

$$
\hat{L}y_2 = \hat{L}(a_0 f + g) = a_0\hat{L}f + \hat{L}g = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{L}g = -a_0\hat{L}f \ . \qquad \text{(I)}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\hat{L}f &= xf'' + f' - 4f = x\left(u_1''\ln x + 2u_1'\frac{1}{x} + u_1\frac{-1}{x^2}\right) + \left(u_1'\ln x + u_1\frac{1}{x}\right) - 4u_1\ln x \\
&= (\ln x)\underbrace{(xu_1'' + u_1' - 4u_1)}_{0} + 2u_1' = 2\left(4 + 8x + \frac{16}{3}x^2 + \cdots\right) \\
\therefore\ -a_0\hat{L}f &= -8a_0 - 16a_0 x - \frac{32a_0}{3}x^2 + \cdots \qquad \text{(II)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\hat{L}g &= xg'' + g' - 4g = x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 4b_{n-1}x^{n-1} = b_1 - 4b_0 + \sum_{n=2}^{\infty}[n^2 b_n - 4b_{n-1}]x^{n-1} \\
&= (b_1 - 4b_0) + (4b_2 - 4b_1)x + (9b_3 - 4b_2)x^2 + \cdots \ . \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Logo, em vista dos resultados em (II) e (III), a equação (I) fornece

$$
\begin{aligned}
b_1 - 4b_0 = -8a_0 \quad &\Rightarrow \quad b_1 = 4b_0 - 8a_0 \\
4b_2 - 4b_1 = -16a_0 \quad &\Rightarrow \quad b_2 = b_1 - 4a_0 = 4b_0 - 12a_0 \\
9b_3 - 4b_2 = -\frac{32a_0}{3} \quad &\Rightarrow \quad b_3 = \frac{4}{9}b_2 - \frac{32}{27}a_0 = \frac{4}{9}\left(4b_0 - 12a_0\right) - \frac{32}{27}a_0 = \frac{16}{9}b_0 - \frac{176}{27}a_0
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= a_0\, u_1(x)\ln x + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \\[1em]
&= a_0\, u_1(x)\ln x \\
&\quad + b_0 + (4b_0 - 8a_0)x + (4b_0 - 12a_0)x^2 + \Big(\frac{16}{9}b_0 - \frac{176}{27}a_0\Big)x^3 + \cdots \qquad \text{(IV)} \\
&= b_0\Big(\underbrace{1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \cdots}_{u_1(x)}\Big) + a_0\Big(u_1(x)\ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27}x^3 + \cdots\Big) \\
&= b_0\, u_1(x) + a_0\Big(\underbrace{u_1(x)\ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27}x^3 + \cdots}_{\equiv u_2(x)}\Big) \quad \blacksquare \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

que é, na verdade, a *solução geral*, haja vista as duas constantes arbitrárias $a_0$ e $b_0$, bem com as duas soluções linearmente independentes $u_1(x)$, já deduzida, e $u_2(x)$, aqui obtida.

<u>Equivalência das soluções</u>

Se tomarmos a segunda solução obtida com o procedimento 1, dada por (2.16), fizermos $C = 1$, destacarmos o termo com $\ln x$, substituindo, no outro, a expressão de $u_1(x)$ e, então, multiplicarmos as séries para obter

$$\begin{aligned}
y_2(x)\Big|_{P1} &= u_1(x)\ln x + u_1(x)\Big(-8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \cdots\Big) \\
&= u_1(x)\ln x + \Big(1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \cdots\Big)\Big(-8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \cdots\Big) \\
&= u_1(x)\ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27}x^3 + \cdots \quad ,
\end{aligned}$$

observamos que esse resultado é exatamente a segunda solução obtida com os procedimentos 2 e 3, dada por (2.17) e (2.18).

<u>Uma segunda solução no Exemplo 3</u>: $\quad xy'' + 3y' - y = 0$

<u>Cálculo com o procedimento 1</u>

$$xy'' + 3y' - y = 0 \quad\Rightarrow\quad y'' + \underbrace{\frac{3}{x}}_{p(x)}y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad\Rightarrow\quad e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int (3/x)\,dx} = e^{-3\ln x} = 1/x^3 \quad .$$

Usando (2.12), que é a expressão de $u_1(x)$ obtida no exemplo 3, temos que

$$\begin{aligned}
\therefore\ u_1^2(x) &= \Big(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \cdots\Big)^2 \\
&= 1^2 + \Big(\frac{x}{3}\Big)^2 + 2(1)\frac{x}{3} + 2(1)\frac{x^2}{24} + 2(1)\frac{x^3}{3360} + 2\Big(\frac{x}{3}\Big)\Big(\frac{x^2}{24}\Big) + \cdots \\
&= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{x^3}{30} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{u_1^2(x)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad\Rightarrow\quad (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots)\Big(1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{x^3}{30} + \cdots\Big) = 1$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{c_0}_{1} + \underbrace{\Big(c_1 + \frac{2c_0}{3}\Big)}_{0}x + \underbrace{\Big(c_2 + \frac{2c_1}{3} + \frac{7c_0}{36}\Big)}_{0}x^2 + \underbrace{\Big(c_3 + \frac{2c_2}{3} + \frac{7c_1}{36} + \frac{c_0}{30}\Big)}_{0}x^3 + \cdots = 1$$

$$\Rightarrow\quad c_0 = 1 \ \rightarrow\ c_1 = -\frac{2}{3} \ \rightarrow\ c_2 = -\frac{2c_1}{3} - \frac{7c_0}{36} = \frac{1}{4} \ \rightarrow\ c_3 = -\frac{2c_2}{3} - \frac{7c_1}{36} - \frac{c_0}{30} = -\frac{19}{270}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{u_1^2(x)} = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} - \frac{19}{270}x^3 + \cdots \quad .$$

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= Cu_1(x)\int\Big[e^{-\int p(x)dx}\Big]\Big[\frac{1}{u_1^2(x)}\Big]\,dx = Cu_1(x)\int\frac{1}{x^3}\Big(1-\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{4}-\frac{19}{270}x^3+\cdots\Big)\,dx\\
&= Cu_1(x)\int\Big(x^{-3}-\frac{2x^{-2}}{3}+\frac{x^{-1}}{4}-\frac{19x}{270}+\cdots\Big)\,dx\\
&= Cu_1(x)\Big(-\frac{x^{-2}}{2}+\frac{2x^{-1}}{3}+\frac{1}{4}\ln x-\frac{19x}{270}+\cdots\Big)\,dx\\
&= Cu_1(x)\Big(\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x}-\frac{19x}{270}+\cdots\Big)\quad [u_1(x)\text{ dado por }(2.12)]\ \blacksquare \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

<u>Cálculo com o procedimento 2</u>

No exemplo 3 vimos que: (a) as raízes indiciais $r_1 = 0$ e $r_2 = -2$, mostrando que devemos usar (2.14) e (2.15), com a formulação referente à 2ª circunstância, e (b) a relação de recorrência dependente da raiz indicial, na equação (2.11),

$$
a_n(r) = \frac{a_{n-1}(r)}{(r+n+2)(r+n)} \quad \text{para } n \geq 1 \ .
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{d}{dr}\big[(r-r_2)a_0(r)\big]\Big|_{r=r_2} = \big[\underbrace{a_0(r)}_{a_0}+(r-r_2)\underbrace{a_0'(r)}_{0}\big]\Big|_{r=-2} = a_0\\
b_1 &= \frac{d}{dr}\big[(r+2)a_1(r)\big]\Big|_{r=-2} = \frac{d}{dr}\Big[(r+2)\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}\Big]\Big|_{r=-2}\\
&= a_0\,\frac{(r+1)(r+3)-(r+2)(r+3+r+1)}{[(r+1)(r+3)]^2}\Big|_{r=-2} = a_0\,\frac{(-1)(1)-0}{[(-1)(1)]^2} = -a_0\\
b_2 &= \frac{d}{dr}\big[(r+2)a_2(r)\big]\Big|_{r=-2} = \frac{d}{dr}\Big[\cancel{(r+2)}\frac{a_0}{(r+1)(r+3)\cancel{(r+2)}(r+4)}\Big]\Big|_{r=-2}\\
&= -a_0\,\frac{(r+3)(r+4)+(r+1)(r+4)+(r+1)(r+3)}{[(r+1)(r+3)(r+4)]^2}\Big|_{r=-2}\\
&= -a_0\,\frac{(1)(2)+(-1)(2)+(-1)(1)}{[(-1)(1)(2)]^2} = -a_0\,\frac{2-2-1}{4} = \frac{a_0}{4}\\
b_3 &= \frac{d}{dr}\big[(r+2)a_3(r)\big]\Big|_{r=-2} = \frac{d}{dr}\Big[\cancel{(r+2)}\frac{a_0}{(r+1)(r+3)^2\cancel{(r+2)}(r+4)(r+5)}\Big]\Big|_{r=-2}\\
&= -a_0\,\frac{(1)^2(2)(3)+2(-1)(1)(2)(3)+(-1)(1)^2(3)+(-1)(1)^2(2)}{[(-1)(1)^2(2)(3)]^2} = -a_0\,\frac{6-12-3-2}{364} = \frac{11a_0}{36}
\end{aligned}
$$

Precisamos também calcular o fator $\alpha$ presente na formulação, que, no caso, como $K = r_1 - r_2 = 0-(-2) = 2$, é dado por

$$
\alpha = \Big[(r-r_2)\,\frac{a_K(r)}{a_0}\Big]_{r=r_2} = \Big[(r+2)\,\frac{a_2(r)}{a_0}\Big]_{r=-2} = \Big[\frac{1}{(r+1)(r+3)(r+4)}\Big]_{r=-2} = -\frac{1}{2} \ .
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= \alpha\, a_0\, u_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)x^{n-2} \;=\; -\frac{1}{2}\,a_0u_1(x)\ln x + b_0x^{-2}+b_1x^{-1}+b_2+b_3x+\cdots\\
&= a_0\left(-\frac{1}{2}\,u_1(x)\ln x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}+\frac{11x}{36}+\cdots\right)\quad [u_1(x)\text{ dado por }(2.12)]\ \blacksquare \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Cálculo com o procedimento 3

Impondo uma segunda solução para a EDO $\hat{L}y = xy'' + 3y' - y = 0$ com a forma

$$y_2(x) = a_0 \underbrace{u_1(x)\ln x}_{\equiv f(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}}_{\equiv g(x)} \quad [r_2 = -2] \ ,$$

com $u_1(x)$ dado por (2.12), isto é,

$$u_1(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \cdots \ ,$$

obtemos

$$\hat{L}y_2 = \hat{L}(a_0 f + g) = a_0\hat{L}f + \hat{L}g = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{L}g = -a_0\hat{L}f \ . \qquad \text{(I)}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\hat{L}f &= xf'' + 3f' - f = x\Big(u_1''\ln x + 2u_1'\frac{1}{x} + u_1\frac{-1}{x^2}\Big) + 3\Big(u_1'\ln x + u_1\frac{1}{x}\Big) - u_1\ln x \\
&= (\ln x)\underbrace{(xu_1'' + 3u_1' - u_1)}_{0} + 2u_1' - \frac{u_1}{x} + \frac{3u_1}{x} = 2u_1' + \frac{2}{x}u_1 \\
&= 2\Big(\frac{1}{3} + \frac{x}{12} + \frac{x^2}{120} + \cdots\Big) + \frac{2}{x}\Big(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \cdots\Big) \\
\therefore\ -a_0\hat{L}f &= -\frac{2a_0}{x} - \frac{4a_0}{3} - \frac{a_0 x}{4} - \frac{a_0 x^2}{45} + \cdots \qquad \text{(II)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{L}g &= xg'' + 3g' - g = x\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-3} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n-2)b_n x^{n-3} - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-3} = \cancel{6b_0x^{-3}} - \cancel{6b_0x^{-3}} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{\big[(n-2)(n-3) + 3(n-2)\big]}_{n(n-2)} b_n - b_{n-1}\Big\}x^{n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{n(n-2)b_n - b_{n-1}\Big\}x^{n-3} \\
&= -\frac{b_1 + b_0}{x^2} - \frac{b_1}{x} + (3b_3 - b_2) + (8b_4 - b_3)x + \cdots \ . \qquad \text{(III)}
\end{aligned}$$

Logo, em vista dos resultados em (II) e (III), a equação (I) fornece

$$\left.\begin{array}{r} b_1 + b_0 = 0 \\ -b_1 = -2a_0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_0 = -2a_0 \\ b_1 = 2a_0 \end{cases}$$

$$b_2 \quad : \quad \text{permanece arbitrário}$$

$$3b_3 - b_2 = -\frac{4a_0}{3} \quad \Rightarrow \quad b_3 = -\frac{4a_0}{9} + \frac{b_2}{3}$$

$$8b_4 - b_3 = -\frac{a_0}{4} \quad \Rightarrow \quad b_4 = -\frac{a_0}{32} + \frac{b_3}{8} = -\frac{a_0}{32} - \frac{a_0}{18} + \frac{b_2}{24} = -\frac{25a_0}{288} + \frac{b_2}{24}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= a_0\, u_1(x) \ln x + \frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x} + b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + \cdots \\
&= a_0\, u_1(x) \ln x \\
&\quad - \frac{2a_0}{x^2} + \frac{2a_0}{x} + b_2 + \Big( -\frac{4a_0}{9} + \frac{b_2}{3} \Big) x + \Big( -\frac{25a_0}{288} + \frac{b_2}{24} \Big) x^2 + \cdots \qquad (2.21) \\
&= b_2 \underbrace{\Big( 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \cdots \Big)}_{u_1(x)} + a_0 \Big( u_1(x) \ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27} x^3 + \cdots \Big) \\
&= b_2\, u_1(x) + a_0 \Big( u_1(x) \ln x - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{4x}{9} - \frac{25x^2}{288} + \cdots \Big) \quad \blacksquare \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

que é a *solução geral*, com as duas constantes arbitrárias $a_0$ e $b_0$.

Equivalência das soluções

Note que (2.20) com $a_0 = 1$ é igual à segunda solução em (2.21) com $a_0 = -1/2$ e $b_2 = 1/4$.

Além disso, se tomarmos a segunda solução obtida com o procedimento 1, dada por (2.19), fizermos $C = 1$, destacarmos o termo com $\ln x$, substituindo, no outro, a expressão de $u_1(x)$ e, então, multiplicarmos as séries para obter

$$
\begin{aligned}
y_2(x)\Big|_{P1} &= \frac{1}{4}\, u_1(x) \ln x + u_1(x) \Big( -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19x}{270} + \cdots \Big) \\
&= \frac{1}{4}\, u_1(x) \ln x + \Big( 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \cdots \Big) \Big( -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19x}{270} + \cdots \Big) \\
&= \frac{1}{4}\, u_1(x) \ln x - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{29}{144} - \frac{19x}{432} + \cdots \quad ,
\end{aligned}
$$

vemos que esse é o mesmo resultado que se obtém da segunda solução em (2.21) com $a_0 = 1/4$ e $b_2 = 29/144$.

## 2.3 Exercícios

1. Calcule a solução em série centrada no ponto ordinário $x = 0$ de cada uma das EDOs abaixo:

   (a) $y'' = xy$ (b) $y'' - 2xy' + y = 0$ (c) $y'' + x^2y' + xy = 0$ (d) $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$

2. Determine os pontos singulares de cada EDO e classifique-os como regular ou irregular:

   (a) $x^3 + 4x^2 + 3y = 0$
   (b) $(x^2 - 9)y'' + (x + 3)y' + 2y = 0$
   (c) $(x^3 + 4x)y'' - 2xy' + 6y = 0$
   (d) $(x^2 + x - 6)y'' + (x + 3)y' + (x - 2)y = 0$
   (e) $x^2(1 - x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
   (f) $x^3(x^2 - 25)(x - 2)^2y'' + 3x(x - 2)y' + 7(x + 5)y = 0$
   (g) $x^2(1 - x)y'' + (x - 2)y' - 3xy = 0$
   (h) $x^2(1 - x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
   (i) $(1 - x^2)^2y'' + x(1 - x)y' + (1 + x)y = 0$
   (j) $x(1 - x^2)^3y'' + (1 - x^2)^2y' + 2(1 + x)y = 0$
   (k) $(x + 2)^2(x - 1)y'' + 3(x - 1)y' - 2(x + 2)y = 0$

3. Calcule a solução geral na forma de uma série centrada no ponto singular regular $x = 0$ de cada uma das seguintes EDOs (cujas raízes indiciais correspondentes, informa-se, não difere por um número inteiro):

   (a) $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$ (b) $2x^2y'' - x(x - 1)y' - y = 0$ (c) $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
   (d) $3xy'' + 2y' - 4y = 0$

4. Calcule a solução geral na forma de uma série centrada no ponto singular regular $x = 0$, e com $x > 0$, de cada uma das seguintes EDOs (que são tais que as raízes indiciais são duplas, sendo necessário calcular uma segunda solução linearmente independente por um dos três procedimentos abordados na seção 2.2.3):

   (a) $x^2y'' + x(x - 1)y' + y = 0$ (b) $(4x^2 - 16x^3)y'' + y = 0$ (c) $x^2y'' + (x^2 + 1/4)y = 0$
   (d) $4x^2y'' + (1 + 4x)y = 0$

5. Calcule a solução geral na forma de uma série centrada no ponto singular regular $x = 0$ de cada uma das seguintes EDOs (que são tais que as raízes indiciais diferem por um número inteiro não-nulo, correspondendo à menor delas a solução geral):

   (a) $xy'' + 2y' - xy = 0$ (b) $x(x - 1)y'' + 3y' - 2y = 0$ (c) $xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$
   (d) $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$

6. Calcule a solução geral na forma de uma série centrada no ponto singular regular $x = 0$, e com $x > 0$, de cada uma das seguintes EDOs (que são tais que as raízes indiciais diferem por um número inteiro não-nulo, sendo necessário calcular uma segunda solução linearmente independente por um dos três procedimentos abordados na seção 2.2.3):

   (a) $x(x - 1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$ (b) $9x^2y'' - 15xy' + (7 - 36x)y = 0$
   (c) $16x^2y'' - 40xy' + (32x + 13)y = 0$

7. Uma EDO linear de 2ª ordem com coeficientes polinomiais que tem um ponto singular em $x = 0$ é da forma

   $$x(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots)y'' + (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots)y' + (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots)y = 0 \ .$$

   Mostre que, considerando séries de potências centradas em $x = 0$ nos casos em que o método de Frobenius se aplica (quando $x = 0$ é um ponto singular regular), obtemos a equação indicial

   (a) $A_0r^2 + (B_0 - A_0)r = 0$ se $A_0 \neq 0$
   (b) $A_1r^2 + (B_1 - A_1)r + C_0 = 0$ se $A_0 = B_0 = 0$ e $A_1 \neq 0$
   (c) $A_2r^2 + (B_2 - A_2)r + C_1 = 0$ se $A_0 = A_1 = B_0 = B_1 = C_0 = 0$ e $A_2 \neq 0$
   (d) $A_3r^2 + (B_3 - A_3)r + C_2 = 0$ se $A_0 = A_1 = A_2 = B_0 = B_1 = B_2 = C_0 = C_1 = 0$ e $A_3 \neq 0$
   $\vdots$

**Respostas e algumas resoluções**

1. (a) $y(x) = a_0\Big(1+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6}x^6+\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9}x^9+\cdot\Big)+ a_1\Big(x+\frac{1}{3\cdot4}x^4+\frac{1}{3\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\frac{1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10}x^{10}+\cdots\Big)$
   (b) $y(x) = a_0\Big(1-\frac{1}{2!}x^2-\frac{3}{4!}x^4-\frac{21}{6!}x^6-\cdots\Big)+ a_1\Big(x+\frac{1}{3!}x^3-\frac{5}{5!}x^5+\frac{45}{7!}x^7+\cdots\Big)$
   (c) $y(x) = a_0\Big(1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{4^2}{6!}x^6-\frac{4^2\,7^2}{9!}x^9+\cdots\Big)+ a_1\Big(x-\frac{2^2}{4!}x^4+\frac{2^2\,5^2}{7!}x^7-\frac{2^2\,5^2\,8^2}{10!}x^{10}+\cdots\Big)$
   (d) $y(x) = a_0\Big(1+\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4!\,4}x^4+\frac{7\cdot23}{6!\,8}x^6-\cdots\Big)+ a_1\Big(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{14}{5!\,2}x^5-\frac{14\cdot34}{7!\,4}x^7-\cdots\Big)$

2. (a) irregular: $x=0$.
   (b) regular: $x=-3$; irregular: $x=3$.
   (c) regulares: $x=0,\ \pm2\mathrm{i}$.
   (d) regulares: $x=-3,\ 2$.
   (e) regular: $x=0$; irregular: $x=1$.
   (f) regulares: $x=\pm5,\ 2$; irregular: $x=0$.
   (g) regular: $x=1$; irregular: $x=0$.
   (h) regulares: $x=\pm1$; irregular: $x=0$.
   (i) regular: $x=1$; irregular: $x=-1$.
   (j) regulares: $x=0,\ -1$; irregular: $x=1$.
   (k) regular: $x=1$; irregular: $x=-2$.

3. (a) $y(x) = c_1x^{2/3}\Big(1-\frac{1}{2}x+\frac{5}{28}x^2-\frac{1}{21}x^3+\cdots\Big)+ c_2x^{1/3}\Big(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}x^2-\frac{7}{120}x^3+\cdots\Big)$
   (b) $y(x) = c_1x\Big(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5\cdot7}x^3+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}x^3+\cdots\Big)+ c_2x^{-1/2}\Big(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots\Big)$
   (c) $y(x) = c_1x^{1/2}\Big(1-\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{2!\,7\cdot11}x^4-\frac{1}{3!\,7\cdot11\cdot15}x^6+\cdots\Big)+ c_2x^{-1}\Big(1-x^2+\frac{1}{2!\,5}x^4-\frac{1}{2!\,5\cdot9}x^6+\cdots\Big)$
   (d) $y(x) = c_1\Big(1+2x+\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{15}x^3+\cdots\Big)+ c_2x^{1/3}\Big(1+x+\frac{2}{7}x^2+\frac{4}{105}x^3+\cdots\Big)$

4. (a) $y(x) = c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$, onde $u_1(x)=x\,e^{-x}$ e $u_2(x)=u_1(x)\Big(\ln x+x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3!\,3}x^3+\cdots\Big)$
   (b) $y(x) = c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$ , onde $u_1(x)=x^{1/2}\Big(1-x-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{4}x^3+\cdots\Big)$
   e $u_2(x)=u_1(x)\Big(\ln x+2x+\frac{9}{4}x^2+3x^3+\cdots\Big)$
   (c) $y(x) = c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$, onde $u_1(x)=x^{1/2}\Big(1-\frac{1}{(1!\,2^1)^2}x^2+\frac{1}{(2!\,2^2)^2}x^4-\frac{1}{(3!\,2^3)^2}x^6+\cdots\Big)$
   e $u_2(x)=u_1(x)\Big(\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{128}x^4+\cdots\Big) = u_1(x)\ln x+ x^{1/2}\Big(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{128}x^4+\cdots\Big)$
   (d) Solução:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \quad\Rightarrow\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}\ .$$

$$0=4x^2y''+(1+4x)y=\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^{n+r+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty}4a_{n-1}x^{n+r}}\ .$$

$$[\underbrace{4r(r-1)+1}_{(2r-1)^2=0}]\,a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{\,[4(n+r)(n+r-1)+1]\,a_n+4a_{n-1}\}}_{0}\,x^{n+r}=0\ .$$

$$r=1/2 \quad \text{e} \quad [4(n+r)(n+r-1)+1]_{r=1/2}a_n=-4a_{n-1}\ .$$

$$\Big[4\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{1}{2}\Big)+1\Big]a_n=\Big[4\Big(n^2-\frac{1}{4}\Big)+1\Big]a_n=4n^2a_n=-4a_{n-1} \quad\Rightarrow\quad a_n=-\frac{a_{n-1}}{n^2}\ (n\ge1)\ .$$

$$a_1=-a_0\ ,\quad a_2=-\frac{a_1}{4}=\frac{a_0}{4}\quad a_3=-\frac{a_2}{9}=-\frac{a_0}{36}\quad\Rightarrow\quad y_1(x)=a_0\,\overbrace{x^{1/2}\Big(1-x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\cdots\Big)}^{u_1(x)}\ .$$

$$y_2(x)=C'\,u_1(x)\int\underbrace{e^{-\int\overbrace{p(x)}^{0}dx}}_{const.}\frac{1}{u_1^2(x)}\,dx=Cu_1(x)\int\frac{1}{u_1^2(x)}\,dx\ .$$

$$u_1^2(x)=x\Big(1-x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\cdots\Big)^2=x\Big(1+x^2-2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{18}-\frac{x^3}{2}+\cdots\Big)=x\Big(\underbrace{1-2x+\frac{3x^2}{2}-\frac{5x^3}{9}+\cdots}_{P(x)}\Big).$$

$$\frac{1}{P(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\quad\Rightarrow\quad P(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\Big(1-2x+\frac{3x^2}{2}-\frac{5x^3}{9}+\cdots\Big)(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots)=1.$$

$$\underbrace{c_0}_{1}+x\Big(\underbrace{c_1-2c_0}_{0}\Big)+x^2\Big(\underbrace{c_2-2c_1+\frac{3c_0}{2}}_{0}\Big)+x^3\Big(\underbrace{c_3-2c_2+\frac{3c_1}{2}-\frac{5c_0}{9}}_{0}\Big)+\cdots.$$

$$c_0=1,\quad c_1=2c_0=2,\quad c_2=2c_1-\frac{3c_0}{2}=\frac{5}{2},\quad c_3=2c_2-\frac{3c_1}{2}+\frac{5c_0}{9}=\frac{23}{9},\cdots.$$

$$\frac{1}{u_1^2(x)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{x}(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots)=\frac{1}{x}+2+\frac{5x}{2}+\frac{23x^2}{9}+\cdots.$$

$$y_2(x)=Cu_1(x)\int\frac{1}{u_1^2(x)}\,dx=Cu_1(x)\int\Big(\frac{1}{x}+2+\frac{5x}{2}+\frac{23x^2}{9}+\cdots\Big)dx.$$

Resposta: $y(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$ , onde $u_1(x)=x^{1/2}\Big(1-x+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{36}+\cdots\Big)$

e $u_2(x)=u_1(x)\Big(\ln x+2x+\dfrac{5x^2}{4}+\dfrac{23x^3}{27}+\cdots\Big)$.

5. (a) $y(x)=c_1x^{-1}\Big(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\cdots\Big)+c_2\Big(1+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4+\frac{1}{7!}x^6+\cdots\Big)$

   (b) $y(x)=c_1\Big(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2\Big)+c_2\Big(x^4+2x^5+3x^6+4x^7+\cdots\Big)$

   (c) $y(x)=c_1\Big(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{120}x^3\Big)+c_2\Big(x^7-\frac{1}{2}x^8+\frac{5}{36}x^9-\frac{1}{36}x^{10}+\cdots\Big)$

   (d) Solução:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}\\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}\end{array}\right..$$

$$0=x^2y''+5xy'-5y=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}5(n+r)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}5a_nx^{n+r}.$$

$$[\underbrace{(r-1)r+5r-5}_{r^2+4r-5=0}]a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{[(n+r-1)(n+r)+5(n+r)-5]a_n}_{0}x^{n+r}=0.$$

Logo, $r=-5$ ou 1. Considerando $r=-5$ (o menor valor), obtemos, para $n\geq1$:

$$[(n+r-1)(n+r)+5(n+r)-5]\,a_n\Big|_{r=-5}=[(n-5-1)(n-5)+5(n-5)-5]\,a_n=0$$

$$\Rightarrow\quad n(n-6)\,a_n\Big|_{n\geq1}=0\quad\Rightarrow\quad a_n\Big|_{n\neq6}=0\ \text{ e }\ a_6\text{ permanece arbitrário (tal qual }a_0).$$

Como duas constantes ($a_0$ e $a_6$) permanecem arbitrárias, a solução que se obtém é a geral.

Resposta: $y(x)=x^{-5}(a_0+a_6x^6)=a_0x^{-5}+a_6x$ .

Acabamos de resolver uma EDO de Euler-Cauchy; naturalmente, ela pode ser resolvida mais simplesmente pelos métodos analíticos que o aluno já aprendeu.

6. (a) $y(x)=c_1\Big(x+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x^3+\frac{51}{164}x^4+\cdots\Big)+c_2\Big(3u_1(x)\ln x+1-\frac{21}{4}x^2-\frac{19}{4}x^3+\cdots\Big)$

   (b) $y(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$ , onde $u_1(x)=x^{7/3}\Big(1+x+\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{45}x^3+\cdots\Big)$

   e $u_2(x)=u_1(x)\Big(-\frac{1}{2}x^{-2}+2x^{-1}+\frac{11}{5}\ln x-\frac{16}{9}x+\cdots\Big)$

   (c) Solução:

$16x^2y''-40xy'+(32x+13)y=0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty}16(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}40(n+r)a_nx^{n+r}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}32a_nx^{n+r+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty}32a_{n-1}x^{n+r}}+\sum_{n=0}^{\infty}13a_nx^{n+r}=0.$$

$$[\underbrace{16r(r-1)-40r+13}_{16r^2-56r+13=0}]a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{[16(n+r)(n+r-1)-40(n+r)+13]\,a_n+32a_{n-1}\}}_{0}x^{n+r}=0.$$

$\therefore\ r=r_1=13/4$ ou $r=r_2=1/4$ , e $[16(n+r)(n+r-1)-40(n+r)+13]\,a_n=-32a_{n-1}$ $(n\geq 1)$ .
Como $r_1-r_2=3\in\mathbb{Z}^*$, vejamos se, com $r=1/4$ (a menor raiz indicial), a solução geral é obtida. Nesse caso, a relação de recorrência é dada por

$$\left[16\Big(n+\frac{1}{4}\Big)\Big(n-\frac{3}{4}\Big)-40\Big(n+\frac{1}{4}\Big)+13\right]a_n=\big[(4n+1)(4n-3)-40n+3\big]a_n=\underline{\underline{16n(n-3)a_n=-32a_{n-1}}}\ .$$

Substituindo $n=1,2,\cdots$, obtemos

$n=1:\quad -32a_1=-32a_0 \quad\Rightarrow\quad a_1=a_0$

$n=2:\quad -32a_2=-32a_1=-32a_0 \quad\Rightarrow\quad a_2=a_0$

$n=3:\quad 0\cdot a_3=-32a_2=-32a_0 \quad\Rightarrow\quad a_0=0$: contradição com a hipótese $a_0\neq 0$.

Vemos assim que não existe solução corresponde à menor raiz indicial.

Passemos, então, ao cálculo da solução associada a $r=13/4$. Nesse caso, a relação de recorrência, os coeficientes da série e a solução $y_1(x)$ correspondente são dados por

$$\left[16\Big(n+\frac{13}{4}\Big)\Big(n+\frac{9}{4}\Big)-40\Big(n+\frac{13}{4}\Big)+13\right]a_n=\big[(4n+13)(4n+9)-40n-117\big]a_n=16n(n+3)a_n=-32a_{n-1}$$

$$\Rightarrow\quad a_n=-\frac{2a_{n-1}}{(n+3)n}\ (n\geq 1)\quad\Rightarrow\quad a_1=-\frac{a_0}{2}\ ,\quad a_2=-\frac{a_1}{5}=\frac{a_0}{10}\ ,\quad a_3=-\frac{a_2}{9}=-\frac{a_0}{90}\ ,\quad\cdots\ .$$

$$\therefore\ y_1(x)=a_0\,\underbrace{x^{13/4}\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{10}-\frac{x^3}{90}+\cdots\Big)}_{u_1(x)}\ .$$

Calculemos uma segunda solução l.i. usando a equação (2.13): $y_2(x)=C\,u_1(x)\displaystyle\int e^{-\int p(x)dx}\frac{1}{u_1^2(x)}\,dx$ :

$$16x^2y''-40xy'+(32x+13)y=0\quad\Rightarrow\quad y''+\overbrace{\frac{-5}{2x}}^{p(x)}\,y'+\frac{32x+13}{16x^2}\,y=0$$

$$\Rightarrow\quad\int p(x)dx=\int\frac{-5dx}{2x}=\frac{-5\ln x}{2}\quad\Rightarrow\quad e^{-\int p(x)dx}=e^{(5\ln x)/2}=x^{5/2}\ .$$

$$u_1^2(x)=\left[x^{13/4}\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{10}-\frac{x^3}{90}+\cdots\Big)\right]^2=x^{13/2}\Big(1+\frac{x^2}{4}-x+\frac{x^2}{5}-\frac{x^3}{45}-\frac{x^3}{10}+\cdots\Big)$$
$$=x^{13/2}\Big(\underbrace{1-x+\frac{9x^2}{20}-\frac{11x^3}{90}+\cdots}_{P(x)}\Big)\ .$$

$$\frac{1}{P(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\quad\Rightarrow\quad P(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\Big(1-x+\frac{9x^2}{20}-\frac{11x^3}{90}+\cdots\Big)\big(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\big)\ =\ 1\ .$$

$$\Rightarrow\quad\underbrace{c_0}_{1}+x\Big(\underbrace{c_1-c_0}_{0}\Big)+\ x^2\Big(\underbrace{c_2-c_1+\frac{9c_0}{20}}_{0}\Big)+\ x^3\Big(\underbrace{c_3-c_2+\frac{9c_1}{20}-\frac{11c_0}{90}}_{0}\Big)+\cdots\ =\ 1\ .$$

$$\Rightarrow\quad c_0=1\ ,\quad c_1=2c_0=2\ ,\quad c_2=2c_1-\frac{3c_0}{2}=\frac{5}{2}\ ,\quad c_3=2c_2-\frac{3c_1}{2}+\frac{5c_0}{9}=\frac{23}{9}\ ,\quad\cdots\ .$$

$$\frac{1}{u_1^2(x)}=\frac{1}{x^{13/2}}\cdot\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{x^{13/2}}\,(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots)=\frac{1}{x^{13/2}}\Big(1+x+\frac{11x^2}{20}+\frac{2x^3}{9}+\cdots\Big)\ .$$

$$\therefore\ y_2(x)=C\,u_1(x)\int e^{\int p(x)dx}\cdot\frac{1}{u_1^2(x)}\,dx=Cu_1(x)\int\underbrace{x^{5/2}\cdot\frac{1}{x^{13/2}}}_{1/x^4}\Big(1+x+\frac{11x^2}{20}+\frac{2x^3}{9}+\cdots\Big)dx$$
$$=Cu_1(x)\int\Big(x^{-4}+x^{-3}+\frac{11x^{-2}}{20}+\frac{2x^{-1}}{9}+\cdots\Big)dx\ .$$

Resposta: $y(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$ , onde $u_1(x)=x^{13/4}\Big(1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{x^3}{90}+\cdots\Big)$

e $u_2(x)=u_1(x)\Big(-\dfrac{x^{-3}}{3}-\dfrac{x^{-2}}{2}-\dfrac{11x^{-1}}{20}+\dfrac{2}{9}\ln x+\cdots\Big)$ .

# Capítulo 3

# Transformada de Laplace

## 3.1 Definição

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ definida para $t \geq 0$ , denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, é a função $\bar{f}(s)$ resultante da seguinte integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \bar{f}(s) \quad , \tag{3.1}$$

para os valores de $s$ que tornem a integral convergente. Por exemplo, se $f(t) = c$ (constante) então

$$\mathcal{L}\{c\} = \int_0^\infty e^{-st} c\, dt = c \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{c}{s}\Big( -\underbrace{e^{-s\cdot\infty}}_{0} + e^0 \Big) = \frac{c}{s} \quad ,$$

para $s > 0$ (excluem-se $s = 0$, por implicar em divisão por zero, e $s > 0$, porque o termo indicado acima como nulo seria infinito).

Outro exemplo: se $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 3) \\ 2 & (t \geq 3) \end{cases}$ , temos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^3 e^{-st} 0\, dt + \int_3^\infty e^{-st} 2\, dt = \frac{2e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=3}^{\infty} = \frac{2e^{-3s}}{s} \quad .$$

## 3.2 A linearidade da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]\, dt = a\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad .$$

## 3.3 Condições suficientes para a existência da transformada de Laplace e o comportamento assintótico sob essas condições

Garante-se a existência da transformada de Laplace de uma função $f(t)$ definida para $t \geq 0$ que seja

- contínua por partes, isto é, que exiba, em qualquer intervalo finito do seu domínio, um número finito (zero inclusive) de descontinuidades, nunca sendo infinita.
- de ordem exponencial, isto é, que, em valor absoluto, seja menor que alguma exponencial $Me^{\lambda t}$ para $t$ maior que algum $T$.

Além disso, sob essas condições, $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ deve necessariamente tender a zero quando $s \to \infty$ .(*)

(*) Assim, funções de $s$ tais como $s^2$ e $s/(s+2)$ não são transformadas de Laplace de nenhuma função $f(t)$ $[t \geq 0]$ que seja contínua por partes e de ordem exponencial.

De fato:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}\{f(t)\}| &= |\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,| \;=\; |\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,| \\
&\le |\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt\,| + |\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,| \;\le\; \int_0^T e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\le |f|_{\max}}\,dt + \int_T^\infty e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\le Me^{\lambda t}}\,dt \\
&\le |f|_{\max} \int_0^T e^{-st} dt + M \int_T^\infty e^{-(s-\lambda)t} dt \;=\; |f|_{\max} \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=0}^{T} + M \frac{e^{-(s-\lambda)t}}{-(s-\lambda)}\bigg|_{t=T}^{\infty} \\
&= |f|_{\max} \frac{e^{-sT}-1}{-s} + M\left[\underbrace{\frac{e^{-(s-\lambda)\infty}}{-(s-\lambda)}}_{0 \text{ para } s>\lambda} + \frac{e^{-(s-\lambda)T}}{s-\lambda}\right],
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
|\mathcal{L}\{f(t)\}| \;\le\; |f|_{\max}\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s\,e^{sT}}\Big) + \frac{M}{(s-\lambda)\,e^{(s-\lambda)T}} \;,
$$

um resultado que, além de ser finito, comprovando a existência da transformada de Laplace, tende a zero quando $s \to \infty$ .

## 3.4 Cálculo de $\mathcal{L}$ de $e^{at}$, $t^n$, $\operatorname{sen} at$, $\cos at$, $\operatorname{senh} at$, $\cosh at$

Nesta seção considere $a \in \mathbb{R}^{(*)}$.

**1)** Se $s > a$, então:

$$
\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\bigg|_{t=0}^{\infty} = -\underbrace{\frac{e^{-(s-a)\,\infty}}{s-a}}_{0 \text{ para } s>a} + \frac{e^0}{s-a} = \frac{1}{s-a} \quad \blacksquare
$$

**2)** Se $s > 0$, temos, integrando por partes, para $n = 1, 2, 3, \cdots$, que

$$
\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{e^{-st}}{-s}\, t^n\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = -\frac{1}{s}\underbrace{\lim_{t\to\infty}\big(e^{-st}t^n\big)}_{0 \text{ (l'Hôpital)}} + 0 + \frac{n}{s}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}\}
$$

$$
\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \\
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s}\,\mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s}\,\frac{1}{s^2} = \frac{2\cdot 1}{s^3} \\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3}{s}\,\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s}\,\frac{2\cdot 1}{s^3} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{s^4} \\
\therefore \quad & \quad\;\; \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

**3)** Se $s > 0$, então:

$$
\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\cos at\bigg|_{t=0}^{\infty} - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} at\,dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} \qquad \text{(i)}
$$

$$
\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} at\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\operatorname{sen} at\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st} \cos at\,dt = 0 + \frac{a}{s}\,\mathcal{L}\{\cos at\} \qquad \text{(ii)}
$$

$$
\text{(ii) em (i)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left[\frac{a}{s}\,\mathcal{L}\{\cos at\}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \blacksquare \qquad \text{(iii)}
$$

$$
\text{(iii) em (ii)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s}\,\frac{s}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \blacksquare
$$

(*) Se $a = 0$, as transformadas de Laplace calculadas nesta seção fornecem, consistentemente, $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ e $\mathcal{L}\{0\} = 0$.

**4)** Se $s > |a|$ (por causa da necessidade de que exista a tranformada de Laplace de $e^{\pm at}$), então:

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{at}\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{s}{s^2-a^2} \quad \blacksquare$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{-at}\}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{a}{s^2-a^2} \quad \blacksquare$$

Com as fórmulas deduzidas até o momento, podemos calcular uma variedade de transformadas de Laplace sem recorrer à definição, isto é, sem efetuar a integral em (3.1). Observe, em particular, o uso da linearidade de $\mathcal{L}$. Por exemplo:

i) $\mathcal{L}\{3t - 5\operatorname{sen} 2t\} = 3\underbrace{\mathcal{L}\{t\}}_{1/s^2} - 5\underbrace{\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}}_{2/(s^2+4)} = \dfrac{-7s^2+12}{s^2(s^2+4)}$

ii) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^2 t\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}\{1\}}_{1/s} - \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}\{\cos 2t\}}_{s/(s^2+4)} = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$

## 3.5 Propriedades especiais

Se $\displaystyle\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)\,dt$ existe então se demonstra que:

**1)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ existe para $s \geq s_0$

**2)** $\displaystyle\lim_{s\to c}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \left[\lim_{s\to c} e^{-st}\right] f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-ct} dt \quad \text{para } c \geq s_0$

**3)** $\displaystyle\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial\,(e^{-st})}{\partial s} f(t)\,dt \quad \text{para } s \geq s_0$

**4)** $\displaystyle\int_{s_1}^{s_2}\left[\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right] ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st} ds\right] f(t)\,dt \quad \text{para } s_0 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$

## 3.6 Transformada de Laplace inversa

Se a transformada de Laplace da função $f(t)$ é a função $\bar{f}(s)$, definida por (3.1), então a transformada de Laplace inversa da função $\bar{f}(s)$ é, por definição, a função $f(t)$, isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t) \; .$$

Para determinar a transformada de Laplace inversa de uma função $\bar{f}(s)$ dada, é necessário resolver a equação integral em (3.1). Em textos mais avançados, demonstra-se que, se tal equação tem uma solução $f(t)$, então ela é única. Esse resultado é conhecido como teorema de Lerch.

Exemplos:

i) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = t$ .

ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{a\bar{f}(s) + b\bar{g}(s)\right\} = a\,\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} + b\,\mathcal{L}^{-1}\{\bar{g}(s)\} = a\,f(t) + b\,g(t)$ . [$\mathcal{L}^{-1}$ é linear]

iii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$ .

iv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$ .

v) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\} = \dfrac{1}{4!}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4!}{s^5}\right\} = \dfrac{1}{4!}\,t^4$ .

$$\text{vi)}\ \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\} = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+\frac{5}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$
$$= 4\,e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\,\mathrm{sen}\,2t\ .$$

Nos exemplos seguintes, frações parciais são empregadas:

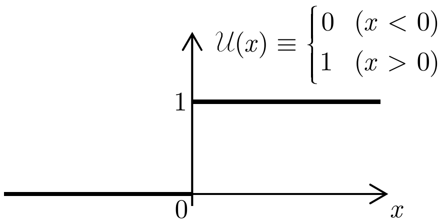
$$\text{vii)}\ \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-5)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s-2}+\frac{1/3}{s-5}\right\}=-\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{5t}\ .$$

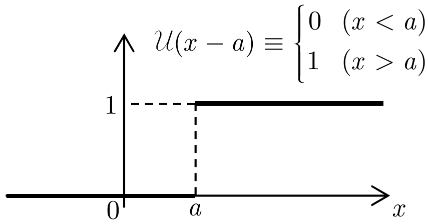
$$\text{viii)}\ \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}=1-\cos t\ .$$

$$\text{ix)}\ \ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-3}+\frac{-1}{s+1}\right\}=4e^{3t}-e^{-t}\ .$$

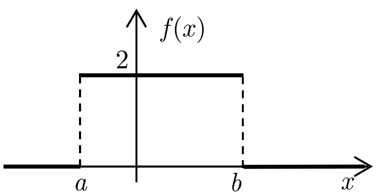
## 3.7 Função degrau unitário

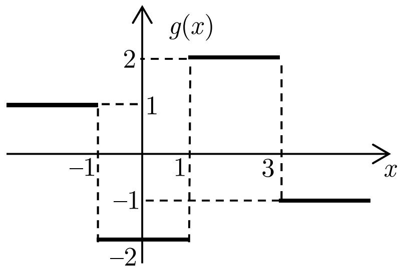
A função degrau unitário $\mathcal{U}(x)$ é definida na figura abaixo, à esquerda. Na mesma figura, à direita, mostra-se que $\mathcal{U}(x-a)$ representa uma translação do degrau. O valor dessa função em $x=a$ é aqui ignorado, por ser geralmente irrelevante nos problemas em que ela se aplica (veja-se, entretanto, ao final desta seção, outras versões da função degrau que são definidas no ponto de descontinuidade). Além disso, num ponto $x_i$ de descontinuidade de uma função $f(x)$, não seremos rigorosos em mostrar o valor $f(x_i)$.




Vejamos dois exemplos de uso dessa função. Considere a função $f(x)$ na figura abaixo, à esquerda.




Sua expressão em termos da função degrau é

$$f(x)=2\,[\,\mathcal{U}(x-a)-\mathcal{U}(x-b)\,]\ \ .$$

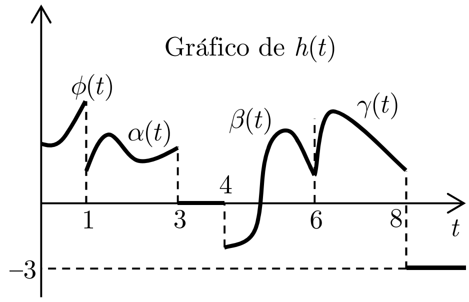
Outro exemplo um pouco mais complicado é a função $g(x)$ na figura acima, à direita; ela é dada por

$$\begin{aligned} g(x) &= 1+(-2-1)\,\mathcal{U}(x+1)+\ [2-(-2)]\,\mathcal{U}(x-1)+\ (-1-2)\,\mathcal{U}(x-3) \\ &= 1-3\,\mathcal{U}(x+1)+\ 4\,\mathcal{U}(x-1)-\ 3\,\mathcal{U}(x-3)\ \ . \end{aligned}$$

No estudo da transformada de Laplace, a variável $t$ não tem valor negativo. Assim, $\mathcal{U}(t)=1$, e as funções $f(t)$ e $g(t)$ nos dois exemplos acima são, para $t\geq 0$, dadas por

$$f(t)=2-2\mathcal{U}(t-b)\quad \text{e}\quad g(t)=-2+4\,\mathcal{U}(t-1)-3\,\mathcal{U}(t-3)\ \ .$$

Consideremos agora funções descontínuas mais genéricas. Por exemplo, a função $h(t)$ ao lado é dada por



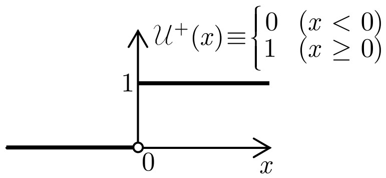

$$\begin{aligned} h(t) \;=\;\; & \phi(t) + \;[\alpha(t)-\phi(t)]\,\mathcal{U}(t-1) + \\ & [0-\alpha(t)]\,\mathcal{U}(t-3) + \;[\beta(t)-0]\,\mathcal{U}(t-4) + \\ & [\gamma(t)-\beta(t)]\,\mathcal{U}(t-6) + \;[-3-\gamma(t)]\,\mathcal{U}(t-8)\ . \end{aligned}$$

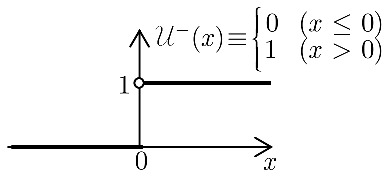
Observe que, em $t = 6$, não há descontinuidade, mas uma mudança de $\beta(t)$ para $\gamma(t)$ na expressão da função $h(t)$.

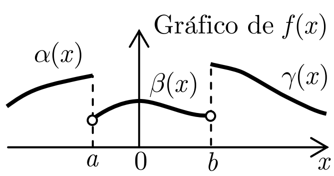
Testando a equação acima com $t = 5$, obtemos o resultado esperado:

$$\begin{aligned} f(5) \;=\;\; & \phi(5) + [\alpha(5)-\phi(5)]\underbrace{\mathcal{U}(4)}_{1} + [0-\alpha(5)]\underbrace{\mathcal{U}(2)}_{1} + [\beta(5)-0]\underbrace{\mathcal{U}(1)}_{1} + [\gamma(5)-\beta(5)]\underbrace{\mathcal{U}(-1)}_{0} \\ & + [-3-\gamma(5)]\underbrace{\mathcal{U}(-3)}_{0} \;=\; \cancel{\phi(5)} + \cancel{\alpha(5)} - \cancel{\phi(5)} - \cancel{\alpha(5)} + \beta(5) \;=\; \beta(5)\ \checkmark \end{aligned}$$

Note que esse cálculo envolve $\phi(5)$, $\alpha(5)$ e $\gamma(5)$, os quais, embora não sejam fornecidos na definição gráfica de $h(t)$, não afetam o resultado, pois se cancelam ou são multiplicados por zero. Podemos, obviamente, completar a definição das funções $\phi(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ acrescentando que elas se anulam fora dos intervalos em que são definidas graficamente.




Para quem não quer deixar indefinidos os valores de funções nos seus pontos de descontinuidade, basta definir duas versões da função degrau unitário, denotadas por $\mathcal{U}^+(x)$ e $\mathcal{U}^-(x)$ e mostradas na figura acima, que só diferem da função $\mathcal{U}(x)$ no ponto de descontinuidade, em $x = 0$, onde são assim definidas: $\mathcal{U}^+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{U}(x) = 1$ e $\mathcal{U}^-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathcal{U}(x) = 0$. Por meio delas, a função $f(x)$ definida graficamente pela terceira figura acima, por exemplo, pode ser assim expressa:

$$f(x) = \alpha(x) + [\beta(x)-\alpha(x)]\,\mathcal{U}^-(x-a) + [\gamma(x)-\beta(x)]\,\mathcal{U}^+(x-b)\ .$$

Essa expressão fornece os valores corretos nos pontos de descontinuidade:

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha(a) + [\beta(a)-\alpha(a)]\underbrace{\mathcal{U}^-(0)}_{0} + [\gamma(a)-\beta(a)]\underbrace{\mathcal{U}^+(a-b)}_{0} \;=\; \alpha(a)\ ; \\ f(b) &= \alpha(b) + [\beta(b)-\alpha(b)]\underbrace{\mathcal{U}^-(b-a)}_{1} + [\gamma(b)-\beta(b)]\underbrace{\mathcal{U}^+(0)}_{1} \;=\; \gamma(b)\ . \end{aligned}$$

Encerremos esta seção com o cálculo da transformada de Laplace de $\mathcal{U}(t-a)$, com $a > 0$ :

$$\boxed{\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\}} = \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{t=a}^{\infty} \boxed{= \frac{e^{-as}}{s}}\ (s>0) \quad \blacksquare$$

É óbvio que essa também é a transformada de Laplace das funções $\mathcal{U}^{\pm}(t-a)$ $(a>0)$ .

## 3.8 Tabela de transformadas de Laplace de funções específicas

Na tabela abaixo, listamos as transformadas de Laplace de algumas funções específicas, já calculadas nas seções anteriores:

| $f(t)$ | $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ | |
|---|---|---|
| $1$ | $\dfrac{1}{s}$ | $(s > 0)$ |
| $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ | $(s > a \in \mathbb{R})$ |
| $t^n$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ | $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ |
| $\cos at$ | $\dfrac{s}{s^2+a^2}$ | $(a \in \mathbb{R},\ s > 0)$ |
| $\operatorname{sen} at$ | $\dfrac{a}{s^2+a^2}$ | $(a \in \mathbb{R},\ s > 0)$ |
| $\cosh at$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}$ | $(s > \lvert a\rvert \in \mathbb{R})$ |
| $\operatorname{senh} at$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}$ | $(s > \lvert a\rvert \in \mathbb{R})$ |
| $\mathcal{U}(t-a)$ | $\dfrac{e^{-as}}{s}$ | $(a > 0,\ s > 0)$ |

## 3.9 Cálculo de $\mathcal{L}$ de $f(at), e^{at}f(t), t^n f(t), \mathcal{U}(t-a)f(t-a), f(t)/t$

Seguem os cálculos dessas cinco transformadas de Laplace:

**1)** $\mathcal{L}\{f(at)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(at)dt \overset{u\,\equiv\, at}{=} \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(s/a)u} f(u)\, du = \frac{1}{a}\,\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$ para $a > 0$ $\blacksquare$

**2)** $\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = \bar{f}(s-a)$

ou, equivalentemente, $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s-a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ $\blacksquare$

**3)** $\mathcal{L}\big\{t^n f(t)\big\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)dt = \int_0^\infty (-1)^n \frac{\partial^n\left(e^{-st}\right)}{\partial s^n} f(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \overbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt}^{\bar{f}(s)}$

$= (-1)^n \bar{f}^{(n)}(s)$ $\blacksquare$

Em particular: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\bar{f}'(s)$ , $\mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\} = \bar{f}''(s)$ , $\mathcal{L}\left\{t^3 f(t)\right\} = -\bar{f}'''(s)$ , $\cdots$

**4)** $\mathcal{L}\big\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\big\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$

$\displaystyle\overset{\tau\,\equiv\, t-a}{=} \int_0^\infty e^{-s(a+\tau)} f(\tau)d\tau = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-as}\bar{f}(s)$ $\blacksquare$

**5)** $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_0^\infty f(t)\left[\frac{e^{-st}}{t}\right]dt = \int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma\right]dt = \int_s^\infty \overbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt}^{\bar{f}(\sigma)}\, d\sigma$

$\displaystyle= \int_s^\infty \bar{f}(\sigma)\, d\sigma$ $\blacksquare$

Exemplos:

i) Como $\mathcal{L}\{\cos t\} = s/(s^2+1)$ , então

$$\mathcal{L}\{\cos 7t\} = \frac{1}{7}\,\frac{(s/7)}{(s/7)^2+\ 1} = \frac{s}{s^2+49}$$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\cos t\} = \frac{s-3}{(s-3)^2+1}$$

Problema inverso: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+1}\right\} = e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = e^{3t}\cos t$ ,

pois $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s-a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ .

ii) Como $\mathcal{L}\{e^{5t}\} = 1/(s-5)$ , então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\,e^{5t}\} &= -\left(\frac{1}{s-5}\right)' = \frac{1}{(s-5)^2} \ , \\
\mathcal{L}\{t^2 e^{5t}\} &= \left(\frac{1}{s-5}\right)'' = \Big[-(s-5)^{-2}\Big]' = 2(s-5)^{-3} = \frac{2}{(s-5)^3} \ .
\end{aligned}$$

Esses dois resultados também podem ser obtidos (e até mais diretamente, evitando derivadas) por meio da propriedade $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \bar{f}(s-a)$, com $f(t)=t$ e $f(t)=t^2$, respectivamente.

iii) $\mathcal{L}\{t\cos t\} = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos t\} = -\dfrac{d}{ds}\Big(\dfrac{s}{s^2+1}\Big) = -\dfrac{s^2+1-s(2s)}{(s^2+1)^2} = \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ .

iv)
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} &\overset{\text{frações parciais}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{-7}{(s-2)^3}\right\} \\
&= -\frac{1}{3}\,e^{-t} + \frac{1}{3}\,e^{2t} + 4t\,e^{2t} - \frac{7}{2}\,t^2 e^{2t}
\end{aligned}$$

v) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1}\,d\sigma = \arctan\sigma\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s \quad (s>0)$

vi) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty \left(\frac{1}{\sigma+1} - \frac{1}{\sigma+3}\right)d\sigma = \ln\frac{\sigma+1}{\sigma+3}\Big|_s^\infty = \ln 1 - \ln\frac{s+1}{s+3} = \ln\frac{s+3}{s+1}$

vii) Cálculo da transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} t^2 & (0\le t<2) \\ -1+t & (t\ge 2) \end{cases}$

*Primeiro modo:* Usando a fórmula $\mathcal{L}\big\{t^n f(t)\big\} = (-1)^n \bar{f}^{(n)}(s)$ (a terceira deduzida acima):

$$\begin{aligned}
f(t) &= t^2 + (-1+t-t^2)\,\mathcal{U}(t-2) = t^2 - \mathcal{U}(t-2) + t\,\mathcal{U}(t-2) - t^2\,\mathcal{U}(t-2) \\
\therefore\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{2}{s^3} - \frac{e^{-2s}}{s} - \left(\frac{e^{-2s}}{s}\right)' - \left(\frac{e^{-2s}}{s}\right)'' \\
&= \frac{2}{s^3} - \frac{e^{-2s}}{s} - \left(-2e^{-2s}\frac{1}{s} - e^{-2s}\frac{1}{s^2}\right) - \left(-4e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-2s}\frac{1}{s^2} + 2e^{-2s}\frac{1}{s^3}\right) \\
&= \frac{2}{s^3} + e^{-2s}\left(-\frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^3}\right) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

*Segundo modo:* Usando a fórmula $\mathcal{L}\big\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\big\} = e^{-as}\bar{f}(s)$ (a quarta deduzida acima):

$$f(t) = t^2 + \underbrace{(-1+t-t^2)}_{\equiv P(t-2)}\mathcal{U}(t-2) = t^2 + P(t-2)\mathcal{U}(t-2)$$

$$\begin{aligned}
P(t-2) &= -1+t-t^2 \quad\Rightarrow\quad P(t) = -1+(t+2)-(t+2)^2 = -3-3t-t^2 \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{P(t-2)\mathcal{U}(t-2)\} = \frac{2}{s^3} + e^{-2s}\bar{P}(s) = \frac{2}{s^3} + e^{-2s}\left(-\frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^3}\right) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

No próximo exemplo, resolvemos novamente o Exemplo (ix) da seção 3.6, mas, agora, completando o quadrado no denominador (em vez de usar frações parciais):

viii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{3\cdot\dfrac{s-1}{(s-1)^2-4}+5\cdot\dfrac{2}{(s-1)^2-4}\right\} = e^t\big[3\cosh 2t+5\,\mathrm{senh}\,2t\big]$

$$= e^t\left[3\cdot\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}+5\cdot\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right] = 4e^{3t}-e^{-t}\ .$$

Modificando um pouco esse exemplo, obtemos o seguinte, que, não admitindo solução por frações parciais (pois o denominador não é, em $\mathbb{R}$, fatorável em monômios), é resolvido pela técnica de completar o quadrado:

ix) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{3\cdot\dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}+5\cdot\dfrac{2}{(s-1)^2+4}\right\} = e^t\big[3\cos 2t+5\,\mathrm{sen}\,2t\big]\ .$

## 3.10 Transformada de Laplace de derivadas

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = \overbrace{e^{-st}f(t)\Big|_{t=0}^{\infty}}^{0-f(0)} + s\overbrace{\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt}^{\mathcal{L}\{f(t)\}} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)\\
&= s\bar{f}(s)-f(0)\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\left[\mathcal{L}\{f'(t)\}\right]-f'(0) = s\left[s\bar{f}(s)-f(0)\right]-f'(0)\\
&= s^2\bar{f}(s)-sf(0)-f'(0)\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f''(t)\}-f''(0) = s[s^2\bar{f}(s)-sf(0)-f'(0)]-f''(0)\\
&= s^3\bar{f}(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)\quad \blacksquare\\
&\ \ \vdots\\
\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n\bar{f}(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Essa última fórmula, para a derivada de ordem $n$, é válida se

- $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes
- $f^{(k)}(t)\Big|_{k=0,1,\cdots,n-1}$ forem contínuas
- $f(t), f'(t),\cdots, f^{(n)}(t)$ forem de ordem exponencial

## 3.11 Transformada de Laplace de integrais

É fácil deduzir que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{\bar{f}(s)}{s}\quad (s>0)\ . \tag{3.2}$$

Eis a dedução:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(u)du\right]dt = \int_0^\infty f(u)\left[\int_u^\infty e^{-st}dt\right]du = \int_0^\infty f(u)\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=u}^{\infty}du\\
&= \int_0^\infty f(u)\,\frac{e^{-s\infty}-e^{-su}}{-s}\,du = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du = \frac{1}{s}\,\bar{f}(s)\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Mais genericamente, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(u)du\right\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du-\int_0^a f(u)du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}-\mathcal{L}\left\{\int_0^a f(u)du\right\}\\
&= \frac{\bar{f}(s)}{s}-\frac{1}{s}\int_0^a f(u)\,du\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Vejamos um exemplo:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen} 2u\, du\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 2t\right\} = \frac{1}{s}\,\frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{s(s^2+4)} \quad ;$$

de fato, obtemos esse mesmo resultado efetuando a integral e então calculando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen} 2u\, du\right\} &= \mathcal{L}\left\{\left.\frac{-\cos 2u}{2}\right|_0^t\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{-\cos 2t + 1}{2}\right\} = -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{\cos 2t\} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{1\} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{s^2}+4-\cancel{s^2}}{s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)} \quad .\end{aligned}$$

Outro exemplo:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-2u}\cos 3u\, du\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cos 3t\right\} = \frac{1}{s}\left.\frac{s'}{s'^{\,2}+9}\right|_{s'=s+2} = \frac{s+2}{s\left[(s+2)^2+9\right)]} \quad .$$

A equação (3.2) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\, du \quad . \tag{3.3}$$

Essa fórmula pode ser útil em vários cálculos da transformada de Laplace inversa. De fato, por meio dela, o exemplo (viii) na p. 61 torna-se mais fácil; o cálculo das frações parciais (omitido naquele exemplo) é mais trabalhoso do que o seguinte:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/\,(s^2+1)}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} du = \int_0^t \operatorname{sen} u\, du = 1 - \cos t \quad .$$

## 3.12 Transformada de Laplace de função periódica

Se a função $f(t)$ tem período $T$, isto é, $f(t) = f(t+T)\ \forall t \geq 0$, então:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \quad . \qquad \text{(i)}$$

Mas

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \stackrel{\tau \,\equiv\, t-T}{=} = \int_T^\infty e^{-s(T+\tau)} \underbrace{f(\tau+T)}_{f(\tau)} d\tau = e^{-sT}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-sT}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \quad . \qquad \text{(ii)}$$

Logo, substituindo (ii) em (i), obtemos

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \quad ,$$

donde

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad \blacksquare$$

Por exemplo, calculemos, usando essa fórmula, a transformada de Laplace da função de período unitário dada por $f(t) = t$ para $0 \leq t < 1$ e $f(t+1) = f(t)$ para todo $t \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-s}} = \frac{\left[\displaystyle\int_0^1 e^{-st} t\, dt\right]}{1-e^{-s}} = \frac{\left[-\dfrac{e^{-s}}{s} + \dfrac{1-e^{-s}}{s^2}\right]}{1-e^{-s}} = \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})} \quad .$$

## 3.13 Cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\}$ por convolução

A operação definida abaixo entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$,

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du \quad ,$$

é chamada de convolução ou produto convolutivo dessas funções. É uma operação comutativa:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du \overset{v\,\equiv\, t-u}{=} \int_0^t g(v)\, f(t-v)\, dv = g(t) * f(t) \quad .$$

O chamado teorema da convolução diz que a transformada de Laplace inversa do produto *aritmético* $\bar{f}(s)\bar{g}(s)$ é o produto *convolutivo* $f(t) * g(t)$, isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = f(t) * g(t) \quad .$$

A prova desse teorema é como segue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du\right\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st} \int_0^t du\, f(u)\, g(t-u) \\
&= \int_0^\infty du\, f(u) \int_u^\infty dt\, e^{-st} g(t-u) \overset{v\,\equiv\, t-u}{=} \int_0^\infty du\, f(u) \int_0^\infty dv\, e^{-s(u+v)} g(v) \\
&= \underbrace{\int_0^\infty du\, e^{-su} f(u)}_{\bar{f}(s)} \underbrace{\int_0^\infty dv\, e^{-sv} g(v)}_{\bar{g}(s)} = \bar{f}(s)\bar{g}(s) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplifiquemos seu uso:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 s^2}\right\} &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}}_{t\,e^{-t}} * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}}_{t} = \underbrace{(t\,e^{-t})}_{f(t)} * \underbrace{t}_{g(t)} = \int_0^t \underbrace{u\,e^{-u}}_{f(u)} \underbrace{(t-u)}_{g(t-u)}\, du \\
&= t\int_0^t u\,e^{-u}\, du - \int_0^t u^2 e^{-u} du = \cdots = t\,e^{-t} + 2e^{-t} + t - 2 \quad .
\end{aligned}$$

Conferindo: $\mathcal{L}\{t\,e^{-t} + 2e^{-t} + t - 2\} = \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{2}{s} = \dfrac{1}{s^2(s+1)^2}$ ✓

Como exemplo adicional, recalculemos a transformada de Laplace inversa já obtida, usando frações parciais, no Exemplo (viii) da seção 3.6 (página 60):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)\, s}\right\} &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}}_{\operatorname{sen} t} * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{1} = \underbrace{\operatorname{sen} t}_{f(t)} * \underbrace{1}_{g(t)} = \int_0^t \underbrace{\operatorname{sen} u}_{f(u)}\, \underbrace{1}_{g(t-u)}\, du \\
&= \int_0^t \operatorname{sen} u\, du = -\cos u\Big|_0^t = -\cos t + 1 \quad .
\end{aligned}$$

## 3.14 Tabela de transformadas de Laplace com funções genéricas

Na tabela abaixo, listamos as fórmulas envolvendo transformadas de Laplace de funções genéricas que já foram deduzidas nas seções anteriores:

**1)** $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\bar{f}(s) + b\bar{g}(s)$

**2)** $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\bar{f}(s) - f(0)$

**3)** $\mathcal{L}\{f''\} = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$

**4)** $\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\bar{f}(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$

**5)** $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\bar{f}(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

**6)** $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \dfrac{\bar{f}(s)}{s}$

**7)** $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\bar{f}'(s)$

**8)** $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \bar{f}''(s)$

**9)** $\mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = -\bar{f}'''(s)$

**10)** $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \bar{f}^{(n)}(s)$

**11)** $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}\,\bar{f}\left(\dfrac{s}{a}\right)$

**12)** $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s-a)$

**13)** $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\bar{f}(s)\} = \mathcal{U}(t-a)f(t-a)$

**14)** $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = f(t) * g(t)$

**15)** $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)dt$ para uma função $f(t)$ de período $T$

**16)** $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty \bar{f}(\sigma)d\sigma$

## 3.15 Uma aplicação: cálculo de integrais definidas

Eis alguns exemplos de como a transformada de Laplace auxilia no cálculo de integrais definidas:

$$\text{i)}\ \int_0^\infty t\,e^{-2t}\cos t\;dt = \int_0^\infty e^{-st} t\cos t\;dt\Big|_{s=2} = \mathcal{L}\{t\cos t\}\Big|_{s=2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{3}{25}\ ,$$

onde usamos o resultado obtido no exemplo (iii) da seção 3.9.

$$\text{ii)}\ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\Big(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big)\,dt\Big|_{s\to 0^+} = \frac{\pi}{2} - \arctan s\,\Big|_{s\to 0^+} = \frac{\pi}{2}\ ,$$

onde usamos o resultado obtido no exemplo (v) da seção 3.9.

$$\text{iii)}\ \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\Big(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\Big)\,dt\Big|_{s=0} = \ln\frac{s+3}{s+1}\,\Big|_{s=0} = \ln 3\ ,$$

onde usamos o resultado obtido no exemplo (vi) da seção 3.9.

A aplicação dessa técnica requer atenção com o valor de $s$ a ser substituído, como mostra o cálculo errôneo seguinte:

$$\int_0^\infty e^{2t}t^9 dt = \int_0^\infty e^{-st}t^9 dt\Big|_{s=-2} = \mathcal{L}\{t^9\}\Big|_{s=-2} = \frac{9!}{s^{10}}\Big|_{s=-2} = \frac{9!}{2^{10}}\ .$$

Esse resultado não pode ser correto, pois a integral é claramente divergente: o integrando $e^{2t}t^9$ não tende a zero quando $t\to\infty$, não satisfazendo uma condição necessária para a convergência da integral. O erro está no uso da fórmula $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ com $s=-2$, violando a restrição $s>0$ (cf. seção 3.4, item **2**).

## 3.16 Outra aplicação: resolução de EDOs

Observe alguns exemplos de como a transformada de Laplace auxilia na resolução de equações diferenciais ordinárias:

i) $y' - 3y = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{y' - 3y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} \quad \Rightarrow \quad s\bar{y}(s) - y(0) - 3\bar{y}(s) = 1/(s-2)$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \frac{y(0)}{s-3} + \frac{1}{(s-2)(s-3)} \overset{\text{frações parciais}}{=} \frac{-1}{s-2} + \frac{y(0)+1}{s-3} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad y(t) = -e^{2t} + \big[\underbrace{y(0)+1}_{\equiv c}\big]e^{3t} \ ,$$

que é a solução geral, haja vista a presença da constante arbitrária $c \equiv y(0) + 1$ [não há restrição no valor de $y(0)$]. Note que, na solução geral obtida, se fizermos $t = 0$, obtemos a identidade $y(0) = y(0)$.

ii) Resolução do problema de valor inicial $\;y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}\ ,\ \ y(0) = 2\ ,\ \ y'(0) = 6$ :

$$y'' - 6y' + 9y = \ t^2e^{3t} \quad \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \quad s^2\bar{y}(s) - s\underbrace{y(0)}_{2} - \underbrace{y'(0)}_{6} - 6\,[s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_{2}] + 9\bar{y}(s) = \ 2/(s-3)^3$$

$$\underbrace{(s^2 - 6s + 9)}_{(s-3)^2}\,\bar{y}(s) = \ 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \ \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

$$y(t) = \ 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 2e^{3t}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}}_{t^4/4!} = \ 2e^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t}$$

iii) Resolução do problema de valor inicial $\;y' - 5y(t) = f(t) = \begin{cases} 2 & (0 \le t < 4) \\ -3 & (t \ge 4) \end{cases}\ ,\ \ y(0) = 0$ :

$$y' - 5y(t) = f(t) = 2 - 5\mathcal{U}(t-4)$$

$$\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \quad s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_{0} - 5\bar{y}(s) = \frac{2}{s} - 5\,\frac{e^{-4s}}{s} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \ \underbrace{\frac{1}{s(s-5)}}_{\frac{-1/5}{s} + \frac{1/5}{s-5}}\ \big(2 - 5e^{-4s}\big)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \frac{-2/5}{s} + \frac{2/5}{s-5} + \underbrace{\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-5}\Big)}_{\downarrow\mathcal{L}^{-1} \atop 1-e^{5t}}\,e^{-4s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{2}{5}(e^{5t} - 1) + \big[1 - e^{5(t-4)}\big]\,\mathcal{U}(t-4)\ .$$

Essa solução também pode ser escrita, sem uso da função degrau, na forma

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}(e^{5t} - 1) & (0 \le t \le 4) \\[2ex] \dfrac{2}{5}(e^{5t} - 1) + 1 - e^{5(t-4)} & (t \ge 4)\ . \end{cases}$$

Note que $\;y(4^-) = y(4^+) = 2(e^{20} - 1)/5$ . A solução obtida é, de fato, contínua em $t = 4$, o que teria ficado mais evidente se tivéssemos empregado a função degrau $\mathcal{U}^+(t-4)$.

## 3.17 Exercícios

Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ , pelo modo indicado, se solicitado:

1. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} 3t$
2. $f(t) = \cos 3t \operatorname{senh} 8t$
3. $f(t) = t\, e^t \operatorname{senh} 2t$
4. $f(t) = t\, e^{-3t} \cos 6t$
5. $f(t) = t^5 \cosh 3t$
6. $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$
7. $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$
8. $f(t) = \begin{cases} -1 & (0 \le t < 1) \\ 1 & (t \ge 1) \end{cases}$
9. $f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < 2) \\ 5 & (2 \le t < 4) \\ -3 & (4 \le t < 6) \\ 0 & (t \ge 6) \end{cases}$
10. $\bar{f}(s) = \dfrac{7s}{4s^2 - 24s + 61}$
11. $\bar{f}(s) = \dfrac{1}{3s(2s-5)}$
12. $\bar{f}(s) = \ln \dfrac{s-3}{s+1}$
13. $\bar{f}(s) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{s}{2}$
14. $\bar{f}(s) = \ln \dfrac{s^2+1}{s^2+4}$
15. $\bar{f}(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s} + \operatorname{arccot} \dfrac{4}{s}$
16. $f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < 1) \\ 2t - 3 & (t \ge 1) \end{cases}$
17. $f(t) = \begin{cases} t - 1 & (0 \le t < 2) \\ 0 & (t \ge 2) \end{cases}$
18. $f(t) = \mathcal{U}(t-a) \operatorname{sen} t$
19. $\bar{f}(s) = \dfrac{e^{-5s}}{s^3}$
20. $\bar{f}(s) = \dfrac{e^{-5s}}{s-2}$
21. $\bar{f}(s) = \dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}$
22. $\bar{f}(s) = \dfrac{e^{-5s}}{s^2+9}$

23. $\bar{f}(s) = \dfrac{s+\pi}{s^2+\pi^2}\, e^{-s}$

24. $f(t) = t^3 e^{2t}\, \mathcal{U}(t-5)$

25. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$

26. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{e^{au}-e^{bu}}{u}\, du$

27. $f(t) = f(t+2)\ \forall t>0 \quad \text{e} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t < 1) \\ -1 & (1 \le t < 2) \end{cases}$

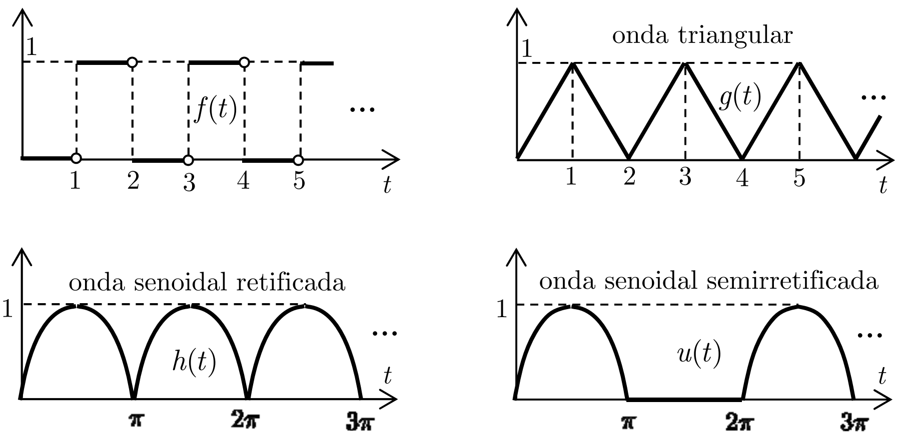
28. $f(t) = f(t+2)\ \forall t>0 \quad \text{e} \quad f(t) = t \ \ (0 \le t < 2)$

29. as funções periódicas $f(t), g(t), h(t)$ e $u(t)$ definidas pelos gráficos na figura abaixo.

30. a função $\bar{f}(s)$ do exemplo (vii) da seção 3.6, pelo teorema da convolução

31. $\bar{f}(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ , pelo teorema da convolução

32. $\bar{f}(s) = \dfrac{1}{(s^2+4s+5)^2}$ , pelo teorema da convolução




Exercícios sobre o uso da transformada de Laplace no cálculo de integrais:

33. Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ .

34. Calcule $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2t} t^9 dt$ .

Resolva por meio da transformada de Laplace:

35. $y'' + 2y' + y = f(t) \equiv \begin{cases} 0 & (0 \le t < 1) \\ 1 & (1 \le t < 2) \\ -1 & (2 \le t < 3) \\ 0 & (t \ge 3) \end{cases}$ sob as condições $y(0)=0$ e $y'(0)=0$

36. $y'' + 3y' - 4y(t) = 0$ sob as condições:
a) $y(0) = y'(0) = 1$ b) $y(0) = 1,\ \ y'(1) = -4e^{-4}$ c) $y(1) = e + e^{-4},\ \ y'(1) = e - 4e^{-4}$

## 3.18 Soluções dos Exercícios

**Prob. 1**

$$f(t) = t^2 \operatorname{sen} 3t \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \cdots$$

**Prob. 2**

$$f(t) = \operatorname{senh} 8t \cos 3t = \frac{e^{8t} - e^{-8t}}{2} \cdot \underbrace{\cos 3t}_{\substack{\downarrow\mathcal{L} \\ \frac{s}{s^2+9}}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{s-8}{(s-8)^2+9} - \frac{s+8}{(s+8)^2+9}\right]$$

**Prob. 3**

$$f(t) = te^t \underbrace{\operatorname{senh} 2t}_{\substack{\downarrow\mathcal{L} \\ \frac{2}{s^2-4}}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(s) = -\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{(s-1)^2-4}\right] = \cdots$$

ou $\quad f(t) = te^t\dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) \underset{\substack{\downarrow\mathcal{L} \\ 1/s^2}}{t} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(s) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(s-3)^2} - \dfrac{1}{(s+1)^2}\right]$

**Prob. 4**

$$\mathcal{L}\{te^{-3t} \underbrace{\cos 6t}_{\substack{\downarrow\mathcal{L} \\ \frac{s}{s^2+36}}}\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+36}\right] = \cdots$$

**Prob. 5**

$$\mathcal{L}\{t^5 \cosh 3t\} = \mathcal{L}\left\{t^5\Big(\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}\Big)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{3t}t^5\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-3t}t^5\right\} = \frac{5!}{2(s-3)^6} + \frac{5!}{2(s+3)^6}$$

**Prob. 6**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} &= \int_s^\infty \Big(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s'+1}\Big)\, ds' = \Big[\ln s' - \ln(s'+1)\Big]_s^\infty \\
&= \ln \frac{s'}{s'+1}\Big|_s^\infty = \ln\Bigg(\underbrace{\lim_{s'\to\infty} \frac{s'}{s'+1}}_{=1}\Bigg) - \ln\frac{s}{s+1} = \ln\frac{s+1}{s}
\end{aligned}$$

**Prob. 7**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\} &= \int_s^\infty \Big(\frac{1}{s'} - \frac{s'}{s'+1}\Big)\, ds' = \Big[\ln s' - \frac{1}{2}\ln(s'^2+1)\Big]_s^\infty = \ln\frac{s'}{\sqrt{s'^2+1}}\Big|_s^\infty \\
&= \ln\Bigg(\underbrace{\lim_{s'\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s'^2}}}}_{=1}\Bigg) - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}
\end{aligned}$$

**Prob. 8**

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (0 \le t < 1) \\ \phantom{-}1 & (t \ge 1) \end{cases} \quad = \quad -1 + 2\mathcal{U}(t-1) \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(s) = -\frac{1}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s}\ ,$$

ou, sem usar a função degrau,

$$\begin{aligned}
\bar{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^1 e^{-st}(-1)dt + \int_1^\infty e^{-st}(1)dt = \frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^1 - \frac{e^{-st}}{s}\Big|_1^\infty \\
&= \frac{e^{-s}-1}{s} - \frac{\cancelto{0}{e^{-s\infty}} - e^{-s}}{s} = -\frac{1}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s}\ .
\end{aligned}$$

**Prob. 9**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < 2) \\ 5 & (2 \le t < 4) \\ -3 & (4 \le t < 6) \\ 0 & (t \ge 6) \end{cases} \quad = \quad 5\mathcal{U}(t-2) - 8\mathcal{U}(t-4) + 3\mathcal{U}(t-6) \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(s) = 5\frac{e^{-2s}}{s} - 8\frac{e^{-4s}}{s} + 3\frac{e^{-6s}}{s}$$

**Prob. 10**

$$\bar{f}(s)=\frac{7s}{4s^2-24s+61}=\frac{7}{4}\left[\frac{s}{(s-3)^2+(5/2)^2}\right]=\frac{7}{4}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+(5/2)^2}+\frac{6}{5}\cdot\frac{5/2}{(s-3)^2+(5/2)^2}\right]$$

$$\therefore\ f(t)=\frac{7}{4}\,e^{3t}\left[\cos\frac{5t}{2}+\frac{6}{5}\operatorname{sen}\frac{5t}{2}\right]$$

**Prob. 11**

<u>1º modo</u>: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{3s(2s-5)}\right\}=\dfrac{1}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1/\,(s-5/2)}{s}\right\}=\dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^t e^{5u/2}\,du=\dfrac{1}{15}\big(e^{5t/2}-1\big)$

<u>2º modo</u>: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{3s(2s-5)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-1/5}{3s}+\dfrac{2/15}{2s-5}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-1/15}{s}+\dfrac{1/15}{s-5/2}\right\}=\dfrac{-1}{15}+\dfrac{1}{15}\,e^{5t/2}$

<u>3º modo</u>: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{3s(2s-5)}\right\}=\dfrac{1}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s-5/2}\right\}=\dfrac{1}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}*\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-5/2}\right\}=\dfrac{1}{6}\cdot 1*e^{5t/2}$

$$=\frac{1}{6}\int_0^t e^{5u/2}\,du=\frac{1}{15}\big(e^{5t/2}-1\big)$$

**Prob. 12**

$$\bar{f}(s)=\ln\frac{s-3}{s+1}=\ln(s-3)-\ln(s+1)\quad\Rightarrow\quad\bar{f}'(s)=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\quad -t\,f(t)=e^{3t}-e^{-t}\quad\Rightarrow\quad f(t)=-\frac{e^{3t}-e^{-t}}{t}$$

**Prob. 13**

$$\bar{f}(s)=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{2}\quad\Rightarrow\quad\bar{f}'(s)=-\frac{1/2}{1+(s/2)^2}=-\frac{2}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\quad -t\,f(t)=-\operatorname{sen}2t\quad\Rightarrow\quad f(t)=\frac{\operatorname{sen}2t}{t}$$

**Prob. 14**

$$\bar{f}(s)=\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}=\ln(s^2+1)-\ln(s^2+4)\quad\Rightarrow\quad\bar{f}'(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2s}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\quad -t\,f(t)=2\cos t-2\cos 2t\quad\Rightarrow\quad f(t)=\frac{2}{t}\,(\cos 2t-\cos t)$$

**Prob. 15**

$$f(t)\;=\;\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\}}_{\mathcal{U}(t-3)}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{\overbrace{\operatorname{arccot}\frac{4}{s}}^{\bar{g}(s)}\Bigg\}}_{g(t)}\;=\;\mathcal{U}(t-3)-\frac{\operatorname{sen}4t}{t}\quad,$$

pois $\bar{g}'(s)=-\dfrac{-4/s^2}{1+(4/s)^2}=\dfrac{4}{s^2+16}\quad\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\quad -t\,g(t)=\operatorname{sen}4t\quad\Rightarrow\quad g(t)=-\dfrac{\operatorname{sen}4t}{t}\quad.$

**Prob. 16**

$$f(t)=\begin{cases}0 & (0\le t<1)\\ 2t-3 & (t\ge 1)\end{cases}\;=\;(2t-3)\,\mathcal{U}(t-1)$$

<u>1º modo</u>: Se $p(t-1)\equiv 2t-3$ então $p(t)=2(t+1)-3=2t-1$, donde $\bar{p}(s)=\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{1}{s}$

$$\therefore\ f(t)=p(t-1)\,\mathcal{U}(t-1)\quad\Rightarrow\quad\bar{f}(s)=\bar{p}(s)\,e^{-s}=\left(\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}\right)e^{-s}$$

<u>2º modo</u> (pode levar a mais contas): $f(t)=(2t-3)\,\mathcal{U}(t-1)=2t\,\mathcal{U}(t-1)-3\,\mathcal{U}(t-1)$

$$\therefore\ \bar{f}(s)=-2\,\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)-3\,\frac{e^{-s}}{s}=-2\cdot\frac{-e^{-s}s-e^{-s}}{s^2}-3\cdot\frac{e^{-s}}{s}=\cdots=\left(\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}\right)e^{-s}$$

**Prob. 17**

$$f(t)=\begin{cases}t-1 & (0\le t<2)\\ 0 & (t\ge 2)\end{cases}\;=\;t-1-\underbrace{(t-1)}_{p\,(t-2)}\mathcal{U}(t-2)\quad\Rightarrow\quad\bar{f}(s)=\mathcal{L}\{t-1\}-\bar{p}(s)\,e^{-2s}$$

$$p\,(t-2)=t-1\quad\Rightarrow\quad p(t)=t+2-1=t+1\quad\Rightarrow\quad\bar{p}(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}$$

$$\therefore\ \bar{f}(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}-\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-2s}$$

**Prob. 18**

$$f(t)=\mathcal{U}(t-a)\underbrace{\operatorname{sen}t}_{q(t-a)}=\mathcal{U}(t-a)\,q(t-a)\quad\Rightarrow\quad\bar{f}(s)=e^{-as}\bar{q}(s)\ .\qquad\text{(I)}$$

$$q\,(t-a)=\operatorname{sen}t\quad\Rightarrow\quad q\,(t)=\operatorname{sen}(t+a)=\operatorname{sen}a\cos t+\cos a\operatorname{sen}t\ .$$

$$\bar{q}(s)=(\operatorname{sen}a)\,\frac{s}{s^2+1}+(\cos a)\,\frac{1}{s^2+1}=\frac{s\operatorname{sen}a+\cos a}{s^2+1}\ .\qquad\text{(II)}$$

Com (II) em (I), obtemos a resposta: $\bar{f}(s)=\dfrac{e^{-as}}{s^2+1}\,(s\operatorname{sen}a+\cos a)$

**Prob. 19**

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{e^{-5s}\ \underbrace{\frac{1}{s^3}}_{\substack{\downarrow\mathcal{L}^{-1}\\ t^2/2}}\Bigg\}=\mathcal{U}(t-5)\,\frac{(t-5)^2}{2}$$

**Prob. 20**

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{e^{-5s}\ \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{\substack{\downarrow\mathcal{L}^{-1}\\ e^{2t}}}\Bigg\}=\mathcal{U}(t-5)\,e^{2(t-5)}$$

**Prob. 21**

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{e^{-5s}\ \underbrace{\frac{1}{(s-2)^4}}_{\substack{\downarrow\mathcal{L}^{-1}\\ e^{2t}t^3/3!}}\Bigg\}=\mathcal{U}(t-5)\,e^{2(t-5)}\,\frac{(t-5)^3}{6}$$

**Prob. 22**

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{e^{-5s}\ \underbrace{\frac{1}{s^2+9}}_{\substack{\downarrow\mathcal{L}^{-1}\\ (\operatorname{sen}3t)/3}}\Bigg\}=\mathcal{U}(t-5)\frac{1}{3}\operatorname{sen}3(t-5)$$

**Prob. 23**

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{s+\pi}{s^2+\pi^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{e^{-s}\Bigg[\underbrace{\frac{s}{s^2+\pi^2}}_{\substack{\downarrow\mathcal{L}^{-1}\\ \cos\pi t}}+\underbrace{\frac{\pi}{s^2+\pi^2}}_{\substack{\downarrow\mathcal{L}^{-1}\\ \operatorname{sen}\pi t}}\Bigg]\Bigg\}$$

$$=\mathcal{U}(t-1)\Big[\underbrace{\cos\pi(t-1)}_{-\cos\pi t}+\underbrace{\operatorname{sen}\pi(t-1)}_{-\operatorname{sen}\pi t}\Big]=-(\cos\pi t+\operatorname{sen}\pi t)\,\mathcal{U}(t-1)$$

**Prob. 24**

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\underbrace{t^3}_{p(t-5)}\,e^{2t}\,\mathcal{U}(t-5)\}=\mathcal{L}\{e^{2t}p(t-5)\mathcal{U}(t-5)\}=\Big[\bar{p}(s')\,e^{-5s'}\Big]_{s'=s-2}=\bar{p}\,(s-2)\,e^{-5(s-2)}\ .$$

Por outro lado, $p(t)=(t+5)^3=t^3+15t^2+75t+125\quad\Rightarrow\quad\bar{p}(s)=\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{30}{s^3}+\dfrac{75}{s^2}+\dfrac{125}{s}\quad.$

Logo, $\mathcal{L}\{f(t)\}=\left[\dfrac{6}{(s-2)^4}+\dfrac{30}{(s-2)^3}+\dfrac{75}{(s-2)^2}+\dfrac{125}{s-2}\right]e^{-5(s-2)}\ .$

**Prob. 25**

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du\right\}=\frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen}t}{t}\right\}=\frac{1}{s}\int_s^\infty\frac{1}{s'^2+1}\,ds'=\frac{1}{s}\arctan s'\Big|_s^\infty=\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan s\right)$$

**Prob. 26**

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t\frac{e^{au}-e^{bu}}{u}\,du\right\}=\frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\right\}=\frac{1}{s}\int_s^\infty\left(\frac{1}{s'-a}-\frac{1}{s'-b}\right)ds'=\frac{1}{s}\left[\ln\frac{s'-a}{s'-b}\right]_s^\infty$$

$$= \frac{1}{s}\Big[\ln 1 - \ln\frac{s-a}{s-b}\Big] = \frac{1}{s}\ln\frac{s-b}{s-a}$$

**Prob. 27**

$$\begin{aligned}\bar{f}(s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt = \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{-st}(1)\,dt + \int_1^2 e^{-st}(-1)\,dt}{1-e^{-2s}} = \frac{-\frac{1}{s}\,e^{-st}\Big|_{t=0}^{1} + \frac{1}{s}\,e^{-st}\Big|_{t=1}^{2}}{1-e^{-2s}}\\ &= \frac{\big(-e^{-s}+1+e^{-2s}-e^{-s}\big)}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s(1+e^{-s})(1-e^{-s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}\ .\end{aligned}$$

**Prob. 28**

$$\bar{f}(s) = \frac{\displaystyle\int_0^2 e^{-st}t\,dt}{1-e^{-2s}} = \frac{-\frac{t}{s}\,e^{-st}\Big|_{t=0}^{2} + \frac{1}{s}\displaystyle\int_0^2 e^{-st}dt}{1-e^{-2s}} = \frac{\frac{-2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_{t=0}^{2}}{1-e^{-2s}} = \frac{1-(1+2s)e^{-2s}}{1-e^{-2s}}\ .$$

**Prob. 29**

- $$\begin{aligned}\bar{f}(s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_1^2 e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{t=1}^{2}\\ &= -\frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{e^{-s}\cancel{(1-e^{-s})}}{s(1+e^{-s})\cancel{(1-e^{-s})}} = \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}\ .\end{aligned}$$

- $$g(t)=g(t+2)\ \text{ e }\ g(t)=\begin{cases} t & (0\le t<1)\\ 2-t & (1\le t<2)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \bar{g}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}g(t)\,dt$$
$$\Rightarrow\quad \bar{g}(s) = \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{-st}t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)dt}{1-e^{-2s}} = \cdots = \frac{1-2e^{-s}(1+s)-e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}\ .$$

- $$\bar{h}(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}h(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\,\mathrm{sen}\,t\,dt = \cdots = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\ .$$

- $$\bar{u}(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}u(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\,\mathrm{sen}\,t\,dt = \cdots = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\ .$$

**Prob. 30**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s-2)\,(s-5)}\Big\} &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-2}\Big\} * \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-5}\Big\} = e^{2t}*e^{5t} = \int_0^t e^{2u}e^{5(t-u)}du = e^{5t}\int_0^t e^{-3u}du\\ &= e^{5t}\,\frac{e^{-3t}}{-3}\Big|_0^t = e^{5t}\,\frac{e^{-3t}-1}{-3} = \frac{e^{5t}-e^{-2t}}{3}\end{aligned}$$

**Prob. 31**

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2+1}\Big\} * \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2+1}\Big\} = \mathrm{sen}\,t * \mathrm{sen}\,t = \int_0^t \mathrm{sen}\,(t-u)\,\mathrm{sen}\,u\,du$$
$$= \int_0^t [\mathrm{sen}\,t\cos u - \mathrm{sen}\,u\cos t]\,\mathrm{sen}\,u\,du = (\,\mathrm{sen}\,t)\int_0^t \mathrm{sen}\,u\cos u\,du - (\cos t)\int_0^t \mathrm{sen}^2 u\,du$$
$$= (\,\mathrm{sen}\,t)\Big[\frac{\mathrm{sen}^2 u}{2}\Big]_0^t - (\cos t)\Big[\frac{u}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2u}{4}\Big]_0^t = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^3 t - \Big(\frac{t}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2t}{4}\Big)\cos t$$

**Prob. 32**

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s^2+4s+5)^2}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{[(s+2)^2+1]^2}\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\Big\} * \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\Big\}$$
$$= (e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t) * (e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t) = \int_0^t e^{-2u}\,\mathrm{sen}\,u\;e^{-2(t-u)}\,\mathrm{sen}\,(t-u)\,du$$
$$= e^{-2t}\underbrace{\int_0^t \mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,(t-u)\,du}_{\text{já calculada no Prob. 31}} = e^{-2t}\Big[\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^3 t - \Big(\frac{t}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2t}{4}\Big)\cos t\Big]$$

**Prob. 33**

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t}{t}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\right\}\bigg|_{s=1} = \int_s^\infty \frac{1}{s'^2+1}\,ds'\bigg|_{s=1} = \arctan s'\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

**Prob. 34**

$$\int_0^\infty e^{-2t}t^9 dt = \int_0^\infty e^{-st}t^9 dt\bigg|_{s=2} = \mathcal{L}\{t^9\}\bigg|_{s=2} = \frac{9!}{s^{10}}\bigg|_{s=2} = \frac{9!}{2^{10}}$$

**Prob. 35**

$$y''+2y'+y = f(t) \equiv \begin{cases} 0 & (0\le t<1) \\ 1 & (1\le t<2) \\ -1 & (2\le t<3) \\ 0 & (t\ge 3) \end{cases} \quad \text{sob as condições } \ y(0)=0 \ \text{ e } \ y'(0)=0 \ :$$

$$\mathcal{L}\left\{y''+2y'+y\right\} = \mathcal{L}\Big\{\overbrace{\mathcal{U}(t-1)-2\mathcal{U}(t-2)+\mathcal{U}(t-3)}^{f(t)}\Big\}$$

$$\Rightarrow\quad s^2\bar{y}(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} \ + \ 2\,[s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_{0}] + \bar{y}(s) \ = \ (s+1)^2\bar{y}(s) = \frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$\Rightarrow\quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \frac{e^{-3s}}{s(s+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\bar{g}(s) - 2e^{-2s}\bar{g}(s) + e^{-3s}\bar{g}(s)\right\}\ ,$$

onde

$$\bar{g}(s) \equiv \frac{1}{s(s+1)^2} \overset{\substack{\text{frações}\\\text{parciais}}}{=} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \quad\Rightarrow\quad g(t) = 1 - e^{-t} - t\,e^{-t}\ .$$

$$\therefore\ \ y(t) = \mathcal{U}(t-1)g(t-1) - 2\mathcal{U}(t-2)g(t-2) + \mathcal{U}(t-3)g(t-3)\ ,$$

$$\begin{aligned} \text{ou}\qquad y(t) \ = \ & \ \ \mathcal{U}(t-1)\left[1-e^{-(t-1)}-(t-1)\,e^{-(t-1)}\right] \\ & -2\,\mathcal{U}(t-2)\left[1-e^{-(t-2)}-(t-2)\,e^{-(t-2)}\right] \\ & +\mathcal{U}(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}-(t-3)\,e^{-(t-3)}\right]\ . \end{aligned}$$

**Prob. 36**

$$y''+3y'-4y(t)=0 \ \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}\ s^2\bar{y}(s) - sy(0) - y'(0) + 3\,[s\bar{y}(s)-y(0)] - 4\bar{y}(s) = 0$$

$$\Rightarrow\quad (\underbrace{s^2+3s-4}_{(s-1)(s+4)})\,\bar{y}(s) = y(0)s+3y(0)+y'(0) \quad\Rightarrow\quad \bar{y}(s) = \frac{y(0)s+3y(0)+y'(0)}{(s-1)(s+4)} \qquad \langle 1\rangle$$

<u>Item (a)</u>: Substituindo $y(0)=y'(0)=1$ na equação $\langle 1\rangle$, obtemos

$$y(s) = \frac{s+4}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{s-1} \ \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}\ y(t)=e^t\ .$$

<u>Item (b)</u>: $y(0)=1,\ y'(1)=-4e^{-4}$ . A equação $\langle 1\rangle$ com $y(0)=1$ fornece

$$y(s) = \frac{s+3+y'(0)}{(s-1)(s-4)} = \frac{\overbrace{\left[\frac{y'(0)+4}{5}\right]}^{c_1}}{s-1} + \frac{\overbrace{\left[\frac{y'(0)-1}{-5}\right]}^{1-c_1}}{s+4} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{1-c_1}{s+4} \quad\Rightarrow\quad y(t) = c_1\,e^t + (1-c_1)\,e^{-4t}\,.$$

Acima, mudamos da constante arbitrária $y'(0)$ para a constante $c_1$, também arbitrária, pois a determinação de $c_1$ envolve menos contas que a de $y'(0)$. Agora usamos a outra condição, $y'(1)=-4e^{-4}$, para determinar $c_1$:

$$\begin{aligned} y'(t) = c_1\,e^t - 4(1-c_1)\,e^{-4t} \ &\Rightarrow\ y'(1) = c_1\,e - 4(1-c_1)\,e^{-4} = -4e^{-4} \\ \Rightarrow\ c_1(e+4\,e^{-4}) = 0 \ &\Rightarrow\ c_1 = 0 \ \Rightarrow\ y(t) = e^{-4t}\ . \end{aligned}$$

Item (c): $y(1) = e + e^{-4}, \quad y'(1) = e - 4e^{-4}$

$$y(s) = \frac{y(0)s + 3 + y'(0)}{(s-1)(s-4)} = \frac{\overbrace{\left[\frac{4y(0)+y'(0)}{5}\right]}^{c_1}}{s-1} + \frac{\overbrace{\left[\frac{-y(0)+y'(0)}{-5}\right]}^{c_2}}{s+4} \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-4t}\,.$$

Aqui também mudamos das constantes arbitrárias $y(0)$ e $y'(0)$ para as constante arbitrárias $c_1$ e $c_2$, assim simplificando as contas. Usando as duas condições iniciais, obtemos um sistema algébrico com as incógnitas $c_1$ e $c_2$; resolvendo-o, acabamos a resolução:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} y(1) & = & c_1\, e + c_2\, e^{-4} & = & e + e^{-4} \\ y'(1) & = & c_1 e - 4c_2 e^{-4} & = & e - 4e^{-4} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^t + e^{-4t} \quad .$$

# Capítulo 4

# Sistemas de EDOs Lineares de Coeficientes Constantes

## 4.1 Resolução pelo método dos operadores

Esse método consiste em escrever um sistema como, por exemplo,

$$\begin{cases} x'' + 2x' + y'' &= x(t) + 3y(t) + \operatorname{sen} t \\ x' + y' &= -4x(t) + 2y(t) + e^{-t} \end{cases}$$

na seguinte forma, usando o operador $\hat{D} = d/dt$ ,

$$\begin{cases} (\hat{D}^2 + 2\hat{D} - 1)\, x(t) &+ & (\hat{D}^2 - 3)\, y(t) &= & \operatorname{sen} t \\ (\hat{D} + 4)\, x(t) &+ & (\hat{D} - 2)\, y(t) &= & e^{-t} \end{cases}$$

e resolvê-lo, por eliminação ou determinantes, conforme mostramos abaixo, considerando sistemas mais simples para facilitar a exposição:

### 4.1.1 Por eliminação

Exemplo 1: $\begin{cases} x' &= 3y(t) \\ y' &= 2x(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{D}x - 3y &= 0 \\ 2x - \hat{D}y &= 0 \end{cases}$

Eliminando $y$ :

$$(+)\begin{cases} \hat{D}\,(\hat{D}x - 3y) &= 0 \\ -3\,(2x - \hat{D}y) &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\hat{D}^2 - 6)\, x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = c_1\, e^{\sqrt{6}\, t} + c_2\, e^{-\sqrt{6}\, t}$$

Eliminando $x$ :

$$(+)\begin{cases} 2\,(\hat{D}x - 3y) &= 0 \\ -\hat{D}\,(2x - \hat{D}y) &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\hat{D}^2 - 6)\, y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_3\, e^{\sqrt{6}\, t} + c_4\, e^{-\sqrt{6}\, t}$$

As quatro constantes não são arbitrárias, pois o sistema as relaciona:

$$\begin{aligned} 0 &= x' - 3y = \sqrt{6}\, c_1\, e^{\sqrt{6}\, t} - \sqrt{6}\, c_2\, e^{-\sqrt{6}\, t} - 3c_3\, e^{\sqrt{6}\, t} - 3\, c_4\, e^{-\sqrt{6}\, t} \\ &= \underbrace{(\sqrt{6}\, c_1 - 3c_3)}_{0}\, \sqrt{6}\, e^{\sqrt{6}\, t} + \underbrace{(-\sqrt{6}\, c_2 - 3c_4)}_{0}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_3 = \sqrt{6}\, c_1/3 \\ c_4 = -\sqrt{6}\, c_2/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\, e^{\sqrt{6}\, t} + c_2\, e^{-\sqrt{6}\, t} \\ y(t) &= \tfrac{\sqrt{6}}{3} c_1\, e^{\sqrt{6}\, t} + \tfrac{-\sqrt{6}}{3} c_2\, e^{-\sqrt{6}\, t} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} e^{\sqrt{6}\, t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{6}/3 \end{bmatrix} e^{-\sqrt{6}\, t} \quad \blacksquare$$

Exemplo 2: $\begin{cases} x'+y' &= -2y(t) \\ x' &= 3x(t)+2y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{D}x &+ (\hat{D}+2)\,y &= 0 \\ (\hat{D}-3)\,x &- 2y &= 0 \end{cases}$

Eliminando $y$ :

$$(+)\begin{cases} 2\left[\hat{D}x+(\hat{D}+2)\,y\right] &= 0 \\ (\hat{D}+2)\left[(\hat{D}-3)\,x-2y\right] &= 0 \end{cases} \Rightarrow \left[2\hat{D}+(\hat{D}+2)(\hat{D}-3)\right]x = (\hat{D}^2+\hat{D}-6)\,x(t)=0$$

Eliminando $x$ :

$$(+)\begin{cases} (\hat{D}-3)\left[\hat{D}x+(\hat{D}+2)\,y\right] &= 0 \\ -\hat{D}\left[(\hat{D}-3)\,x-2y\right] &= 0 \end{cases} \Rightarrow \left[(\hat{D}-3)(\hat{D}+2)+2\hat{D}\right]y = (\hat{D}^2+\hat{D}-6)\,y(t)=0$$

$$\therefore\ \ x(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{-3t} \quad \text{e} \quad y(t)=c_3\,e^{2t}+c_4\,e^{-3t}$$

Mas $x'-3x-2y=0$ ; logo,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,c_1\,e^{2t}-3\,c_2\,e^{-3t}-3\,c_1\,e^{2t}-3\,c_2\,e^{-3t}-2\,c_3\,e^{2t}-2\,c_4\,e^{-3t} \\ &= \underbrace{(-c_1-2c_3)}_{0}e^{2t}+\underbrace{(-6c_2-2c_4)}_{0}e^{-3t} \quad\Rightarrow\quad c_3=-c_1/2 \quad \text{e} \quad c_4=-3c_2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \begin{cases} x(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{-3t} \\ y(t)=(-1/2)c_1e^{2t}-3c_2e^{-3t} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}e^{2t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}e^{-3t} \quad \blacksquare$$

### 4.1.2 Por determinantes

Pelo uso formal da regra de Cramer, temos que

$$\begin{cases} \hat{L}_1x(t)+\hat{L}_2y(t)=g_1(t) \\ \hat{L}_3x(t)+\hat{L}_4y(t)=g_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} \hat{L}_1 & \hat{L}_2 \\ \hat{L}_3 & \hat{L}_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} g_1 & \hat{L}_2 \\ g_2 & \hat{L}_4 \end{vmatrix} \ \text{.................... EDO p/ } x(t) \\ \\ \begin{vmatrix} \hat{L}_1 & \hat{L}_2 \\ \hat{L}_3 & \hat{L}_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \hat{L}_1 & g_1 \\ \hat{L}_3 & g_2 \end{vmatrix} \ \text{.................... EDO p/ } y(t) \end{cases}$$

Vejamos exemplos:

Exemplo 3: $\begin{cases} x'+y'' &= 4x(t)+t^2 \\ x'+y' &= -x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\hat{D}-4)\,x &+ \hat{D}^2y &= t^2 \\ (\hat{D}+1)\,x &+ \hat{D}y &= 0 \end{cases}$

EDO p/ $x(t)$ e solução:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \hat{D}-4 & \hat{D}^2 \\ \hat{D}+1 & \hat{D} \end{vmatrix}}_{\cancel{\hat{D}^2}-4\hat{D}-\hat{D}^3-\cancel{\hat{D}^2}} x(t) = \underbrace{\begin{vmatrix} t^2 & \hat{D}^2 \\ 0 & \hat{D} \end{vmatrix}}_{2t} \Rightarrow \hat{D}(\hat{D}^2+4)\,x(t)=-2t \overset{(*)}{\Rightarrow} x(t)=c_0+c_1\cos 2t+c_2\,\mathrm{sen}\,2t-\frac{t^2}{4}$$

EDO p/ $y(t)$ e solução:

$$-\hat{D}(\hat{D}^2+4)\,y = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{D}-4 & t^2 \\ \hat{D}+1 & 0 \end{vmatrix}}_{-(2t+t^2)} \Rightarrow \hat{D}(\hat{D}^2+4)y=t^2+2t \overset{(*)}{\Rightarrow} y(t)=c_3+c_4\cos 2t+c_5\,\mathrm{sen}\,2t+\frac{t^3}{12}+\frac{t^2}{4}-\frac{t}{8}$$

Uso de uma das EDOs do sistema para vincular as constantes:

$$x'+y'+x(t)=(\,\mathrm{sen}\,t)\underbrace{(-2c_1-2c_4+c_2)}_{0}+(\cos 2t)\underbrace{(2c_2+2c_5+c_1)}_{0}+\underbrace{(c_0-1/8)}_{0}=0$$

$$\Rightarrow \quad c_0=\frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -2c_1+c_2 &= 2c_4 \\ c_1+2c_2 &= -2c_5 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c_1=-4c_4/5-2c_5/5 \\ c_2=2c_4/5-4c_5/5 \end{cases}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{2}{5}(2c_4+c_5)\cos 2t + \frac{2}{5}(c_4-2c_5)\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{t^2}{4}+\frac{1}{8} \quad \blacksquare \\ y(t) &= c_4\cos 2t + c_5\,\mathrm{sen}\,2t + \frac{t^3}{12}+\frac{t^2}{4}-\frac{t}{8}+c_3 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

NOTA: Acima, na passagem $^{(*)}$, é omitida a resolução da EDO linear de coeficientes constantes (a solução particular pode ser obtida pelo método dos coeficientes a determinar, por exemplo).

Exemplo 4: $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& 3x(t)-y(t)-1 \\ y' &=& x(t)+y(t)+4e^t \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} (\hat{D}-3)\,x &+& y &=& -1 \\ -x &+& (\hat{D}-1)y &=& 4e^t \end{array}\right.$

$$\begin{vmatrix} \hat{D}-3 & 1 \\ -1 & \hat{D}-1 \end{vmatrix} = (\hat{D}-3)(\hat{D}-1)+1 = \hat{D}^2-4\hat{D}+4 = (\hat{D}-2)^2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4e^t & \hat{D}-1 \end{vmatrix} = (\hat{D}-1)(-1)-4e^t = 1-4e^t$$

$$\begin{vmatrix} \hat{D}-3 & -1 \\ -1 & 4e^t \end{vmatrix} = (\hat{D}-3)(4e^t)-1 = 4e^t-12e^t-1 = -1-8e^t$$

$$\begin{aligned} (\hat{D}-2)^2 x(t) = 1-4e^t \quad &\Rightarrow \quad x(t) = c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+\frac{1}{4}-4e^t \\ (\hat{D}-2)^2 y(t) = -1-8e^t \quad &\Rightarrow \quad y(t) = c_3e^{2t}+c_4te^{2t}-\frac{1}{4}-8e^t \end{aligned}$$

$$x'-3x(t)+y(t)+1 = e^{2t}(\underbrace{c_3-c_1+c_2}_{0}) + t\,e^{2t}(\underbrace{c_4-c_2}_{0}) = 0 \Rightarrow \quad c_4=c_2 \quad \text{e} \quad c_3 = c_1-c_2$$

$$\therefore \;\; x(t) = c_1e^{2t}+c_2t\,e^{2t}+\frac{1}{4}-4e^t \quad \text{e} \quad y(t) = (c_1-c_2)e^{2t}+c_2t\,e^{2t}-\frac{1}{4}-8e^t \quad \blacksquare$$

Exemplo 5: É dado o sistema de EDOs

$$\left\{\begin{array}{ccc} x'+z' &=& t^2 \\ y'' &=& -2x(t)+e^t \\ -2x'+z' &=& 2y(t)-z(t) \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \hat{D}x & & & + & \hat{D}z &=& t^2 \\ 2x &+& \hat{D}^2y & & &=& e^t \\ -2\hat{D}x &-& 2y &+& (\hat{D}+1)\,z &=& 0 \end{array}\right.$$

Vamos obter a EDO para $y(t)$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{D} & 0 & \hat{D} \\ 2 & \hat{D}^2 & 0 \\ -2\hat{D} & -2 & \hat{D}+1 \end{vmatrix} y(t) &= \begin{vmatrix} \hat{D} & t^2 & \hat{D} \\ 2 & e^t & 0 \\ -2\hat{D} & 0 & \hat{D}+1 \end{vmatrix} \\ \left[\hat{D}(\hat{D}^3+\hat{D}^2)+\hat{D}(-4+2\hat{D}^3)\right] y(t) &= \hat{D}\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ 0 & \hat{D}+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2\hat{D} & \hat{D}+1 \end{vmatrix} t^2 + \hat{D}\begin{vmatrix} 2 & e^t \\ -2\hat{D} & 0 \end{vmatrix} \\ \hat{D}(3\hat{D}^3+\hat{D}^2-4)\,y(t) &= \hat{D}(\hat{D}+1)e^t - (\hat{D}+1)(2)t^2 + \hat{D}(2\hat{D})e^t \\ &= 2e^t - 2(2t+t^2)+2e^t \end{aligned}$$

Resposta: $\hat{D}(3\hat{D}^3+\hat{D}^2-4)\,y(t) = 4e^t-2t^2-4t \quad \blacksquare$

## 4.2 Resolução pela transformada de Laplace

Exemplo 1: $\left\{\begin{array}{l} 2x'+y'-y(t) = \ t \\ x'+y' = \ t^2 \end{array}\right.$ sob as condições $x(0)=1$ e $y(0)=0$ .

A transformada de Laplace dessas equações são

$$\left\{\begin{array}{l} 2\big[s\bar{x}(s) - \underbrace{x(0)}_{1}\big] + s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_{0} - \bar{y}(s) = 1/s^2 \\ s\bar{x}(s) - \underbrace{x(0)}_{1} + s\bar{y}(s) - \underbrace{y(0)}_{0} = 2/s^3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2s\bar{x} + (s-1)\bar{y} = 2 + 1/s^2 \\ s\bar{x}(s) + s\bar{y} = 1 + 2/s^3 \end{array}\right.$$

Eliminando $\bar{x}$, obtemos

$$-(s+1)\bar{y} = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{4}{s^3(s+1)} - \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{4-s}{s^3(s+1)} \ .$$

Frações parciais: $\dfrac{4-s}{s^3(s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s^3} + \dfrac{D}{(s+1)} \quad \Rightarrow \quad A = -B = -D = -5 \ \text{ e } \ C = 4$ .

$$\therefore \ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}\right\} \ = \ 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \ \blacksquare$$

Podemos calcular $x(t)$ de modo análogo (obtendo primeiramente $\bar{x}(s)$ e, depois, calculando a transformada de Laplace inversa), mas, no caso, podemos usar a segunda EDO do sistema:

$$x' = t^2 - y' = t^2 - (-5 + 4t + 5e^{-t}) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{t^3}{3} + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + c_1$$

$$x(0) = c_1 + 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -4 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{t^3}{3} + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} - 4 \ \blacksquare$$

Exemplo 2: $\left\{\begin{array}{l} x'' + 10x - 4y = 0 \\ -4x + y'' + 4y = 0 \end{array}\right.$ sob as condições $x(0) = y(0) = 0$ e $x'(0) = -y'(0) = 1$ .

$$\left\{\begin{array}{l} s^2\bar{x} - s\,\underbrace{x(0)}_{0} - \underbrace{x'(0)}_{1} + 10\bar{x} - 4\bar{y} = 0 \\ -4\bar{x} + s^2\bar{y} - s\,\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{-1} + 4\bar{y} = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} (s^2+10)\bar{x} - 4\bar{y} = 1 \\ -4\bar{x} + (s^2+4)\bar{y} = -1 \end{array}\right.$$

$$\bar{x}(s) = \frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = \frac{As+B}{s^2+2} + \frac{Cs+D}{s^2+12} \quad \Rightarrow \quad A = C = 0, B = -1/5, D = 6/5$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/5}{s^2+2} + \frac{6/5}{s^2+12}\right\} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\, t\sqrt{2} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\,\mathrm{sen}\, t\sqrt{12} \ \blacksquare$$

$$y(t) = [x''(t) + 10x(t)]/4 = \cdots = -\frac{2}{5\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\, t\sqrt{2} - \frac{3}{5\sqrt{12}}\,\mathrm{sen}\, t\sqrt{12} \ \blacksquare$$

## 4.3 Resolução pelo método matricial

Trataremos, primeiramente, de sistemas *homogêneos* de EDOs lineares de 1ª ordem,

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}X = AX \ ,$$

onde a matriz $A$ é constante; ao final desta seção, mostraremos como resolver sistemas não-homogêneos $dX/dt = AX(t) + F(t)$.

Note que, no caso em que $n = 1$ (quando $A$ é uma matriz $1 \times 1$, isto é, um número), a solução de $dX/dt = AX$ é $X(t) = Ce^{At}$. Pois bem, prova-se que essa também é a solução quando $n \geq 2$, desde que se defina a exponencial de uma matriz. Não apresentaremos esse método; ele é descrito nos capítulos 29 e 31 da referência [2].

O método estudado aqui começa por admitir-se uma solução da forma $X = Ve^{\lambda t}$, onde $V = \mathrm{col}\,[v_1, \cdots, v_n]$ é um vetor (coluna) constante; substituindo, obtemos

$$\lambda V \cancel{e^{\lambda t}} = AV\cancel{e^{\lambda t}} \quad \Rightarrow \quad AV = \lambda V \ , \ \text{ ou } \ (A-\lambda I)V = 0 \ ,$$

que é um problema de autovalor, no qual procuramos as soluções não-nulas ($V \neq 0$) associadas aos valores de $\lambda$ que satisfazem a equação de autovalor, ou equação característica, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dividiremos nosso estudo em três casos: 1) autovalores reais e distintos, 2) autovalores imaginários e 3) autovalores repetidos. Isso não significa que um sistema de EDOs lineares se enquadre num desses três casos. Na verdade, os três casos podem ocorrer num mesmo problema, ocorrendo tanto autovalores reais quanto imaginários que se repetem.

### 4.3.1 1º Caso: autovalores reais e distintos

A solução do sistema $X' = AX$, sendo $A$ uma matriz $n \times n$, é dada por

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k V_k e^{\lambda_k t} \ ,$$

onde $V_k$ é um vetor linearmente independente associado ao autovalor $\lambda_k$.

Exemplo 1: $\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{array} \right.$ ou $\dfrac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{array} \right.$$

Cálculo do autovetor $V_1$ e da solução $X_1(t)$ associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta = 1} V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ X_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Cálculo do autovetor $V_2$ e da solução $X_2(t)$ associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ A - \lambda_2 I = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3\beta/2 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta = 2} V_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ X_2(t) = V_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$$

Solução geral: $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$ , ou

$$x(t) = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \quad \text{e} \quad y(t) = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \ \blacksquare$$

Exemplo 2: $\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$ ou $\dfrac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}$

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+4)[\,(\lambda-5)(\lambda+3)+1] + (1+\lambda+3) \\ &= (\lambda+4)[1-(\lambda-5)(\lambda+3)-1] = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Cálculo do autovetor $V_1$ associado ao autovalor $\lambda_1 = -3$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (A-\lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 0\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma=1} V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos autovetores $V_2$ e $V_3$ associados aos autovalores $\lambda_2$ e $\lambda_3$, respectivamente (abaixo, na passagem denotada por $\xrightarrow{E}$, a matriz é escalonada):

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 10\gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma=1} V_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 8\gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma=1} V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \text{Solução geral:} \qquad X = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-4t} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}e^{5t} \quad \blacksquare$$

### 4.3.2 2º Caso: autovalores imaginários

Os elementos da matriz $A$ e, por conseguinte, os coeficientes da equação característica são reais. Logo, se $\lambda$ imaginário for autovalor, $\lambda^*$ (complexo conjugado) também será. Além disso, se ao autovalor $\lambda$ corresponde o autovetor $V$, isto é $AV = \lambda V$, então $(AV)^* = (\lambda V)^*$, ou $AV^* = \lambda^* V^*$, significando que ao autovalor $\lambda^*$ corresponde o autovetor $V^*$. Isso facilita os cálculos que seguem.

Exemplo 3: $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$ ou $\dfrac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5 \pm 2\mathrm{i}$$

Cálculo do autovetor $V$ associado ao autovalor $\lambda = 5 + 2\mathrm{i}$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-2\mathrm{i} & -1 \\ 5 & -1-2\mathrm{i} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 1-2\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\beta}{1-2\mathrm{i}} \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta=1-2\mathrm{i}} V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ X(t) = c_1 V e^{\lambda t} + c_2 V^* e^{\lambda^* t} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2\mathrm{i} \end{bmatrix}e^{(5+2\mathrm{i})t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1+2\mathrm{i} \end{bmatrix}e^{(5-2\mathrm{i})t}\,.$$

Para escrever $X(t)$ como uma função real, usamos a seguinte fórmula:

$$\boxed{c_1 V e^{\lambda t} + c_2 V^* e^{\lambda^* t}\Big|_{\substack{V\,\equiv\,P+Q\mathrm{i}\\ \lambda\,\equiv\,a+b\mathrm{i}}} = (k_1 P + k_2 Q)\, e^{at}\cos bt + (-k_1 Q + k_2 P)\, e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt} \tag{4.1}$$

No caso: $\quad \lambda = \underbrace{5}_{a} + \underbrace{2}_{b}\mathrm{i} \quad$ e $\quad V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2\mathrm{i} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{Q}\mathrm{i}\ .$

$$\begin{aligned} \therefore\ X(t) &= \left(k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) e^{5t}\cos 2t + \left(-k_1\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) e^{5t}\,\mathrm{sen}\, 2t \\ &= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 - 2k_2 \end{bmatrix} e^{5t}\cos 2t + \begin{bmatrix} k_2 \\ 2k_1 + k_2 \end{bmatrix} e^{5t}\,\mathrm{sen}\, 2t \ \blacksquare \end{aligned}$$

A dedução da fórmula em (4.1) é como segue:

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 V e^{\lambda t} + c_2 V^* e^{\lambda^* t} \;=\; c_1(P+Q\mathrm{i})e^{(a+b\mathrm{i})t} + c_2(P-Q\mathrm{i})e^{(a-b\mathrm{i})t} \\ &= c_1(P+Q\mathrm{i})e^{at}(\cos bt + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, bt) + c_2(P-Q\mathrm{i})e^{at}(\cos bt - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, bt) \\ &= \big[c_1(P+Q\mathrm{i}) + c_2(P-Q\mathrm{i})\big]e^{at}\cos bt + \mathrm{i}\big[c_1(P+Q\mathrm{i}) - c_2(P-Q\mathrm{i})\big]e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt \\ &= \big[\underbrace{(c_1+c_2)}_{\equiv\, k_1} P + \underbrace{\mathrm{i}(c_1-c_2)}_{\equiv\, k_2} Q\big]e^{at}\cos bt + \big[\underbrace{\mathrm{i}(c_1-c_2)}_{k_2} P - \underbrace{(c_1+c_2)}_{k_1} Q\big]e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt\ . \quad \text{CQD.} \end{aligned}$$

<u>Exemplo 4</u>: $\quad X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} X$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1/2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 1\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1+\mathrm{i} \\ \lambda_2 = 1-\mathrm{i} \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 2 & 0 \\ -1/2 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\mathrm{i}\alpha + 2\beta = 0 \\ 0\beta = 0 \\ -\mathrm{i}\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -2\mathrm{i}\beta \\ \beta \text{ qq} \\ \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{\beta\,=\,\mathrm{i}} \quad V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{Q}\mathrm{i}$$

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\alpha/2 = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 0\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma\,=\,1} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ X(t) &= \underbrace{c_1\begin{bmatrix} 2 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} e^{(1+\mathrm{i})t} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} e^{(1-\mathrm{i})t}} \ + \ c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \\ &= \overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 2k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{k_1 P + k_2 Q} e^t\cos t + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{-k_1 Q + k_2 P} e^t\,\mathrm{sen}\, 2t} \ + \ c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \ \blacksquare \end{aligned}$$

onde usamos (4.1) para reescrever como uma função real os dois primeiros termos (indicados por chaves), que correspondem ao par de autovalores complexos conjugados.

### 4.3.3 3º Caso: autovalores repetidos

A solução do sistema $X' = AX$, sendo $A$ uma matriz $n \times n$ constante, é dada por

$$X = \sum_{k=1}^{k_{\max}} X_k \quad (k_{\max} = \text{ nº de autovalores distintos}) \ ,$$

onde $X_k$ é a parcela da solução associada ao $k$-ésimo autovalor distinto $\lambda_k$. A expressão de $X_k$ depende da multiplicidade de $\lambda_k$ e dos autovetores associados a esse autovalor; vejamos:

- Se a <u>multiplicidade de $\lambda_k$ for igual a 1</u>, então, sendo $V_k$ o autovetor associado, temos que:

$$X_k = c_k V_k e^{\lambda_k t} \ . \tag{4.2}$$

- Se a <u>multiplicidade de $\lambda_k$ for igual a $m \geq 2$</u>, a expressão de $X_k$ depende do número de autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor, havendo três possibilidades:
  - Existem $m$ autovetores $V_{k1}\,,\ V_{k2}\,,\ \cdots\,,\ V_{km}$ :

$$X_k = \ (c_{k1}V_{k1} + \cdots + c_{km}V_{km})\, e^{\lambda_k t} \ . \tag{4.3}$$

  - Existe um único autovetor $U_1$ :

$$\begin{aligned} X_k \ = \ \Big\{ & c_{k1}U_1 + c_{k2}(U_1 t + U_2) + c_{k3}\Big(U_1 \frac{t^2}{2!} + U_2 t + U_3\Big) + \cdots \\ & + c_{km}\Big[U_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + U_2 \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + U_{m-1}t + U_m\Big] \Big\}\, e^{\lambda_k t} \ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

    onde $(A - \lambda_k I)\, U_j = U_{j-1} \ \ (j = 2, \cdots, m)$ .

  - O número de autovetores associados ao autovalor de multiplicidade $m$ é maior que 1 e menor que $m$; neste caso, o problema torna-se complicado e não será estudado aqui.

Essas fórmulas são provadas no final desta seção. Vale a pena escrevê-las em correspondência com a estrutura de autovalores e autovetores de uma matriz $A_{3\times 3}$. Fazemos isso a seguir, onde cada seta que se inicia num autovalor $\lambda_k$ indica um conjunto possível de autovetores associados a $\lambda_k$ :

<u>Três autovalores distintos</u>:

$\lambda_1 \to V_1\,,\quad \lambda_2 \to V_2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 \to V_3 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{X = c_1V_1e^{\lambda_1 t} + c_2V_2e^{\lambda_2 t} + c_3V_3e^{\lambda_3 t}}$

<u>Dois autovalores distintos</u>:

$\lambda_1(\text{mult.}\,1) \to V_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2(\text{mult.}\,2)$

$\nearrow \ V_{21} \text{ e } V_{22} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{X = c_1V_1e^{\lambda_1 t} + \big[c_{21}V_{21} + c_{22}V_{22}\big]\, e^{\lambda_2 t}}$

$\searrow \ U_1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} X = c_1V_1e^{\lambda_1 t} + \big[c_{21}U_1 + c_{22}(U_1 t + U_2)\big]\, e^{\lambda_2 t} \\ \text{onde } \ (A - \lambda_2 I)U_2 = U_1 \end{array}}$

<u>Um autovalor distinto</u>:

$\lambda_1(\text{mult. } 3)$

$\nearrow \ V_{11},\ V_{12} \text{ e } V_{13} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{X = \big(c_{11}V_{11} + c_{12}V_{12} + c_{13}V_{13}\big)\, e^{\lambda_1 t}}$

$\to \ V_{11} \text{ e } V_{12} \quad \rightsquigarrow$ não estudado aqui

$\searrow \ U_1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} X = \big[c_{11}U_1 + c_{12}(U_1 t + U_2) + c_{13}(U_1 t^2/2 + U_2 t + U_3)\big]\, e^{\lambda_1 t} \\ \text{onde } \ (A - \lambda_1 I)U_2 = U_1 \ \text{ e } \ (A - \lambda_1 I)U_3 = U_2 \end{array}}$

Enfatize-se, na notação adotada, que, se o autovalor $\lambda_k$ é múltiplo e existe um único autovetor associado, este é denotado por $U_1$ (ao invés de $V_k$). Vejamos algumas aplicações dessas fórmulas:

Exemplo 5: $A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&1-\lambda&-2\\2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1=5 & \text{(mult. 1)}\\ \lambda_2=-1 & \text{(mult. 2)}\end{cases}$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}-4&-2&2\\-2&-4&-2\\2&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{E}\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\gamma\\\beta=-\gamma\\\gamma\text{ qq}\end{cases}\Rightarrow\; V_1=\gamma\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_1=c_1V_1e^{\lambda_1 t}=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}e^{5t}$ é a parcela da solução associada ao autovalor $\lambda_1=5$, conforme (4.2).

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-2&2&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{E}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0\\0\beta=0\\0\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\beta-\gamma\\\beta\text{ qq}\\\gamma\text{ qq}\end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2=\begin{bmatrix}\beta-\gamma\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\beta\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{V_{21}}+\gamma\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}_{V_{22}}\Rightarrow\; X_2=\big(c_{21}V_{21}+c_{22}V_{22}\big)e^{\lambda_2 t}=\left(c_{21}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_{22}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)e^{-t}$$

é a parcela da solução associada ao autovalor $\lambda_2=-1$, conforme (4.3). A solução geral é $X=X_1+X_2$, ou,

$$X=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}e^{5t}+\left(c_{21}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_{22}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)e^{-t}\quad.$$

Exemplo 6: $A=\begin{bmatrix}5&-4&0\\1&0&2\\0&2&5\end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda&-4&0\\1&0-\lambda&2\\0&2&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)[\,\lambda(\lambda-5)\,]=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1=0 & \text{(mult. 1)}\\ \lambda_2=5 & \text{(mult. 2)}\end{cases}$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}5&-4&0\\1&0&2\\0&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{E}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&5\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-2\gamma\\\beta=-5\gamma/2\\\gamma\text{ qq}\end{cases}\xrightarrow{\gamma=-2}V_1=\begin{bmatrix}4\\5\\-2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_1=c_1V_1e^{\lambda_1 t}=c_1\begin{bmatrix}4\\5\\-2\end{bmatrix}$ é a parcela da solução associada ao autovalor $\lambda_1=0$, conforme (4.2).

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}0&-4&0\\1&-5&2\\0&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E}\begin{bmatrix}1&-5&2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-2\gamma\\\beta=0\\\gamma\text{ qq}\end{cases}\xrightarrow{\gamma=-1}U_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\quad X_2=\big\{c_{21}U_1+c_{22}(U_1t+U_2)\big\}e^{\lambda_2 t}$ é a parcela da solução associada ao autovalor $\lambda_2=5$, e $U_2$ é uma solução do sistema algébrico $(A-\lambda_2 I)U_2=U_1$, ou, em componentes:

$$\begin{bmatrix}0&-4&0\\1&-5&2\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\quad.$$

Este sistema é mais facilmente resolvido a partir da sua forma que é dada por uma matriz aumentada e escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&-4&0&2\\1&-5&2&0\\0&2&0&-1\end{array}\right]\xrightarrow{E}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&2&0\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-5/2-2\gamma\\\beta=-1/2\\\gamma\text{ qq}\end{cases}\xrightarrow{\gamma=0}U_2=\begin{bmatrix}-5/2\\-1/2\\0\end{bmatrix}\quad.$$

Logo, a solução geral é $X = X_1 + X_2$, ou,

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \left\{ c_{21} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_{22} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -5/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} e^{5t} \ .$$

<u>Exemplo 7</u>: $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \ \text{(mult. 3)}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = -1} U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \ X_1 = \big\{ c_{11} U_1 + c_{12}(U_1 t + U_2) + c_{13}(U_1 t^2/2 + U_2 t + U_3) \big\} e^{\lambda_1 t}$ é a parcela da solução associada ao autovalor $\lambda_1 = 1$, sendo $U_2$ e $U_3$, respectivamente, soluções dos sistemas algébricos resolvidos a seguir:

$$(A - \lambda_1 I) U_2 = U_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \gamma + 1 \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = 0} U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I) U_3 = U_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = \gamma \\ \gamma \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\gamma = 0} U_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução geral é

$$X = X_1 = \left\{ c_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_{12} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_{13} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} e^t \ .$$

<u>Prova das fórmulas (4.2), (4.3) e (4.4)</u>:

Devemos provar que $X_k$ dado por cada uma dessas fórmulas é solução do sistema linear, isto é, que $AX_k - \lambda_k X_k = 0$.

- Prova da fórmula em (4.2). Se $X_k = c_k V_k e^{\lambda_k t}$, onde $AV_k = \lambda_k V_k$, então

$$AX_k - X_k' = A(c_k V_k e^{\lambda_k t}) - (\lambda_k c_k V_k e^{\lambda_k t}) = \underbrace{(AV_k - \lambda_k V_k)}_{0} c_k e^{\lambda_k t} = 0 \ \forall t \ . \ \text{CQD.}$$

- Prova da fórmula em (4.3). Se $X_k = \left( \sum\limits_{l=1}^{m} c_{kl} V_{kl} \right) e^{\lambda_k t}$, onde $AV_{kl} = \lambda_k V_{kl}$, então

$$AX_k - X_k' = \Big( \sum_{l=1}^{m} c_{kl} AV_{kl} \Big) e^{\lambda_k t} - \lambda_k \Big( \sum_{l=1}^{m} c_{kl} V_{kl} \Big) e^{\lambda_k t} = \Big[ \sum_{l=1}^{m} c_{kl} \underbrace{(AV_{kl} - \lambda_k V_{kl})}_{0} \Big] e^{\lambda_k t} = 0 \ \forall t \ . \ \text{CQD.}$$

- Prova da fórmula em (4.4). Esta fórmula pode ser escrita na forma

$$X_k = \sum_{l=1}^{m} c_{kl} X_{kl} \ , \quad \text{com } X_{kl} = e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{l} U_j \, \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} \ .$$

Demostramos que essa expressão de $X_k$ é solução do sistema de EDOs observando, primeiramente, que

$$AX_k - X_k' = \sum_{j=1}^{l} c_{kl} \underbrace{(AX_{kl} - X_{kl}')}_{0} = 0 \ \ ,$$

restando, para completar a demonstração, mostrar que o termo entre parênteses se anula:

$$\begin{aligned} AX_{kl} - X_{kl}' &= e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{l} \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} AU_j - \lambda_k e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{l} \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} U_j - e^{\lambda_k t} \underbrace{\sum_{j=1}^{l-1} \frac{t^{l-j-1}}{(l-j-1)!} U_j}_{\sum_{j=2}^{l} \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} U_{j-1}} \\ &= e^{\lambda_k t} \Big\{ \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \big[ \underbrace{AU_1 - \lambda_k U_1}_{0} \big] + \sum_{j=2}^{l} \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} \big[ \underbrace{(A - \lambda_k I) U_j - U_{j-1}}_{0} \big] \Big\} \ = \ 0 \ . \quad \text{CQD.} \end{aligned}$$

## 4.4 Sistemas não-homogêneos

Nesta seção, aprenderemos a resolver o sistema linear não-homogêneo $X' - AX(t) = F(t)$, sendo $A$ uma matriz $n \times n$ constante, pelo método da variação das constantes (ou parâmetros).

A solução geral do sistema homogêneo associado $X_H' - AX_H(t) = 0$ é da forma $X_H(t) = \Phi(t)C$, onde $\Phi(t)$ (a denominada matriz fundamental) é formada por $n$ colunas que são soluções $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ linearmente independentes do sistema homogêneo, e $C$ é uma matriz coluna com $n$ constante arbitrárias. Substituindo a segunda dessas equações na primeira, obtemos $[\Phi'(t) - A\Phi(t)]\, C = 0$, a qual, por ser válida com $C$ arbitrário, concluímos que $\Phi'(t) - A\Phi(t) = 0$, que é utilizado no cancelamento de termos abaixo ao se deduzir uma solução particular $X_P(t)$ do sistema não-homogêneo.

Admitindo que $X_P(t) = \Phi(t)U(t)$, obtemos, substituindo essa expressão no sistema não-homogêneo, a seguinte equação que permite a determinação de $U(t)$ [e, portanto, de $X_P(t)$]:

$$0 = X_P'(t) - AX_P(t) - F(t) = \cancel{\Phi'(t)U(t)} + \Phi(t)U'(t) - \cancel{A\Phi(t)U(t)} - F(t) \quad \Rightarrow \quad U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t) \ .$$

Em resumo, temos que a solução geral do sistema não-homogêneo é $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$, isto é, a soma da solução geral do sistema homogêneo $X_H(t) = \Phi(t)C$ (calculada pelos métodos já explicados) com a solução particular $X_P(t) = \Phi(t)U(t)$, onde $U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t)$ .

Exemplo 1: Resolução do sistema $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}_{A} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}}_{F(t)} \quad (t > 0)$ :

A resolução do sistema homogêneo associado $X_H' = AX_H(t)$ fornece a solução geral

$$X_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \ .$$

Após o cálculo(*) de $\Phi^{-1}(t)$, temos que

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}}_{\Phi^{-1}(t)} \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \displaystyle\int \Big[2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t}\Big] dt + k_1 \\ \displaystyle\int \Big[te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t}\Big] dt + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix} \ ,$$

(*)Uma fórmula útil: Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $\det A = ad - bc \neq 0$, então $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

onde fizemos $k_1 = k_2 = 0$, pois queremos uma solução particular. Logo,

$$X_P(t) = \varPhi(t)U(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6t}{5} - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3t}{5} - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} ,$$

e a solução geral é, finalmente,

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} + \begin{bmatrix} \frac{6t}{5} - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3t}{5} - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} .$$

Exemplo 2: Considere o sistema $X' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -12e^{5t} \\ 0 \end{bmatrix}$ $(t > 0)$ . Temos que

$$X_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t} & 2e^{4t} \\ 2e^{t} & e^{4t} \end{bmatrix}}_{\varPhi(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

é a solução do sistema homogêneo associado (verifique isso). Logo, a solução é $X = X_H + X_P$, sendo $X_P$ calculado como segue:

$$U' = \varPhi^{-1}F = \underbrace{\frac{1}{e^{5t} - 4e^{5t}} \begin{bmatrix} e^{4t} & -2e^{4t} \\ -2e^{t} & e^{t} \end{bmatrix}}_{\varPhi^{-1}(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} -12e^{5t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{F(t)} = -\frac{1}{3e^{5t}} \begin{bmatrix} -12e^{9t} \\ 24e^{6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{4t} \\ -8e^{t} \end{bmatrix} .$$

$$X_P = \varPhi U = \begin{bmatrix} e^{t} & 2e^{4t} \\ 2e^{t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} \\ -8e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} - 16e^{5t} \\ 2e^{5t} - 8e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15e^{5t} \\ -6e^{5t} \end{bmatrix} .$$

Exemplo 3: Resolução completa do sistema $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}}_{A} X(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} t^{-2} \\ -t^{-4} \end{bmatrix}}_{F(t)}$ $(t > 0)$ :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 9 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 3) + 9 = \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \ \text{(multip. 2)}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)V = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ 0\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta/3 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta = 3} \underbrace{V}_{\equiv U_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = c_{11}U_1e^{0t} + c_{12}(U_1 t + U_2)e^{0t}$$

$$(A - \lambda_1 I)U_2 = U_1 \Rightarrow \left[ \begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{matrix}}_{A-\lambda_1 I} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}}_{V_1} \end{array} \right] \xrightarrow{E} \left[ \begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 1 \\ \beta \text{ qq} \end{cases} \xrightarrow{\beta = 0} U_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{X_1(t) = X_H(t) = c_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_{12} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t + 1/3 \\ 3 & 3t \end{bmatrix}}_{\varPhi(t)} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 3t & -t - 1/3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3t - (3t+1)} = \begin{bmatrix} -3t & t + 1/3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} U(t) &= \int \Phi^{-1}(t) F(t)\, dt = \int \begin{bmatrix} -3t & t + 1/3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{-2} \\ -t^{-4} \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} -3t^{-1} - t^{-3} - \frac{1}{3} t^{-4} \\ 3t^{-2} + t^{-4} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} -3 \ln t + \frac{1}{2} t^{-2} + \frac{1}{9} t^{-3} \\ -3t^{-1} - \frac{1}{3}\, t^{-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_P(t) = \Phi(t) U(t) &= \begin{bmatrix} 1 & t + 1/3 \\ 3 & 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \ln t + \frac{1}{2} t^{-2} + \frac{1}{9} t^{-3} \\ -3t^{-1} - \frac{1}{3}\, t^{-3} \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{X_P(t) = \begin{bmatrix} -3 \ln t + \frac{1}{6} t^{-2} - t^{-1} - 3 \\ -9 \ln t + \frac{1}{3} t^{-3} + \frac{1}{2} t^{-2} - 9 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

A solução geral é $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$, ou seja,

$$X(t) = \begin{bmatrix} c_{11} + c_{12}(t + \frac{1}{3}) - 3 \ln t + \frac{1}{6} t^{-2} - t^{-1} - 3 \\ 3c_{11} + 3c_{12} t - 9 \ln t + \frac{1}{3} t^{-3} + \frac{1}{2} t^{-2} - 9 \end{bmatrix}$$

## 4.5 Exercícios

1. Resolva os sistemas de EDOs por eliminação sistemática ou por determinantes:

(a) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = -5x \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = e^t \\ -\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x + y = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + z = e^t \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} - x = 0 \\ x + 2y + \dfrac{dz}{dt} = e^t \end{cases}$

2. Resolva pelo método da transformada de Laplace:

(a) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x + \dfrac{d^3y}{dt^3} = 6\,\mathrm{sen}\,t \\ \dfrac{dx}{dt} + 2x - 2\dfrac{d^3y}{dt^3} = 0 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 4\dfrac{dx}{dt} = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 5 \end{cases}$

3. Escrever como um sistema de EDOs na chamada <u>forma normal</u>, isto é, na forma $dX/dt = A(t)X(t) + F(t)$:

(a) $y'' - 3y' + 4y = \mathrm{sen}\,3t$ (b) $y''' - 3y'' + 6y' - 10y = t^2 + 1$
(c) $2y^{(4)} + y''' - 8y = 10$ (d) $t^2y'' + ty' + (t^2 - 4)y = 0$

Abaixo, os problemas 4 a 6 consistem em resolver sistemas de EDOs homogêneos da forma $dX/dt = A\,X(t)$. Os sistemas encontram-se agrupados, num mesmo problema, conforme os autovalores da matriz $A$, seguindo os três casos estudados.

4. Matrizes cujos autovalores são todos reais e distintos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Matrizes que apresentam autovalores imaginários:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Matrizes que apresentam autovalores reais repetidos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ao autovalor 1, duplo, associa-se um único autovetor)

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ao autovalor $-1$, duplo, associam-se dois autovetores)

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (ao autovalor 2, duplo, associa-se um único autovetor)

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (ao autovalor 2, triplo, associa-se um único autovalor)

7. Agora se pede que sejam revolvidos os seguintes sistemas de EDOs não-homogêneos:

(a) $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 12t \\ 12t \end{bmatrix}$ (b) $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ t\,e^{3t} \end{bmatrix}$

---

**Respostas**

2. (a) $\begin{cases} x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \\ y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 8 + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{t^4}{4!} \\ y = -\frac{2}{3!}t^3 + \frac{t^4}{4!} \end{cases}$

3. (a) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 3x_2 + \operatorname{sen} 3t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 10x_1 - 6x_2 + 3x_3 + t^2 + 1 \end{cases}$

4. (a) $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$ (b) $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$

5. (a) $X = c_1 \begin{bmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$

   (b) $X = c_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} e^t$

   (c) $X = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} e^t$

6. (a) $X = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \right)$

   (b) $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$

   (c) $X = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \right)$

   (d) $X = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \right) + c_3 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} \right)$

7. (a) $X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} -12t - 4/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$

   (b) $X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t} \\ -e^t + \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t} \\ \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \end{bmatrix}$

# Referências Bibliográficas


[1] Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Sexta Edição, LTC Editora, Rio de Janeiro, 1998.

[2] Bronson, R. *Moderna Introdução às Equações Diferenciais*, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, 1977.

[3] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*, Segunda Edição, LTC Editora, Rio de Janeiro, 1997.

[4] Hildebrant, F. B. *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Gliffs, New Jersey, 1976.

[5] Kaplan, W. *Cálculo Avançado*, Edgard Blücher Ltda, 1972.

[6] Zill, D. G. e Cullen, M. R. *Equações Diferenciais*, Pearson Makron Books, São Paulo, 2001.