

UFF Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 10 - 2015-2

Equação diferencial exata

EDO's especiais:

Bernoulli, Ricatti e Clairaut

Nos exercícios 1 a 6 identifique as equações diferenciais exatas e resolva-as.

1. $(x - y)dx + (-x + y + 2)dy = 0$
2. $y' = \frac{y - x + 1}{-x + y + 3}$
3. $(x^2 + y^2) dx + (xe^{xy} + 1) dy = 0$
4. $(3x^2y + e^y - e^x) dx + (x^3 + xe^y) dy = 0$
5. $(y + \cos x)dx + (x + \sin y)dy = 0$
6. $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right) dx = (1 - \ln x)dy$

Nos exercícios 7 e 8 resolva o PVI.

7. $(e^x + y) dx + (2 + x + ye^y) dy = 0, \quad y(0) = 1$
8. $\left(\frac{1}{1 + y^2} + \cos x - 2xy\right) \frac{dy}{dx} = y(y + \sin x), \quad y(0) = 1$

Nos exercícios 9 e 10 verifique que $\lambda = \lambda(x, y)$ é um fator de integração que transforma a EDO dada em uma EDO exata e resolva a EDO.

9. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0; \quad \lambda(x, y) = \frac{1}{xy^3}$
10. $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0; \quad \lambda(x, y) = ye^x$

Nos exercícios 11 a 18 verifique se é possível encontrar um fator de integração do tipo $\lambda = \lambda(x)$ ou $\lambda = \lambda(y)$ que transforma a EDO dada em uma EDO exata. Em caso afirmativo, determine o fator de integração e resolva a EDO.

11. $yx^3dx - (x^4 + y^4) dy = 0$
12. $y' = e^{2x} + y - 1$
13. $(3x^2y + 2xy + y^3) dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
14. $\left(\frac{x}{y + x^2} dx\right) + \left(\frac{y}{x + y^2}\right) dy = 0$
15. $(x^2 + y^2 + 2x) dx + (x^2 + y^2 + 2y) dy = 0$
16. $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right) dy = 0$
17. $ydx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0$
18. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0$

Nos exercícios 19 a 22 identifique as equações do tipo Bernoulli e resolva-as.

[lembrando, tipo Bernoulli: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, n constante real]

19. $y' - 2xy = 4xy^{1/2}$
20. $xy' - \frac{y}{2 \ln x} = y^2$
21. $y' - xy = x^3 + y^3$
22. $xdy - (y + xy^3(1 + \ln x)) dx = 0$

Nos exercícios 23 a 26 identifique as equações do tipo Ricatti e se é conhecida uma solução particular y_1 , resolva-a. [lembrando, tipo Ricatti: $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$]

23. $y' = (x + y)^2$, $y_1 = -x + \tan x$ 25. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$, $y_1 = -e^x$
 24. $\frac{dy}{dx} = 1 - xy^2 + y^3$, $y_1 = x$ 26. $y' = 9 + 6y + y^2$

Nos exercícios 27 e 27 verifique que as equações são do tipo Clairaut e encontre uma família de soluções e as soluções singulares na forma paramétrica. [lembrando, tipo Clairaut: $y = xy' + F(y')$]

27. $y = xy' + \ln(y')$ 28. $y = (x + 4)y' + (y')^2$

Nos exercícios 29 e 30 resolva o PVI.

29. $y' = \sec^2(x) - (\tan x)y + y^2$, se $y_1 = \tan x$ é uma solução da EDO e $y(0) = 1/2$.
 30. $y = xy' + (y')^{-2}$, $y(-2) = 3$. Este PVI terá mais de uma solução. Isso contradiz o Teorema da Existência e Unicidade?

RESPOSTAS DA LISTA 10 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $x^2 + y^2 + (4 - 2x)y = C$ 18. $\lambda(y) = \sin y$; $e^x \sin y + y^2 = C$
 2. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 6y = C$ 19. $y(x) = \left(-2 + Ce^{x^2/2}\right)^2$
 3. Não é exata 20. $y(x) = \frac{3\sqrt{\ln x}}{C - 2\sqrt{(\ln x)^3}}$
 4. $x^3y + xe^y + e^x = C$ 21. Não é tipo Bernoulli
 5. $xy + \sin x - \cos y = C$ 22. $y^2 = \frac{3}{x(1 + 2 \ln x) + cx^{-2}}$
 6. $-y + y \ln x + x \ln x = C$ 23. $y = -x + \tan x + \frac{\sec^2 x}{C - \tan x}$
 7. $e^x + xy + 2y + ye^y - e^y = 3$ 24. Não é tipo Ricatti
 8. $-xy^2 + y \cos x + \arctan y = 1 + \pi/4$ 25. $y = -e^x + \frac{1}{Ce^{-x} - 1}$
 9. $x^2 + 2 \ln |y| - y^{-2} = C$ 26. $y = -3 + \frac{1}{C - x}$
 10. $e^x \sin y + 2y \cos x = C$ 27. Família de soluções: $y = Cx + \ln C$
 11. $\lambda(x) = \frac{1}{y^5}$; $x^4 - 4y^4 \ln |y| = Cy^4$ Solução singular: $x = -\frac{1}{t}$; $y = 1 + \ln t$
 12. $\lambda(x) = e^{-x}$; $y = Ce^x + 1 + e^{2x}$ 28. Família de soluções: $y = Cx + 4C + C^2$
 13. $\lambda(x) = e^{3x}$; $(3x^2y + y^3)e^{3x} = C$ Solução singular: $x = -4 - 2t$; $y = 4 - 2t - 2t^2$
 14. Não é possível 29. $y = \tan x + \frac{\sec x}{2 - \ln(\sec x + \tan x)}$
 15. Não é possível
 16. $\lambda(y) = y$; $xy + y \cos y - \sin y = C$
 17. $\lambda(y) = \frac{e^{2y}}{y}$; $xe^{2y} - \ln |y| = C$
 30. $y = -x + 1$; $y = \frac{x}{2} + 4$ e $4y^3 = 27x^2$

Não, só seria contradição se as hipóteses estivessem satisfeitas e a tese não valesse, mas não é este o caso, o que não está satisfeita é a tese. Para testar as hipóteses teríamos que explicitar y' em termos de x e y , que neste caso é difícil. Mas com certeza uma das hipóteses falha, pois se não falhasse, a tese (solução única) seria válida.