

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 9 - 2015-2
EDO's de primeira ordem:
linear e homogênea
Trajetórias ortogonais
Algumas aplicações de EDO

Nos exercícios 1 a 8 algumas das equações são lineares de primeira ordem. Identifique-as e ache sua solução geral.

1. $(1+x)ydx + xdy = 0$

5. $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$

2. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

6. $y' + \frac{y}{\sin(x)} - y^2 = 0$

3. $\frac{dy}{dx} - y \tan(x) = \sin(x)$

7. $x^3y' + 4x^2y + e^x = 0$

4. $(2y - x^4)dx + xdy = 0$

8. $\frac{dr}{d\theta} + 2r \cos(2\theta) = \sin(4\theta)$

Nos exercícios 9 e 10 resolva o problema de valor inicial.

9. $y' - xy = (1 - x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad y(0) = 0$

10. $(y - 1)x' - 3x = (y - 1)^5, \quad x(-1) = 16$

11. Mostre que a equação $\cos(y)y' + 2x \sin(y) = -2x$ pode ser transformada numa equação linear e resolva o PVI com $y(0) = 0$. (sugestão: $z = \sin(y)$)

Nos exercícios 12 a 17 verifique quais equações são homogêneas e resolva-as.

12. $(5x - y)dx + 3xdy = 0$

15. $xy' + y = 3$

13. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

16. $e^{\frac{y}{x}} + y' - \frac{y}{x} = 0$

14. $(xy + 1)dx + y^2dy = 0$

17. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

18. Considere a equação da forma $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$, onde a, b, c, A, B, C são constantes reais.

Verifique que:

(a) quando $aB - Ab \neq 0$, pode-se reduzir essa equação em uma equação homogênea nas variáveis z e w se $z = x - h$ e $w = y - k$, onde h e k são as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

(b) quando $aB - Ab = 0$ e a e b não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis x e z , se fizermos a substituição $z = ax + by$.

(c) quando $aB - Ab = 0$ e A e B não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis x e z , se fizermos a substituição $z = Ax + By$.

Nos exercícios 19 a 21 use o método desenvolvido acima, para determinar a solução geral das equações.

19. $y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$

20. $y' = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}$

21. $y' = \frac{y}{x - y - 1}$

22. Resolva o PVI $y' = \frac{2x + y - 4}{x - y + 1}$, $y(2) = 2$.

23. Encontre a família de curvas ortogonais à família de parábolas $y = cx^2$.24. Encontre a família de curvas ortogonais à família de elipses $x^2 + 4y^2 = c$, $x > 0$, $y > 0$.25. Encontre a família de curvas ortogonais à família de hipérbolas $xy = c$, $c \neq 0$.26. Encontre a família de curvas ortogonais à família de círculos que contém os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

27. Suponha que a taxa de desintegração de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de substância existente em cada instante de tempo.

Numa amostra de uma certa substância quando decorridos 1200 anos há uma perda de 36% dessa substância.

(a) Escreva a equação diferencial que descreve o processo de desintegração.

(b) Determine a constante de desintegração dessa substância.

(c) Determine a quantidade da amostra que desaparece em 600 anos.

(d) Em quantos anos haverá apenas $1/50$ da quantidade original da amostra?(e) Lembre que a *meia vida* de uma substância radioativa é o tempo em que uma amostra da substância se desintegra à metade da quantidade original. Determine a meia vida dessa substância.28. Resolva a equação $L \frac{dI}{dt} + RI = E \sin(wt)$ onde L, R, E e w são constantes e I é uma função de t . (Esta função dá a corrente em um circuito de resistência R e indutância L impulsionada por um gerador de corrente alternada de frequência $\frac{w}{2\pi}$ e voltagem máxima E).

RESPOSTAS DA LISTA 9 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $y(x) = \frac{C}{x} e^{-x}$

10. $x(y) = \left(\frac{y^2}{2} - y - \frac{7}{2} \right) (y - 1)^3$, $y < 1$

2. Não é linear

3. $y(x) = \frac{1}{2} \sec x (\sec^2(x) + C)$

11. $y(x) = \arcsen(e^{-x^2} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

4. $y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$

12. $-\frac{5}{2}x + Cx^{\frac{1}{3}}$

5. $x(y) = -\frac{1}{y} + Cy^2$

13. $y = y(x)$ implícita em $y^2 = x^2 + Cx$

6. Não é linear

14. Não é homogênea

7. $y(x) = \frac{1}{x^4} (e^x - xe^x + C)$

15. Não é homogênea

8. $r(\theta) = -1 + \sen(2\theta) + Ce^{-\sen(2\theta)}$

16. $y(x) = -x \ln(\ln(C|x|))$

9. $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right)$, $x \in \mathbb{R}$

17. $y = y(x)$ implícita em $y^2 = 2x^2 \ln(C|x|)$

18. (a) Temos que $w = w(y) = y - k$ e $y = y(x)$, logo $w = w(y) \Rightarrow w = w(y(x))$.

Mas $z = x - h$ ou $x = x(z) = z + h$. Logo $w = w(y(x(z)))$.

Aplicando a regra da cadeia duas vezes obtemos: $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz}$

Observando que $\frac{dw}{dy} = 1$ e $\frac{dx}{dz} = 1$, concluímos que $\frac{dw}{dz} = \frac{dy}{dx}$.

Agora, substituindo x , y e $\frac{dy}{dx}$ na equação original, obtemos

$$\frac{dw}{dz} = F \left(\frac{a(z+h) + b(w+k) + c}{A(z+h) + B(w+k) + C} \right) = F \left(\frac{az + bw + (ah + bw + c)}{Az + Bw + (Ah + Bk + C)} \right)$$

Supondo que $aB - Ab \neq 0$, o sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ tem solução. Se $x = h$ e $y = k$

é a solução desse sistema, encontramos

$$\frac{dw}{dz} = F \left(\frac{az + bwk + 0}{Az + Bwk + 0} \right) \text{ que é uma equação homogênea nas variáveis } z \text{ e } w.$$

(b) Supondo que $aB = Ab$, a e b não são simultaneamente nulos, faz-se a substituição $z = ax + by$.

$$\text{Podemos escrever } \frac{dy}{dx} = F \left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C} \right) =$$

$$F \left(\frac{b(ax + by + c)}{bAx + bBy + bC} \right) = F \left(\frac{b(ax + by + c)}{aBx + bBy + bC} \right) = F \left(\frac{b(ax + by + c)}{B(ax + by) + bC} \right) = F \left(\frac{b(z + c)}{Bz + bC} \right)$$

Temos ainda que $\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$. Substituindo $\frac{dy}{dx}$ encontrado acima nesta última equação, obtemos

$$\frac{dz}{dx} = a + bF \left(\frac{b(z + c)}{Bz + bC} \right) \text{ que é uma equação de variáveis separáveis nas variáveis } z \text{ e } x.$$

(c) Análogo ao item anterior.

19. $\arctan \frac{y+5}{x-1} = \frac{1}{2} \ln C ((x-1)^2 + (y+5)^2)$

20. $y - x - 5 \ln |x + y - 1| = C$

21. y implícita em $y \ln(Cy) = 1 - x$

22. $\sqrt{2} \arctan \left(1 + \frac{(y-2)^2}{2(x-1)^2} \right) = \ln \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}}{2} [(x-1)^2 + (y-2)^2] \right), \quad x > 1$

23. $x^2 + 2y^2 = C$

24. $y = Cx^4$

25. $x^2 - y^2 = C$

26. $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - 1$

27. Suponha que $q(t)$ é a quantidade de substância quando decorridos t anos e q_0 a quantidade da substância no início de um período de t anos, isto é, $q_0 = q(0)$.

(a) $\frac{dq(t)}{dt} = kq(t)$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

(b) Resolvendo o PVI, encontra-se $Q(t) = q_0 e^{kt}$.

Calculando, $q(1200) = q_0 e^{k \cdot 1200}$. Por outro lado, é dado que $q(1200) = \frac{64}{100} q_0$.

Resolvendo a equação $q_0 e^{k \cdot 1200} = \frac{64}{100} q_0$, encontra-se $k = \frac{1}{600} \ln \left(\frac{4}{5} \right)$.

(c) Substituindo o valor de k , encontra-se $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600}(\ln(\frac{4}{5}))t}$.

Calculando, a perda em 600 anos é igual a $q(0) - q(600) = q_0 - q_0 e^{\frac{600}{600}(\ln(\frac{4}{5}))} = q_0 - \frac{4}{5} q_0 = \frac{1}{5} q_0$. Logo em 600 anos a perda é de 20%.

(d) $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600}(\ln(\frac{4}{5}))t} = \frac{1}{50} q_0$.

Resolvendo a equação, encontramos $t = 600 \left(\frac{\ln 2 - \ln 25}{\ln 4 - \ln 5} \right) \cong 6.791,31$ anos.

(e) $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600}(\ln(\frac{4}{5}))t} = \frac{1}{2} q_0$.

Resolvendo a equação, encontramos $t = 600 \left(\frac{-\ln 2}{\ln 4 - \ln 5} \right) \cong 1.863,77$ anos.

28.
$$I = \frac{E(R \operatorname{sen} \omega t - \omega L \operatorname{cos} \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} + C e^{-\frac{R}{L}t}$$