Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 8 - 2015-2
Teste de soluções de EDO
EDO de variáveis separáveis
Algumas aplicações de EDO

Nos exercícios 1 a 6, verifique se a função $y = f(x)$, $x \in I$ é solução da equação diferencial ordinária (EDO) dada.

1. $f(x) = \sqrt{2 + x + x^2}, \quad I = (0, \infty), \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + 2x}{2y}$
2. $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}, \quad I = (0, \infty), \qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1 + 2x}{2y}$
3. $f(x) = e^{x^2} + e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt, \quad I = \mathbb{R}, \quad y' - 2xy = 1$
4. $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad I = \mathbb{R}, \quad y'' = y$
5. $f(x) = e^{-x} + \dfrac{x}{3}, \quad I = \mathbb{R}, \quad y^{(iv)} + 4y''' - 3y' = x$
6. $f(x) = 4 + 2\ln x, \; I = (0, \infty), \quad x^2 y'' - xy' + y = 2\ln x$

7. Determine os possíveis valores da constante p para que a função $f(x) = x^p$ seja solução da equação
$x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$, no intervalo $I = (0, \infty)$.

Nos exercícios 8 a 12 diga se é possível garantir que o problema de valor inicial admite solução única. Quando admitir solução única, dê o maior intervalo admissível I, I aberto, que contém a abscissa da condição inicial.

8. $y' + xy = 3, \quad y(0) = 0$
9. $xy' + y = 3, \quad y(0) = 1$
10. $y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$
11. $y' = \dfrac{x - y}{x + y}, \quad y(1) = -1$
12. $xy' + \dfrac{1}{2x + 3}\, y = \ln|x - 2|$,
    com cada uma das condições iniciais:
    (a) $y(-3) = 0$ (c) $y(1) = 7$
    (b) $y(-1) = 5$ (d) $y(3) = 0$

Nos exercícios 13 a 16 verifique que a equação é de variáveis separáveis e resolva-a.

13. $(x \ln y) y' = y$
14. $xydx - 3(y - 2)dy = 0$
15. $xy\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)\csc y$
16. $xdx + ye^{-x^2} dy = 0$

Nos exercícios 17 a 19 resolva o problema de valor inicial (PVI).

17. $y' = \dfrac{e^x}{y}, \quad y(0) = 1$
18. $\left(1 + y^2\right) dx + \left(1 + x^2\right) dy = 0, \quad y(1) = 1$
19. $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$, com cada condição inicial:
    (a) $y(0) = 2$ (b) $y(2) = 0$ (c) $y(0) = 1$

20. A seguinte equação diferencial aparece em trabalhos que estudam a acumulação de nebulosa no sistema solar:
$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax^{5/6}}{(b - Bt)^{3/2}}, \quad a, b, B \quad \text{constantes reais} \quad \text{e} \quad x = x(t)$$

(a) Determine a região do plano tx onde é possível garantir que esta equação possui soluções únicas.

(b) Determine a solução geral da equação

21. Volterra fez um modelo matemático para descrever a competição entre duas espécies x e y que habitam um meio ambiente dado, obtendo equações da forma:
$\begin{array}{l} \dot{x} = x \times (a_1 + a_2 y) \\ \dot{y} = y \times (b_1 + b_2 x) \end{array}$ onde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ são constantes,
$y(t) := y(x(t))$ e t é a variável tempo.
Usando a regra da cadeia $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ e as duas equações acima, se obtém $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \times (b_1 + b_2 x)}{x \times (a_1 + a_2 y)}$. Determine a solução geral desta equação.

22. Determine a função $y = f(x)$ cujo gráfico contém o ponto $(1, 1)$ tal que para todo (x, y) do gráfico de f a área da região A_2 seja o dobro da área da região A_1, conforme figura ao lado.

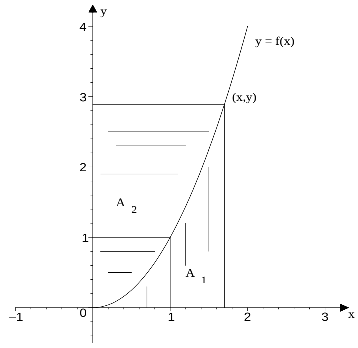

Fig. do ex. 22

23. Uma colônia de bactérias aumenta sua população a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presentes em cada instante de tempo. Se em quatro horas a população triplica, em quanto tempo ela será 27 vezes a quantidade inicial?

RESPOSTAS DA LISTA 8 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Sim, é solução. Primeiro verifica-se que $f(x) = \sqrt{2 + x + x^2}$ é bem definida $\forall x \in \mathbb{R}$, logo está definida em $I = (0, \infty)$ e é diferenciável em I. Também $y = \sqrt{2 + x + x^2} \Rightarrow y^2 = 2 + x + x^2 \Rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + 2x}{2y}$, a EDO foi satisfeita.

2. Não é solução pois $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ só é bem definida quando $x \in [-2, 1]$, logo para $x \in (1, \infty) \subset (0, \infty)$ essa função não está definida. É fato que $y = \sqrt{2 - x - x^2}$ satisfaz a EDO, verifique.

3. Sim, é solução. Primeiro sabemos que a função e^{x^2} está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e a função e^{-t^2} é contínua para todo $t \in [0, x], x \in \mathbb{R}$, logo a integral está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e assim a função f também está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-x^2}$. Aplicando as regras de derivação, encontramos
$y' = 2xe^{x^2} + e^{x^2}e^{-x^2} + 2xe^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt = 2xe^{x^2} + 1 + 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Substituindo y' e y na EDO,
$y' - 2xy = 2xe^{x^2} + 1 + 2xe^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt - 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 1$, a EDO foi satisfeita.

4. Sim, é solução. Primeiro sabemos que as funções e^{-x} e e^x são bem definidas e têm derivadas de primeira e segunda ordem para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a função f é bem definida e tem derivada de primeira e segunda ordem para todo $x \in \mathbb{R}$.

$y = C_1e^x + C_2e^{-x} \Rightarrow y' = C_1e^x - C_2e^{-x} \Rightarrow y'' = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Vemos que $y'' = y$, a EDO está satisfeita.

5. Não é solução. Primeiro sabemos que as funções e^{-x} e $x/3$ são bem definidas e têm derivadas até a quarta ordem para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a função $f(x) = e^{-x} + \dfrac{x}{3}$ é bem definida e tem derivada até a quarta ordem para todo $x \in \mathbb{R}$.
   $y = e^{-x} + \dfrac{x}{3} \Rightarrow y' = -e^{-x} + \dfrac{1}{3} \Rightarrow y'' = e^{-x} \Rightarrow y''' = -e^{-x} \Rightarrow y^{(iv)} = e^{-x}$. Substituindo $y^{(iv)}, y'''$ e y' na EDO, $y^{(iv)} + 4y''' - 3y' = e^{-x} - 4e^{-x} + 3e^{-x} - 3 \cdot \dfrac{1}{3} = -1 \neq x1$, a EDO não está satisfeita.

6. Sim, é solução. Sabemos que a função constante 4 e a função $\ln x$ estão bem definidas e são diferenciáveis para todo $x \in (0, \infty)$, logo a função $f(x) = 4 + 2\ln x$ é bem definida e diferenciável para todo $x \in (0, \infty)$.
   $y = 4 + 2\ln x \Rightarrow y' = \dfrac{2}{x} \Rightarrow y'' = -\dfrac{2}{x^2}$. Substituindo y'', y' e y na EDO,
   $x^2y'' - xy' + y = -x^2 \cdot \dfrac{2}{x^2} - x \cdot \dfrac{2}{x} + 4 + 2\ln x = -2 - 2 + 4 + 2\ln x = 2\ln x$, a EDO está satisfeita.

7. $p = 1$ ou $p = 4$

8. $y' = 3 - xy = F(x, y)$. As funções F e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -x$ são contínuas no conjunto aberto $U = \mathbb{R}^2$ e $(0, 0) \in U$, logo o Teorema da Existência e Unicidade garante que existe uma única função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que $y(0) = 0$.

9. $y' = \dfrac{3 - y}{x} = F(x, y)$. A função F é definida no conjunto aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$. Neste caso garantimos que não existe nenhuma função pois se existisse, o ponto $(0, 1)$ que dá a condição inicial deveria estar no domínio U de $F(x, y)$, mas $(0, 1) \notin U$.

10. $y' = y^{2/3} = F(x, y)$. A função F é contínua em $U = \mathbb{R}^2$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{-2}{3y^{1/3}}$ é contínua no conjunto aberto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$. O ponto da condição inicial é $(0, 0) \in U$, mas $(0, 0) \notin A$, logo não é possível aplicar o Teorema da Existência e Unicidade para garantir que existe uma única função $y = y(x)$, $x \in I$, I intervalo aberto contendo $x = 0$ e tal que $y(0) = 0$. Observe que não foi dito que não existe tal função, só foi dito que não conseguimos garantir que existe.

11. Não existe, análogo ao exercício 9.

12. $y' = -\dfrac{y}{x(2x + 3)} + \dfrac{\ln|x - 2|}{x} = F(x, y)$. As funções F e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{1}{x(2x + 3)}$ são contínuas no conjunto aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, x \neq -3/2, x \neq 2\}$. O Teorema da Existência e Unicidade garante a exis-tência de uma única função nos quatro casos, a saber:
    (a) o ponto $(-3, 0) \in U$, existe uma única $y = f(x)$, tal que $x \in I = (-\infty, -3/2)$.
    (b) o ponto $(-1, 5) \in U$, existe uma única $y = g(x)$, tal que $x \in I = (-3/2, 0)$.
    (c) o ponto $(1, 7) \in U$, existe uma única $y = h(x)$, tal que $x \in I = (0, 2)$.
    (d) o ponto $(3, 0) \in U$, existe uma única $y = y(x)$, tal que $x \in I = (2, \infty)$.

13. $y = e^{\sqrt{\ln(Cx^2)}}$ ou $y = e^{-\sqrt{\ln(Cx^2)}}$

14. $x = \sqrt{6y - 12\ln|y| + C}$ ou $x = -\sqrt{6y - 12\ln|y| + C}$

15. $y = y(x)$ definida implicitamente pela equação $\operatorname{sen} y - y\cos y = \ln|x| + \dfrac{x^2}{2} + C$

16. $y = \sqrt{C - e^{x^2}}$ $y = \sqrt{C - e^{x^2}}$ ou $y = -\sqrt{C - e^{x^2}}$

17. $y = \sqrt{2e^x - 1}, \quad x > -\ln 2$

18. $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \tan(\operatorname{arccot} x) = \tan\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

19. (a) $y(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-x}}, \ x > -\ln 2$ (b) $y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}$ (obs. essa solução é singular) (c) $y(x) = 1, \ x \in \mathbb{R}$

20. Precisa-se dividir em 2 casos: $B = 0$ e $B \neq 0$.

    (a) Quando $B = 0$. A região é $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; \ x > 0\}$.
    Quando $B \neq 0$. A região é $\left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; \ t > \dfrac{b}{B}, \ x > 0\right\}$.

    (b) Quando $B = 0$. Família de soluções: $x(t) = \dfrac{(at + C)^6}{6^6 b^6}$.
    Quando $B \neq 0$. Família de soluções: $x(t) = \left(\dfrac{a}{3B(b - Bt)^{1/2}} + C\right)^6$.

21. Quando $a_1 \neq 0, a_2 = 0$, a região de soluções únicas é $\mathbb{R}^2 - \{\text{eixo } y\}$. Solução geral: $y = Cx^{\frac{b_1}{a_1}} e^{\frac{b_2}{a_1}x}, C \in \mathbb{R}$.

    Quando $a_1 = 0, a_2 \neq 0$, a região de soluções únicas é $\mathbb{R}^2 - \{\text{eixos } x \text{ e } y\}$.

    Solução geral: $y = \frac{b_1}{a_2} \ln |x| + \frac{b_2}{a_2} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

    Quando $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, a região de soluções únicas é $\mathbb{R}^2 - \{\text{eixo } y\} - \{\text{reta } y = \frac{a_1}{a_2}\}$.

    Solução geral: $y = y(x)$ definida implicitamente pela equação $a_1 \ln |y| + a_2 y = b_1 \ln |x| + b_2 x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

22. $y = x^2$

23. 12 horas