

Nome Completo: _____

Instruções: A prova vale 10 pontos e tem duração de 1h50min.

Não é permitido sair da sala durante a prova nem o uso de qualquer material eletrônico.

A resolução da prova deve ser realizada na(s) folha(s) de papel anexa(s) e cada resposta deverá ter devidamente identificado o número da questão à qual se refere.

As respostas sem uma justificativa correta serão desconsideradas.

1. (2,5 pts) Seja f uma função real definida por $f(x, y) = \left| \frac{1}{x - y} \right|$.

- (a) Determine o domínio e a imagem de f .
- (b) Determine a equação da curva de nível que passa no ponto $(1, 0)$.
- (c) Represente geometricamente a curva de nível correspondente ao nível 3.

2. (2,5 pts) Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0, 0)$.
- (b) Estude f quanto à continuidade e diferenciabilidade no ponto $(0, 0)$.

3. (3,0 pts) Seja f uma função real diferenciável tal que $4y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2$, para todo (x, y) .

- (a) Se $g(t) = f(2 \cos(t), \sin(t))$, mostre que $g'(t) = -1$, para todo t .
- (b) Se $f(1, 1) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$, determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

4. (2,0 pts) Considere a função real definida por $f(x, y) = x \sin(y)$. Seja $P_2(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de $(0, 0)$. Mostre que:

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| < \frac{|y|^2}{2} \left(|x| + \frac{1}{3}|y| \right)$$

para todo (x, y) com $|x| < 1$.