

Cálculo III - A

Maria João Resende

www.professores.uff.br/mjoao

2014-2

Campo Vetorial

Definição

Sejam P e Q funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$.

Campo Vetorial

Definição

Sejam P e Q funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$. A função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Campo Vetorial

Definição

Sejam P e Q funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$. A função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^2$.

Campo Vetorial

Definição

Sejam P e Q funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$. A função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^2$.

Analogamente definimos campo vetorial em \mathbb{R}^3 e denotamos por

Campo Vetorial

Definição

Sejam P e Q funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$. A função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^2$.

Analogamente definimos campo vetorial em \mathbb{R}^3 e denotamos por

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Campo Vetorial

Definição

Sejam P e Q funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$. A função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

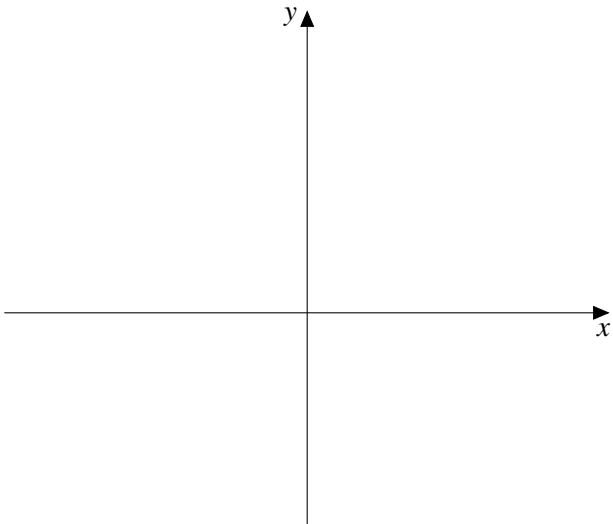
$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^2$.

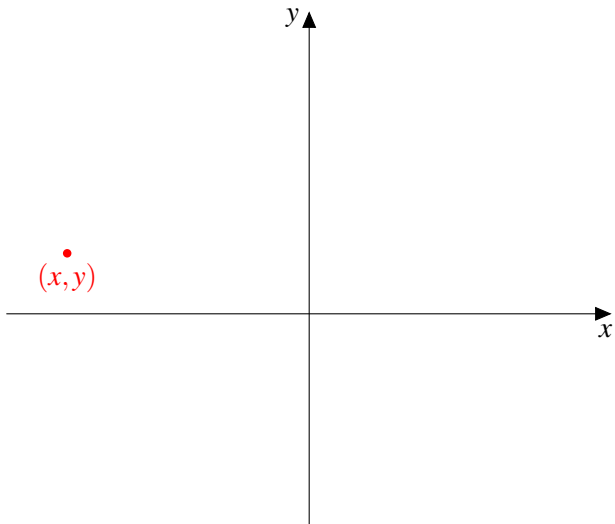
Analogamente definimos campo vetorial em \mathbb{R}^3 e denotamos por

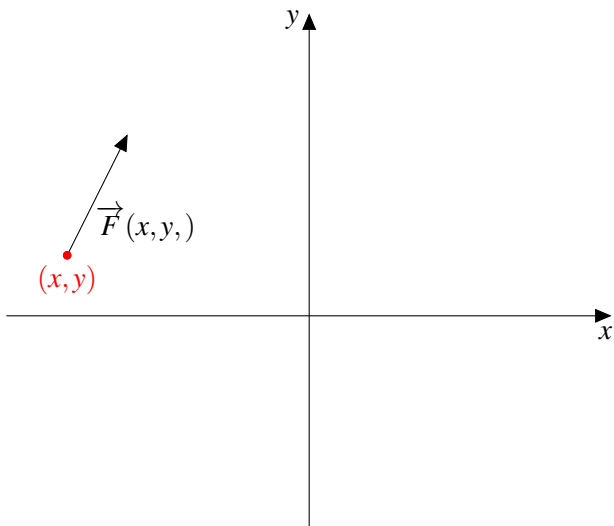
$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k} \end{aligned}$$

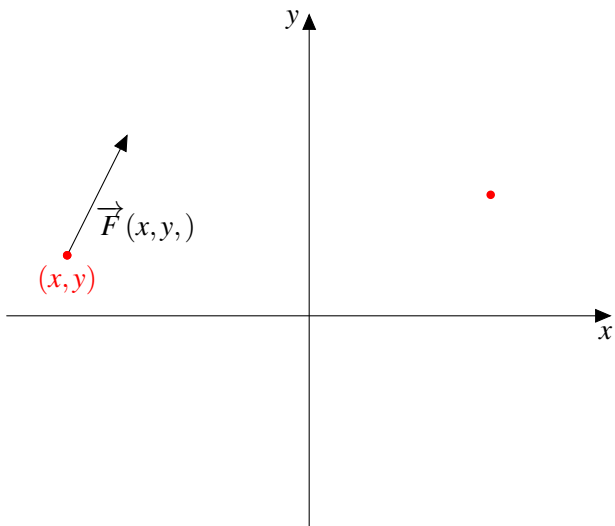
Campo vetorial em \mathbb{R}^2

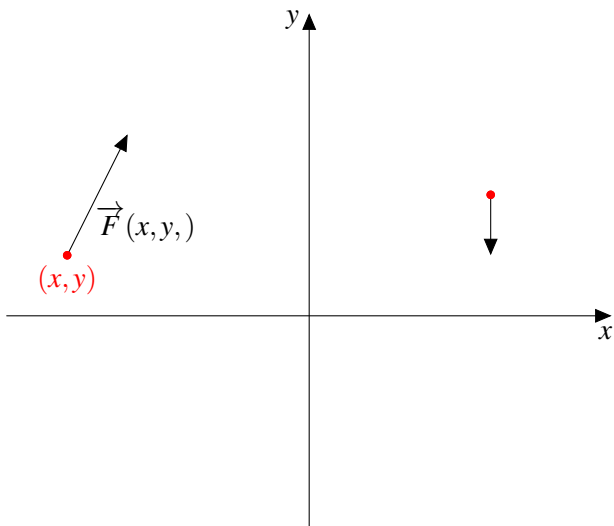


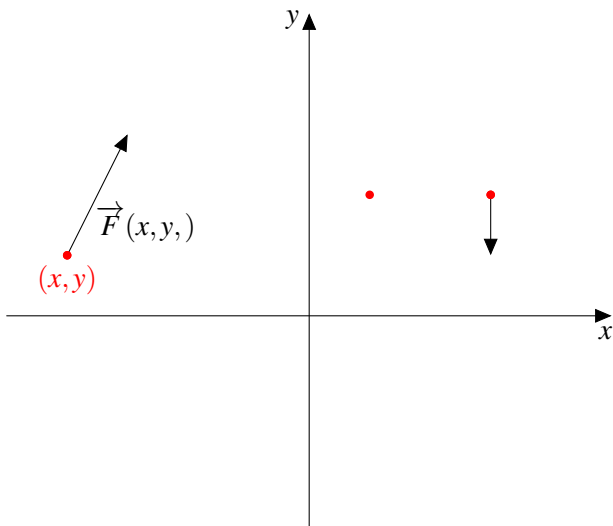
Campo vetorial em \mathbb{R}^2



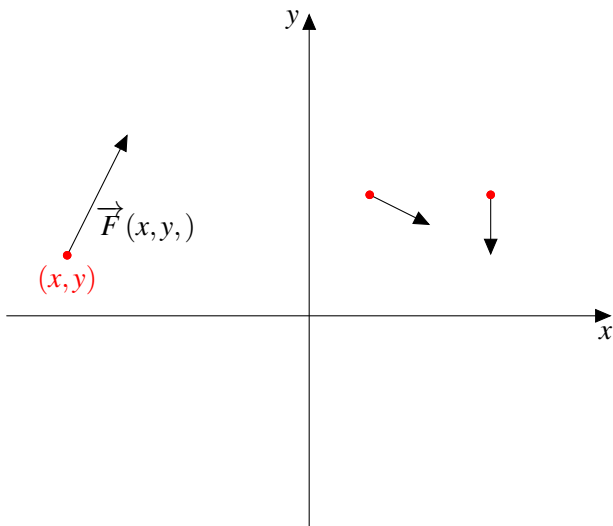
Campo vetorial em \mathbb{R}^2 

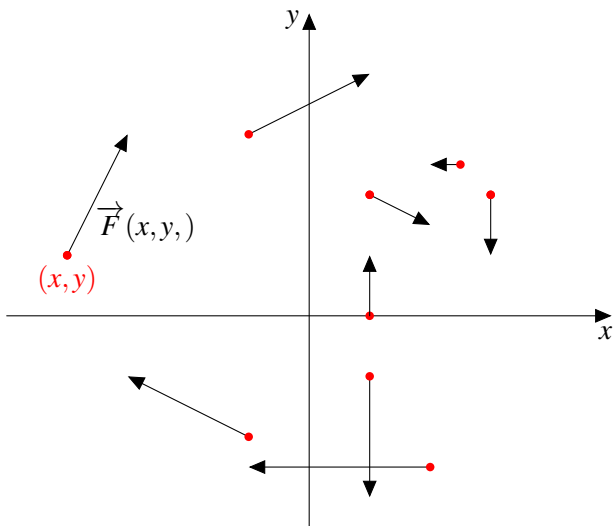
Campo vetorial em \mathbb{R}^2 

Campo vetorial em \mathbb{R}^2 

Campo vetorial em \mathbb{R}^2 

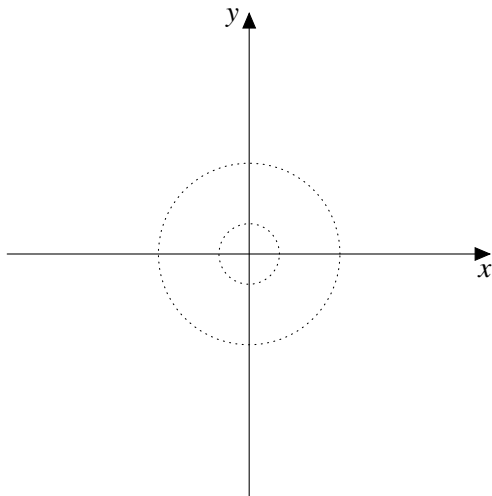
Campo vetorial em \mathbb{R}^2



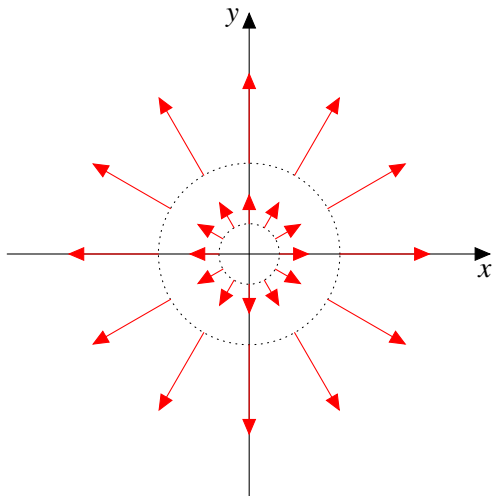
Campo vetorial em \mathbb{R}^2 

$$\vec{F}(x,y) = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$$\vec{F}(x,y) = x \vec{i} + y \vec{j}$$

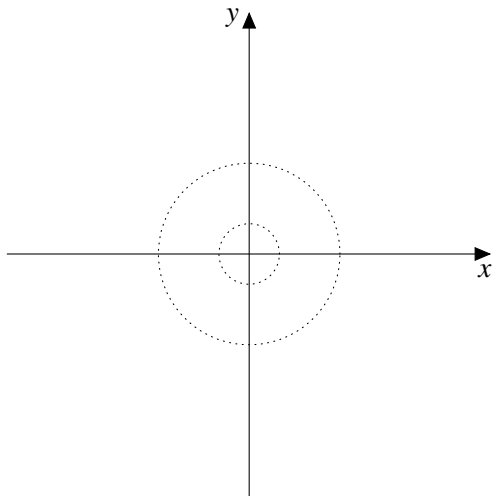


$$\vec{F}(x,y) = x \vec{i} + y \vec{j}$$

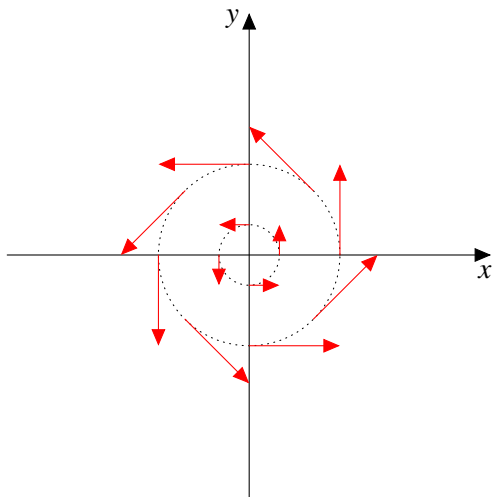


$$\vec{F}(x,y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$$

$$\vec{F}(x,y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$$

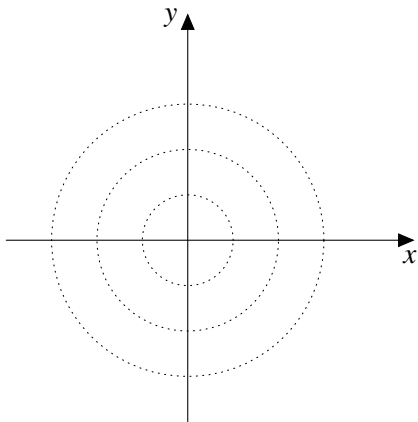


$$\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

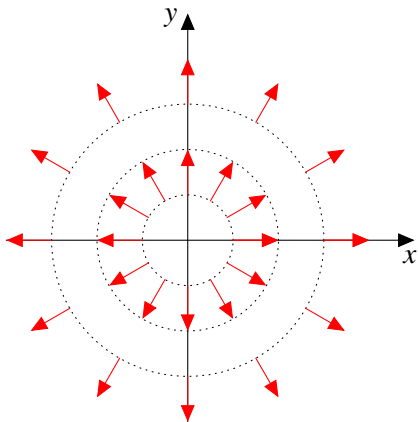


$$\vec{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}$$

$$\vec{F}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j}$$

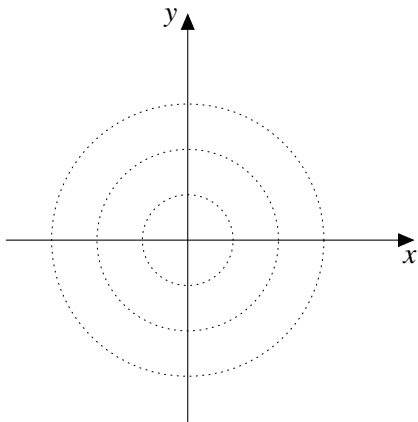


$$\vec{F}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j}$$

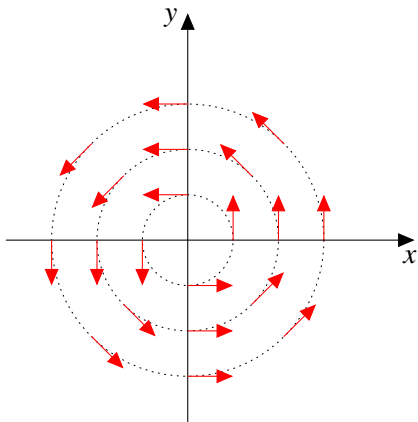


$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}$$

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j}$$



$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j}$$



Divergente

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

Divergente

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergente

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Se $\vec{F} = (P, Q)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^2 , então

Divergente

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Se $\vec{F} = (P, Q)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^2 , então

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Divergente

Consideremos o operador diferencial ∇ dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Divergente

Consideremos o operador diferencial ∇ dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Divergente

Consideremos o operador diferencial ∇ dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Com esta notação de operador, obtemos:

Divergente

Consideremos o operador diferencial ∇ dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Com esta notação de operador, obtemos:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergente

Consideremos o operador diferencial ∇ dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Com esta notação de operador, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \end{aligned}$$

Divergente

Consideremos o operador diferencial ∇ dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Com esta notação de operador, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \nabla \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Rotacional

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

Rotacional

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Rotacional

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Se $\vec{F} = (P, Q)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^2 , então

Rotacional

Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^3 , então

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Se $\vec{F} = (P, Q)$ um campo diferenciável em \mathbb{R}^2 , então

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Rotacional

Com a notação do operador ∇ obtemos:

Rotacional

Com a notação do operador ∇ obtemos:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Rotacional

Com a notação do operador ∇ obtemos:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}$$

Gradiente e Laplaciano

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Gradiente e Laplaciano

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Gradiente

$$\text{grad } f$$

Gradiente e Laplaciano

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Gradiente

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Gradiente e Laplaciano

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Gradiente

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$$

Gradiente e Laplaciano

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Gradiente

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$$

Laplaciano

$$\text{lap } f = \nabla^2 f =$$

Gradiente e Laplaciano

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Gradiente

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$$

Laplaciano

$$\text{lap } f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Gradiente e Laplaciano

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Gradiente

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$$

Laplaciano

$$\text{lap } f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla \cdot (\nabla f)$$

Sejam f um campo escalar e \vec{F} um campo vetorial, ambos de classe C^2 .
Então:

Sejam f um campo escalar e \vec{F} um campo vetorial, ambos de classe C^2 .
Então:

Propriedades dos operadores diferenciais

$$\textcircled{1} \text{ rot}(\text{grad } f) = \vec{0} \text{ ou } \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

Sejam f um campo escalar e \vec{F} um campo vetorial, ambos de classe C^2 .
Então:

Propriedades dos operadores diferenciais

- 1 $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$ ou $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- 2 $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ ou $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Sejam f um campo escalar e \vec{F} um campo vetorial, ambos de classe C^2 .
Então:

Propriedades dos operadores diferenciais

- 1 $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$ ou $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- 2 $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ ou $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
- 3 $\text{div}(\text{grad } f) = \text{lap } f$ ou $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$

Sejam f um campo escalar e \vec{F} um campo vetorial, ambos de classe C^2 .
Então:

Propriedades dos operadores diferenciais

- 1 $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$ ou $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- 2 $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ ou $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
- 3 $\text{div}(\text{grad } f) = \text{lap } f$ ou $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$
- 4 $\nabla \cdot (f \vec{F}) = f \nabla \cdot \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$

Sejam f um campo escalar e \vec{F} um campo vetorial, ambos de classe C^2 .
Então:

Propriedades dos operadores diferenciais

- ① $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$ ou $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- ② $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ ou $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
- ③ $\text{div}(\text{grad } f) = \text{lap } f$ ou $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$
- ④ $\nabla \cdot (f \vec{F}) = f \nabla \cdot \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$

Exercício: Prove as propriedades anteriores.

Calcule o divergente e o rotacional dos campos:

$$\textcircled{1} \quad \vec{F}(x, y, z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{F}(x, y, z) = (z + \operatorname{sen} y) \vec{i} + (z - x \cos y) \vec{j}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

$$\textcircled{4} \quad \vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

Objetivo: Calcular o trabalho realizado por uma força \vec{F} , que atua sobre uma partícula que se move ao longo de uma curva \mathcal{C} .

Objetivo: Calcular o trabalho realizado por uma força \vec{F} , que atua sobre uma partícula que se move ao longo de uma curva \mathcal{C} .

Caso Particular \vec{F} é constante e \mathcal{C} é um segmento de reta \vec{AB}

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Objetivo: Calcular o trabalho realizado por uma força \vec{F} , que atua sobre uma partícula que se move ao longo de uma curva \mathcal{C} .

Caso Particular \vec{F} é constante e \mathcal{C} é um segmento de reta \vec{AB}

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Caso Geral \vec{F} é dada por um campo vetorial e \mathcal{C} é uma curva qualquer

Objetivo: Calcular o trabalho realizado por uma força \vec{F} , que atua sobre uma partícula que se move ao longo de uma curva \mathcal{C} .

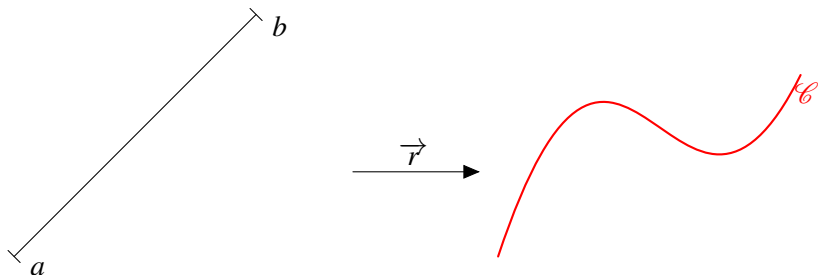
Caso Particular \vec{F} é constante e \mathcal{C} é um segmento de reta \vec{AB}

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

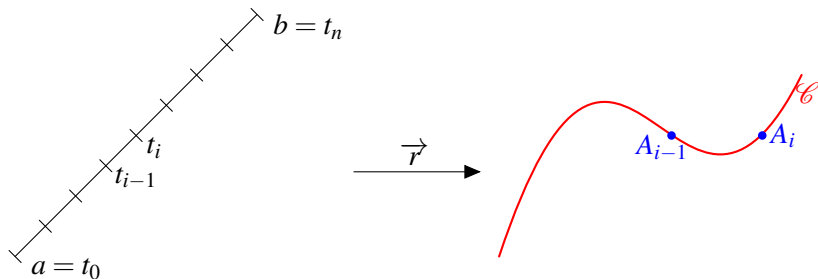
Caso Geral \vec{F} é dada por um campo vetorial e \mathcal{C} é uma curva qualquer

Vamos ver o caso em que \vec{F} é um campo vetorial em \mathbb{R}^2 , ou seja $\vec{F} = (P, Q)$.

Integral de linha de campo vetorial

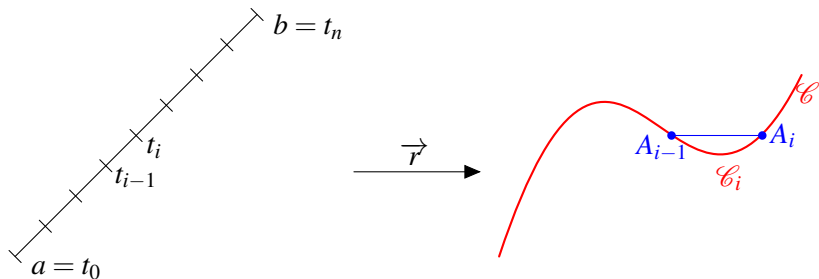


Integral de linha de campo vetorial



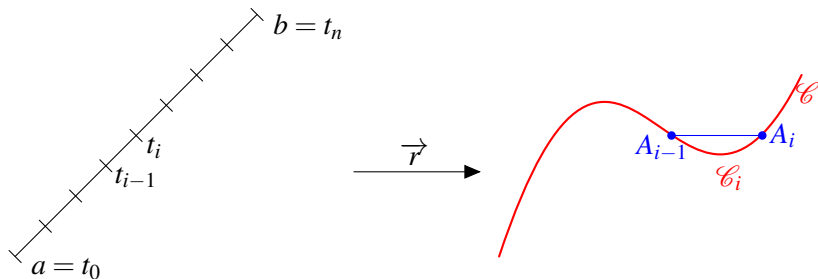
Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ com comprimentos $\Delta t = \frac{b-a}{n}$.

Integral de linha de campo vetorial



Então podemos definir os segmentos de reta $\overline{A_{i-1}A_i}$ associados ao arco \mathcal{C}_i .

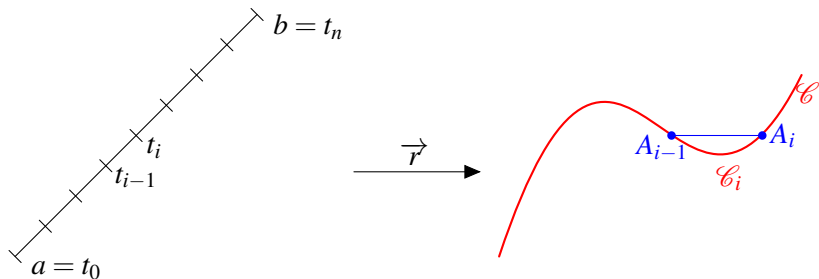
Integral de linha de campo vetorial



O trabalho ao longo do arco \mathcal{C}_i é aproximadamente

$$\begin{aligned} W_i &\cong \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(x(t_i), y(t_i))\Delta x + Q(x(t_i), y(t_i))\Delta y \\ &\cong P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*)\Delta t + Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**})\Delta t \end{aligned}$$

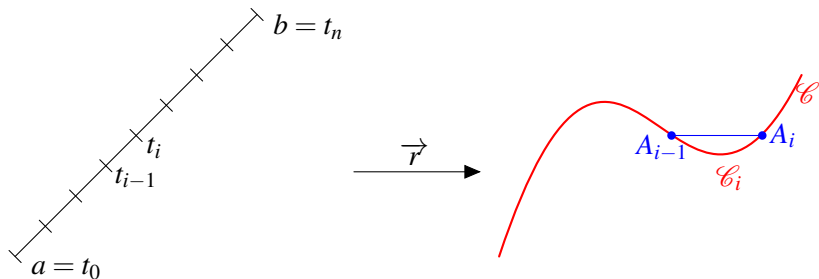
Integral de linha de campo vetorial



Fazendo a soma obtemos

$$W \cong \sum_{i=1}^n [P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**})] \Delta t,$$

Integral de linha de campo vetorial



Definimos a integral de linha de \vec{F} sobre \mathcal{C}

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i, \quad \text{se o limite existir.}$$

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial e $\mathcal{C} \subset D$ uma curva de classe C^1 , parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial e $\mathcal{C} \subset D$ uma curva de classe C^1 , parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.

Integral de linha de campo vetorial em \mathbb{R}^3

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial e $\mathcal{C} \subset D$ uma curva de classe C^1 , parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.

Integral de linha de campo vetorial em \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b [P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial e $\mathcal{C} \subset D$ uma curva de classe C^1 , parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.

Integral de linha de campo vetorial em \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b [P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t)] dt \\ &= \int_a^b P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$

Observações

- ❶ Se \mathcal{C} é uma curva C^1 por partes, com $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$, então

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Observações

- ❶ Se \mathcal{C} é uma curva C^1 por partes, com $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$, então

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- ❷ A integral de linha de um campo vetorial \vec{F} não depende da parametrização desde que não se inverta a orientação da curva.

Observações

- 3 Se \mathcal{C}_+ e \mathcal{C}_- são a representação da curva \mathcal{C} percorrida com orientações opostas, então

$$\int_{\mathcal{C}_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Observações

- 3 Se \mathcal{C}_+ e \mathcal{C}_- são a representação da curva \mathcal{C} percorrida com orientações opostas, então

$$\int_{\mathcal{C}_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- 4 Se \mathcal{C} é uma curva fechada (isto é $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$) e está orientada no sentido anti-horário, denotamos a integral de linha por $\oint_{\mathcal{C}_+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Observações

- 3 Se \mathcal{C}_+ e \mathcal{C}_- são a representação da curva \mathcal{C} percorrida com orientações opostas, então

$$\int_{\mathcal{C}_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- 4 Se \mathcal{C} é uma curva fechada (isto é $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$) e está orientada no sentido anti-horário, denotamos a integral de linha por $\oint_{\mathcal{C}_+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Caso contrário, denotamos por $\oint_{\mathcal{C}_-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

- 1 Calcule $\int_{\mathcal{C}} x dx + x^2 dy$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ ao longo
- ▶ do eixo x
 - ▶ de $\mathcal{C}: \vec{r}(t) = (-\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \pi$
 - ▶ da poligonal de vértices: $(-1, 0), (0, 1), (1, 1)$ e $(1, 0)$

- 1 Calcule $\int_{\mathcal{C}} x dx + x^2 dy$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ ao longo
- ▶ do eixo x
 - ▶ de \mathcal{C} : $\vec{r}(t) = (-\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$
 - ▶ da poligonal de vértices: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$

- 2 Calcule $\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz$, onde

- ▶ $\vec{F} = (P, Q, R) = (y, z, x)$ e \mathcal{C} é a interseção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, percorrida no sentido anti-horário quando vista da origem.
- ▶ $\vec{F} = (P, Q, R) = (-2y, z, x)$ e \mathcal{C} é a interseção das superfícies $4x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(0, -1, 0)$ ao ponto $(0, 1, 0)$.
- ▶ $\vec{F} = (P, Q, R) = (z, x, y)$ e \mathcal{C} é a interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x + 2y + z = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário.

Campo conservativo

Dizemos que um campo $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou 3 , é um campo conservativo se existir um campo escalar diferenciável $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla\phi = \vec{F}$ em D .

Campo conservativo

Dizemos que um campo $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou 3 , é um campo conservativo se existir um campo escalar diferenciável $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla\phi = \vec{F}$ em D .

Nesse caso, dizemos que ϕ é a função potencial de \vec{F} em D .

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Teorema

Seja \mathcal{C} uma curva parametrizada por $\gamma(t)$, com $t \in [a, b]$, de classe C^1 tal que γ' é não nula em $]a, b[$.

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Teorema

Seja \mathcal{C} uma curva parametrizada por $\gamma(t)$, com $t \in [a, b]$, de classe C^1 tal que γ' é não nula em $]a, b[$. Seja f uma função real, diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente, ∇f é contínuo em \mathcal{C} .

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Teorema

Seja \mathcal{C} uma curva parametrizada por $\gamma(t)$, com $t \in [a, b]$, de classe C^1 tal que γ' é não nula em $]a, b[$. Seja f uma função real, diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente, ∇f é contínuo em \mathcal{C} .

$$\text{Então, } \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Teorema

Seja \mathcal{C} uma curva parametrizada por $\gamma(t)$, com $t \in [a, b]$, de classe C^1 tal que γ' é não nula em $]a, b[$. Seja f uma função real, diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente, ∇f é contínuo em \mathcal{C} .

$$\text{Então, } \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

O teorema afirma que podemos calcular a integral de linha de um campo conservativo, sabendo apenas o valor da função potencial nas extremidades da curva \mathcal{C} .

Exemplo

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2), -2x^2y \operatorname{sen}(xy^2))$ e \mathcal{C} é dada por $\vec{r}(t) = (t + (1-t) \ln(1+t^2), -\cos(\frac{\pi}{2}t))$, com $t \in [0, 1]$.

Exemplo

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2), -2x^2y \sin(xy^2))$ e \mathcal{C} é dada por $\vec{r}(t) = (t + (1-t)\ln(1+t^2), -\cos(\frac{\pi}{2}t))$, com $t \in [0, 1]$.

Podemos verificar que $\phi(x, y) = x \cos(xy^2)$ é função potencial de \vec{F} , logo pelo teorema fundamental das integrais de linha,

Exemplo

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2), -2x^2y \operatorname{sen}(xy^2))$ e \mathcal{C} é dada por $\vec{r}(t) = (t + (1-t) \ln(1+t^2), -\cos(\frac{\pi}{2}t))$, com $t \in [0, 1]$.

Podemos verificar que $\phi(x, y) = x \cos(xy^2)$ é função potencial de \vec{F} , logo pelo teorema fundamental das integrais de linha,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemplo

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2), -2x^2y \sin(xy^2))$ e \mathcal{C} é dada por $\vec{r}(t) = (t + (1-t)\ln(1+t^2), -\cos(\frac{\pi}{2}t))$, com $t \in [0, 1]$.

Podemos verificar que $\phi(x, y) = x \cos(xy^2)$ é função potencial de \vec{F} , logo pelo teorema fundamental das integrais de linha,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0))$$

Exemplo

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2), -2x^2y \sin(xy^2))$ e \mathcal{C} é dada por $\vec{r}(t) = (t + (1-t)\ln(1+t^2), -\cos(\frac{\pi}{2}t))$, com $t \in [0, 1]$.

Podemos verificar que $\phi(x, y) = x \cos(xy^2)$ é função potencial de \vec{F} , logo pelo teorema fundamental das integrais de linha,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)) = \phi(1, 0) - \phi(0, -1) = 1$$

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 .

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observações:

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observações:

- Este teorema garante que se $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ então \vec{F} não é conservativo.

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observações:

- Este teorema garante que se $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ então \vec{F} não é conservativo.
- A recíproca deste teorema não vale, ou seja existem campos não conservativos cujo rotacional é nulo.

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observações:

- Este teorema garante que se $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ então \vec{F} não é conservativo.
- A recíproca deste teorema não vale, ou seja existem campos não conservativos cujo rotacional é nulo.

Exercício: Verifique se \vec{F} é ou não um campo vetorial conservativo.

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observações:

- Este teorema garante que se $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ então \vec{F} não é conservativo.
- A recíproca deste teorema não vale, ou seja existem campos não conservativos cujo rotacional é nulo.

Exercício: Verifique se \vec{F} é ou não um campo vetorial conservativo.

① $\vec{F}(x, y) = e^x \cos(y) \vec{i} + e^x \sin(y) \vec{j}$

Teorema

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo então

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observações:

- Este teorema garante que se $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ então \vec{F} não é conservativo.
- A recíproca deste teorema não vale, ou seja existem campos não conservativos cujo rotacional é nulo.

Exercício: Verifique se \vec{F} é ou não um campo vetorial conservativo.

$$\textcircled{1} \quad \vec{F}(x, y) = e^x \cos(y) \vec{i} + e^x \sin(y) \vec{j}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{F}(x, y) = e^x \sin(y) \vec{i} + e^x \cos(y) \vec{j}$$

Teorema

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 e \mathcal{C} uma curva fechada contida em D .

Teorema

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 e \mathcal{C} uma curva fechada contida em D . Se \vec{F} é conservativo então

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Teorema

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 e \mathcal{C} uma curva fechada contida em D . Se \vec{F} é conservativo então

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Teorema

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 e \mathcal{C} uma curva fechada contida em D . Se \vec{F} é conservativo então

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observação: O teorema garante que se existir uma curva fechada \mathcal{C} tal que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$, então \vec{F} não é conservativo.

Teorema

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 e \mathcal{C} uma curva fechada contida em D . Se \vec{F} é conservativo então

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observação: O teorema garante que se existir uma curva fechada \mathcal{C} tal que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$, então \vec{F} não é conservativo.

Exemplo: Verifique que o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ não é conservativo.

Teorema

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 e \mathcal{C} uma curva fechada contida em D . Se \vec{F} é conservativo então

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observação: O teorema garante que se existir uma curva fechada \mathcal{C} tal que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$, então \vec{F} não é conservativo.

Exemplo: Verifique que o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ não é conservativo.

Se \mathcal{C} é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$,

Teorema

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 e \mathcal{C} uma curva fechada contida em D . Se \vec{F} é conservativo então

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Exercício: Demonstre o teorema.

Observação: O teorema garante que se existir uma curva fechada \mathcal{C} tal que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$, então \vec{F} não é conservativo.

Exemplo: Verifique que o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ não é conservativo.

Se \mathcal{C} é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, então $\oint_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi \neq 0$.

- 1 Considere um campo de forças definido por

$$\vec{F}(x, y) = (x + y) \vec{i} + (x - y) \vec{j}.$$

- 1 Prove que o trabalho realizado por esta força ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\vec{r}(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j}$, $a \leq t \leq b$, depende unicamente de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ e $g(b)$.

- 1 Considere um campo de forças definido por

$$\vec{F}(x, y) = (x + y) \vec{i} + (x - y) \vec{j}.$$

- 1 Prove que o trabalho realizado por esta força ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\vec{r}(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j}$, $a \leq t \leq b$, depende unicamente de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ e $g(b)$.
- 2 Determine o trabalho realizado quando $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $g(a) = 3$ e $g(b) = 4$.

- 1 Considere um campo de forças definido por

$$\vec{F}(x, y) = (x + y) \vec{i} + (x - y) \vec{j}.$$

- 1 Prove que o trabalho realizado por esta força ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\vec{r}(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j}$, $a \leq t \leq b$, depende unicamente de $f(a), f(b), g(a)$ e $g(b)$.
- 2 Determine o trabalho realizado quando $f(a) = 1, f(b) = 2, g(a) = 3$ e $g(b) = 4$.
- 2 Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de g , tal que $h(1) = 2$ e $h(2) = 4$. Calcule

$$\int_{\mathcal{C}} xg(x^2 + y^2 + z^2) dx + yg(x^2 + y^2 + z^2) dy + zg(x^2 + y^2 + z^2) dz,$$

onde \mathcal{C} está situada no primeiro octante, e é a interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima.

Teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais duplas.

Teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais duplas.

Teorema

Seja D uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas.

Teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais duplas.

Teorema

Seja D uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais duplas.

Teorema

Seja D uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Então

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

Teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais duplas.

Teorema

Seja D uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Então

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} P dx + Q dy =$$

Teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais duplas.

Teorema

Seja D uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas simples, fechadas e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, orientadas no sentido que deixa D à esquerda das curvas.

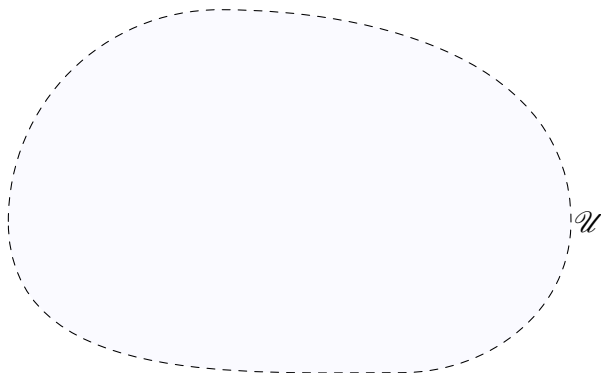
Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Então

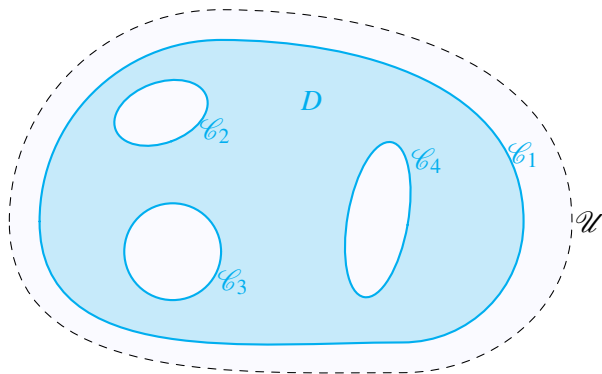
$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Suponhamos que D é como na figura.

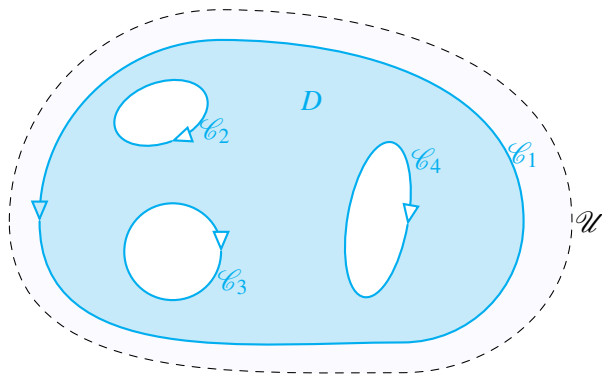
Suponhamos que D é como na figura.



Suponhamos que D é como na figura.



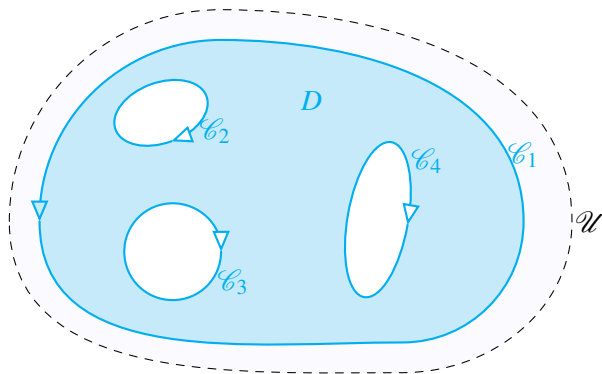
Suponhamos que D é como na figura.



Então $\partial D = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^- \cup \mathcal{C}_3^- \cup \mathcal{C}_4^-$ e

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Suponhamos que D é como na figura.



Então $\partial D = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^- \cup \mathcal{C}_3^- \cup \mathcal{C}_4^-$ e

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\mathcal{C}_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mathcal{C}_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mathcal{C}_3^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mathcal{C}_4^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Exemplo 1

Seja D como no Teorema de Green. Prove que

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D} x dy$$

Exemplo 1

Seja D como no Teorema de Green. Prove que

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D} x dy$$

Por definição de integral de linha, temos:

Exemplo 1

Seja D como no Teorema de Green. Prove que

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D} x dy$$

Por definição de integral de linha, temos:

$$\oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} 0 dx + x dy$$

Exemplo 1

Seja D como no Teorema de Green. Prove que

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D} x dy$$

Por definição de integral de linha, temos:

$$\oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} 0 dx + x dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}(x, y) = (0, x)$.

Exemplo 1

Seja D como no Teorema de Green. Prove que

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D} x dy$$

Por definição de integral de linha, temos:

$$\oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} 0 dx + x dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}(x, y) = (0, x)$. Pelo Teorema de Green temos:

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Exemplo 1

Seja D como no Teorema de Green. Prove que

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D} x dy$$

Por definição de integral de linha, temos:

$$\oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} 0 dx + x dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}(x, y) = (0, x)$. Pelo Teorema de Green temos:

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 1 - 0 dx dy$$

Exemplo 1

Seja D como no Teorema de Green. Prove que

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D} x dy$$

Por definição de integral de linha, temos:

$$\oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} 0 dx + x dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}(x, y) = (0, x)$. Pelo Teorema de Green temos:

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 1 - 0 dx dy = \text{área}(D)$$

Analogamente podemos provar que $\text{área}(D) = \oint_{\partial D} -y dx$

Exemplo 2

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada, simples, C^1 por partes que delimita um conjunto fechado e limitado D (percorrida no sentido horário) e $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j}$.

Exemplo 2

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada, simples, C^1 por partes que delimita um conjunto fechado e limitado D (percorrida no sentido horário) e $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j}$.

Pelo Teorema de Green:

$$\oint_{\mathcal{C}^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemplo 2

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada, simples, C^1 por partes que delimita um conjunto fechado e limitado D (percorrida no sentido horário) e $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j}$.

Pelo Teorema de Green:

$$\oint_{\mathcal{C}^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemplo 2

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada, simples, C^1 por partes que delimita um conjunto fechado e limitado D (percorrida no sentido horário) e $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j}$.

Pelo Teorema de Green:

$$\oint_{\mathcal{C}^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Exemplo 2

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada, simples, C^1 por partes que delimita um conjunto fechado e limitado D (percorrida no sentido horário) e $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j}$.

Pelo Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \iint_D 3 - 1 dx dy = -2 \text{área}(D) \end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida no sentido anti-horário.

Exemplo 3

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida no sentido anti-horário.

ATENÇÃO: Não podemos aplicar o Teorema de Green, porque o campo não está definido no ponto $(0,0)$.

Exemplo 3

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida no sentido anti-horário.

ATENÇÃO: Não podemos aplicar o Teorema de Green, porque o campo não está definido no ponto $(0,0)$.

Parametrização de \mathcal{C} : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Exemplo 3

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida no sentido anti-horário.

ATENÇÃO: Não podemos aplicar o Teorema de Green, porque o campo não está definido no ponto $(0,0)$.

Parametrização de \mathcal{C} : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Então calculando pela definição,

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

Exemplo 3

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida no sentido anti-horário.

ATENÇÃO: Não podemos aplicar o Teorema de Green, porque o campo não está definido no ponto $(0,0)$.

Parametrização de \mathcal{C} : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Então calculando pela definição,

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt =$$

Exemplo 3

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida no sentido anti-horário.

ATENÇÃO: Não podemos aplicar o Teorema de Green, porque o campo não está definido no ponto $(0,0)$.

Parametrização de \mathcal{C} : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Então calculando pela definição,

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Exemplo 4

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada contida em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$

Exemplo 4

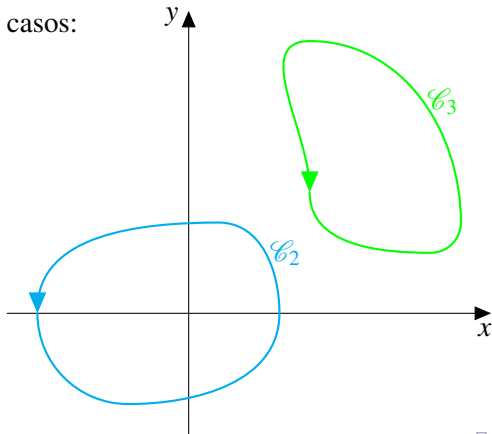
Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada contida em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$

Podemos ter dois casos:

Exemplo 4

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada contida em $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$

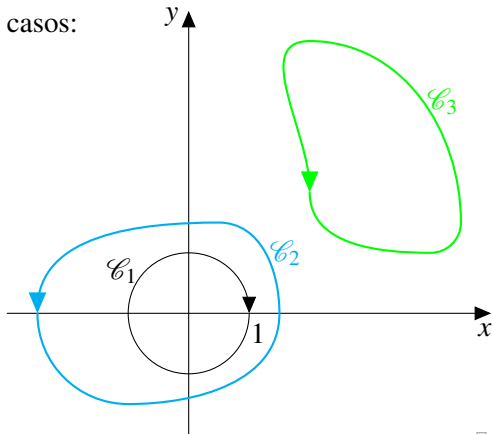
Podemos ter dois casos:



Exemplo 4

Calcule $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, onde \mathcal{C} é uma curva fechada contida em $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$

Podemos ter dois casos:



É claro que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. (Ver aula 10)

É claro que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. (Ver aula 10)

Curva que não rodeia a origem, \mathcal{C}_3

$$\oint_{\mathcal{C}_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

É claro que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. (Ver aula 10)

Curva que não rodeia a origem, \mathcal{C}_3

$$\oint_{\mathcal{C}_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

É claro que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. (Ver aula 10)

Curva que não rodeia a origem, \mathcal{C}_3

$$\oint_{\mathcal{C}_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0$$

É claro que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. (Ver aula 10)

Curva que não rodeia a origem, \mathcal{C}_3

$$\oint_{\mathcal{C}_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0$$

Curva que rodeia a origem, \mathcal{C}_2

$$\oint_{\mathcal{C}_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mathcal{C}_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

É claro que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. (Ver aula 10)

Curva que não rodeia a origem, \mathcal{C}_3

$$\oint_{\mathcal{C}_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0$$

Curva que rodeia a origem, \mathcal{C}_2

$$\oint_{\mathcal{C}_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mathcal{C}_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

É claro que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. (Ver aula 10)

Curva que não rodeia a origem, \mathcal{C}_3

$$\oint_{\mathcal{C}_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0$$

Curva que rodeia a origem, \mathcal{C}_2

$$\oint_{\mathcal{C}_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mathcal{C}_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Então $\oint_{\mathcal{C}_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{\mathcal{C}_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$. (Ver Exemplo)

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Seja \vec{n} o vetor normal unitário que aponta para o exterior de D .

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Seja \vec{n} o vetor normal unitário que aponta para o exterior de D .

$$\text{Então } \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds =$$

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Seja \vec{n} o vetor normal unitário que aponta para o exterior de D .

$$\text{Então } \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_{\partial D} -Q \, dx + P \, dy =$$

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Seja \vec{n} o vetor normal unitário que aponta para o exterior de D .

$$\text{Então } \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_{\partial D} -Q \, dx + P \, dy = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy$$

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Seja \vec{n} o vetor normal unitário que aponta para o exterior de D .

$$\text{Então } \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_{\partial D} -Q \, dx + P \, dy = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy$$

Observação: O teorema acima é uma forma vetorial do Teorema de Green. Para obtê-lo, basta aplicar o teorema de Green ao campo $G = -Q(x,y)\vec{i} + P(x,y)\vec{j}$.

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^2

Teorema

Seja D uma região como no Teorema de Green.

Seja $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U com $D \subset U$.

Seja \vec{n} o vetor normal unitário que aponta para o exterior de D .

$$\text{Então } \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_{\partial D} -Q \, dx + P \, dy = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy$$

Observação: O teorema acima é uma forma vetorial do Teorema de Green.

Para obtê-lo, basta aplicar o teorema de Green ao campo

$$G = -Q(x,y)\vec{i} + P(x,y)\vec{j}.$$

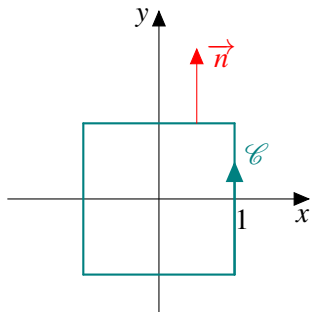
Definimos o **fluxo de \vec{F}** , através de uma curva \mathcal{C} , por $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$.

Exemplo 1

Calcule o fluxo exterior do campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$, através do quadrado limitado pelas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$.

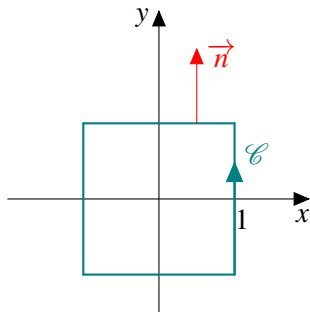
Exemplo 1

Calcule o fluxo exterior do campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$, através do quadrado limitado pelas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$.



Exemplo 1

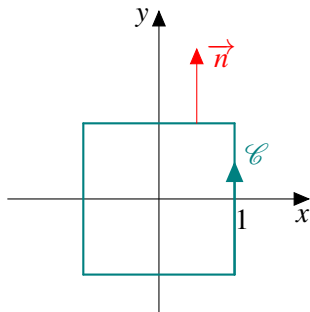
Calcule o fluxo exterior do campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$, através do quadrado limitado pelas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$.



$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

Exemplo 1

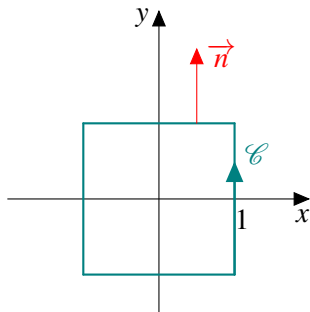
Calcule o fluxo exterior do campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$, através do quadrado limitado pelas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$.



$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R 1 + 2y \, dx \, dy$$

Exemplo 1

Calcule o fluxo exterior do campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$, através do quadrado limitado pelas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$.



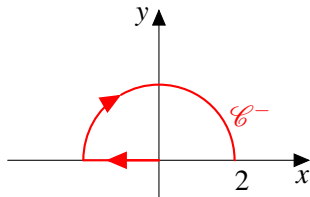
$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R 1 + 2y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 + 2y \, dx \, dy = 4$$

Exemplo 2

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ onde $\vec{F}(x, y) = (x + 2xy + e^{y^2}, x - y)$ e $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, com \mathcal{C}_1 a parte circunferência de raio 2 centrada na origem e \mathcal{C}_2 o segmento horizontal como na figura, sendo \vec{n} o vetor normal à curva que aponta para dentro do semidisco $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 0$.

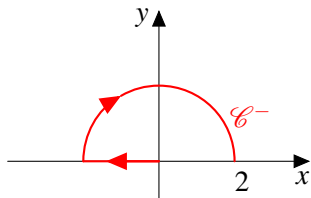
Exemplo 2

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ onde $\vec{F}(x, y) = (x + 2xy + e^{y^2}, x - y)$ e $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, com \mathcal{C}_1 a parte circunferência de raio 2 centrada na origem e \mathcal{C}_2 o segmento horizontal como na figura, sendo \vec{n} o vetor normal à curva que aponta para dentro do semidisco $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 0$.



Exemplo 2

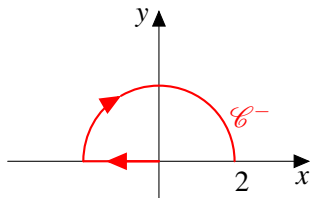
Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ onde $\vec{F}(x, y) = (x + 2xy + e^{y^2}, x - y)$ e $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, com \mathcal{C}_1 a parte circunferência de raio 2 centrada na origem e \mathcal{C}_2 o segmento horizontal como na figura, sendo \vec{n} o vetor normal à curva que aponta para dentro do semidisco $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 0$.



Considere uma curva \mathcal{C}_3^- , parametrizada por $\sigma(t) = (1 - t, 0)$, com $t \in [0, 1]$.

Exemplo 2

Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ onde $\vec{F}(x, y) = (x + 2xy + e^{y^2}, x - y)$ e $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, com \mathcal{C}_1 a parte circunferência de raio 2 centrada na origem e \mathcal{C}_2 o segmento horizontal como na figura, sendo \vec{n} o vetor normal à curva que aponta para dentro do semidisco $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 0$.



Considere uma curva \mathcal{C}_3^- , parametrizada por $\sigma(t) = (1 - t, 0)$, com $t \in [0, 1]$.

$$\int_{\mathcal{C}_2^-} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\mathcal{C}_3^-} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = - \iint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy$$

Vamos ver que condições deve satisfazer o domínio do campo vetorial \vec{F} para podermos garantir que se $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ então \vec{F} é conservativo.

Vamos ver que condições deve satisfazer o domínio do campo vetorial \vec{F} para podermos garantir que se $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ então \vec{F} é conservativo.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se para qualquer ponto $X \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(X) = \{Y \in \mathbb{R}^2 : \|Y - X\| < r\}$ está contida em A .

Vamos ver que condições deve satisfazer o domínio do campo vetorial \vec{F} para podermos garantir que se $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ então \vec{F} é conservativo.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se para qualquer ponto $X \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(X) = \{Y \in \mathbb{R}^2 : \|Y - X\| < r\}$ está contida em A .

Definição

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é **conexo por caminhos** se quaisquer dois pontos de D , podem ser unidos por uma curva contida em D .

Vamos ver que condições deve satisfazer o domínio do campo vetorial \vec{F} para podermos garantir que se $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ então \vec{F} é conservativo.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se para qualquer ponto $X \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(X) = \{Y \in \mathbb{R}^2 : \|Y - X\| < r\}$ está contida em A .

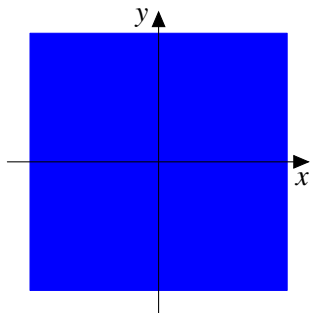
Definição

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é **conexo por caminhos** se quaisquer dois pontos de D , podem ser unidos por uma curva contida em D .

Definição

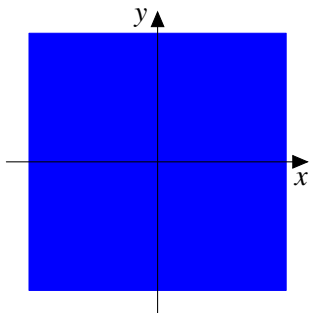
Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é **simplesmente conexo** se é conexo por caminhos e se qualquer curva fechada contida em D , delimita uma região totalmente contida em D .

Exemplos

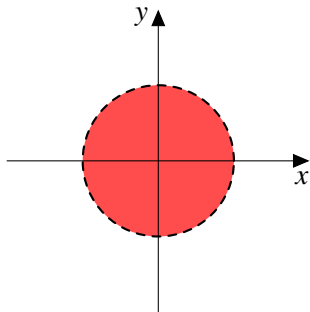


\mathbb{R}^2 é aberto e simplesmente conexo.

Exemplos

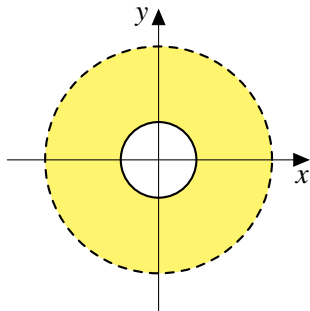


\mathbb{R}^2 é aberto e simplesmente conexo.



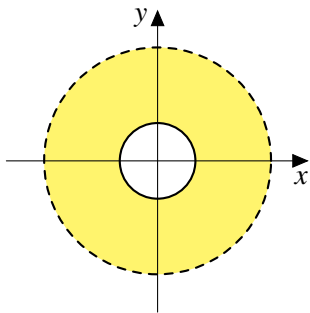
O disco $x^2 + y^2 < 1$ é aberto e simplesmente conexo.

Exemplos

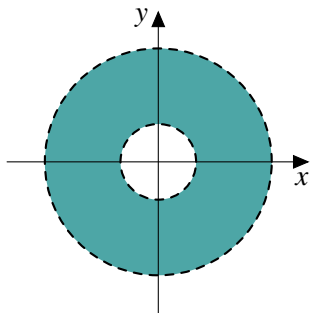


Este conjunto não é aberto nem simplesmente conexo.

Exemplos

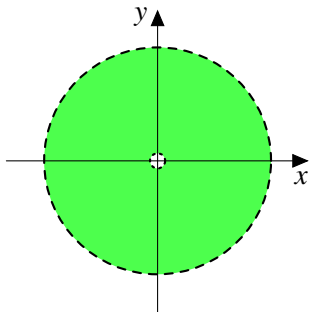


Este conjunto não é aberto nem simplesmente conexo.



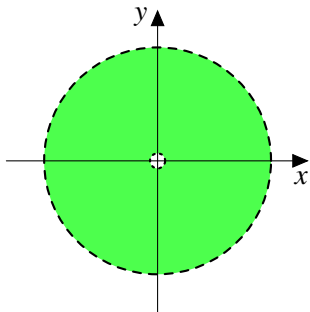
Este conjunto é aberto mas não é simplesmente conexo.

Exemplos

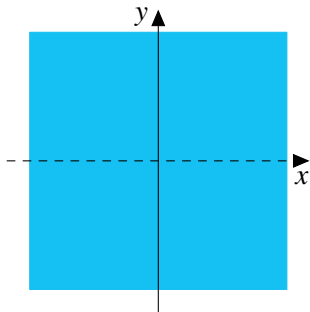


Este conjunto é aberto mas não é simplesmente conexo.

Exemplos



Este conjunto é aberto mas não é simplesmente conexo.



$\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{eixo } x\}$ é aberto mas não é simplesmente conexo.

Teorema das quatro equivalências

Teorema

Seja $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 num conjunto D que é aberto e **SIMPLESMENTE CONEXO**.

Teorema das quatro equivalências

Teorema

Seja $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 num conjunto D que é aberto e **SIMPLESMENTE CONEXO**. As seguintes afirmações são equivalentes:

①
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ em } D$$

Teorema das quatro equivalências

Teorema

Seja $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 num conjunto D que é aberto e **SIMPLESMENTE CONEXO**. As seguintes afirmações são equivalentes:

① $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ em D

② $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ qualquer que seja a curva \mathcal{C} de D .

Teorema das quatro equivalências

Teorema

Seja $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 num conjunto D que é aberto e **SIMPLESMENTE CONEXO**. As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ em D
- 2 $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ qualquer que seja a curva \mathcal{C} de D .
- 3 $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho \mathcal{C} de D

Teorema das quatro equivalências

Teorema

Seja $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 num conjunto D que é aberto e **SIMPLESMENTE CONEXO**. As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ em D
- 2 $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ qualquer que seja a curva \mathcal{C} de D .
- 3 $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho \mathcal{C} de D
- 4 \vec{F} é conservativo.

Demonstração

Ideia da Demonstração:

Demonstração

Ideia da Demonstração:

1 \Rightarrow 2 Basta aplicar o teorema de Green

Demonstração

Ideia da Demonstração:

1 \Rightarrow 2 Basta aplicar o teorema de Green

2 \Rightarrow 3 Conectando dois caminhos distintos com o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final obtemos um caminho fechado.

Demonstração

Ideia da Demonstração:

1 \Rightarrow 2 Basta aplicar o teorema de Green

2 \Rightarrow 3 Conectando dois caminhos distintos com o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final obtemos um caminho fechado.

3 \Rightarrow 4 Encontrar uma função potencial (parte mais complicada)

Demonstração

Ideia da Demonstração:

1 \Rightarrow 2 Basta aplicar o teorema de Green

2 \Rightarrow 3 Conectando dois caminhos distintos com o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final obtemos um caminho fechado.

3 \Rightarrow 4 Encontrar uma função potencial (parte mais complicada)

4 \Rightarrow 1 Teorema visto numa aula anterior.

- 1 Mostre que $\int_{(0,1)}^{(2,3)} 2x + y^3 dx + 3xy^2 + 4dy$ é independente do caminho e calcule-a.

- 1 Mostre que $\int_{(0,1)}^{(2,3)} 2x + y^3 dx + 3xy^2 + 4 dy$ é independente do caminho e calcule-a.
- 2 Calcule $\int_{\mathcal{C}} x + 3y + y^{10} dx + 3x + 10xy^9 + \ln(1 + y^2) dy$, sendo $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0\}$ percorrida no sentido horário.

- 1 Mostre que $\int_{(0,1)}^{(2,3)} 2x + y^3 dx + 3xy^2 + 4 dy$ é independente do caminho e calcule-a.
- 2 Calcule $\int_{\mathcal{C}} x + 3y + y^{10} dx + 3x + 10xy^9 + \ln(1 + y^2) dy$, sendo $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0\}$ percorrida no sentido horário.
- 3 Usando o Teorema das 4 equivalências, calcule $\int_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, sendo \mathcal{C} uma curva qualquer contida no semiplano $y > 0$, percorrida no sentido anti-horário.

Definição

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, se existe uma função vetorial contínua

Definição

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, se existe uma função vetorial contínua

$$\begin{aligned}\phi : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

Definição

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, se existe uma função vetorial contínua

$$\begin{aligned}\phi : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

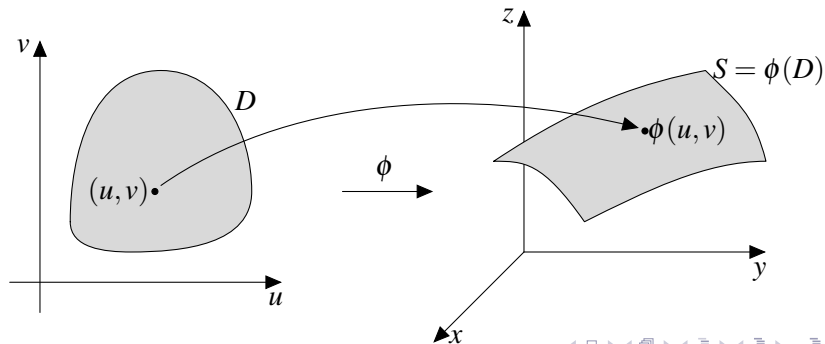
tal que $\phi(D) = S$.

Definição

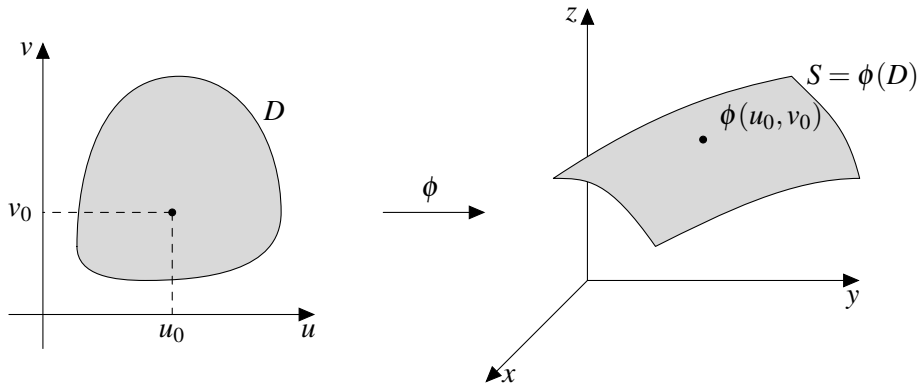
Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, se existe uma função vetorial contínua

$$\begin{aligned} \phi : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

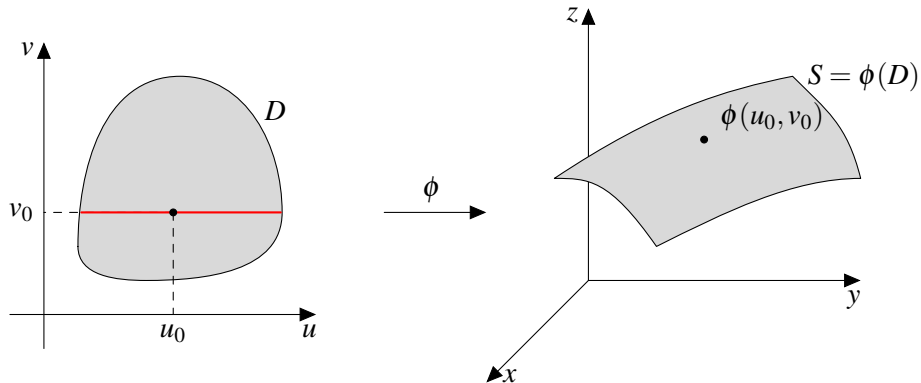
tal que $\phi(D) = S$.



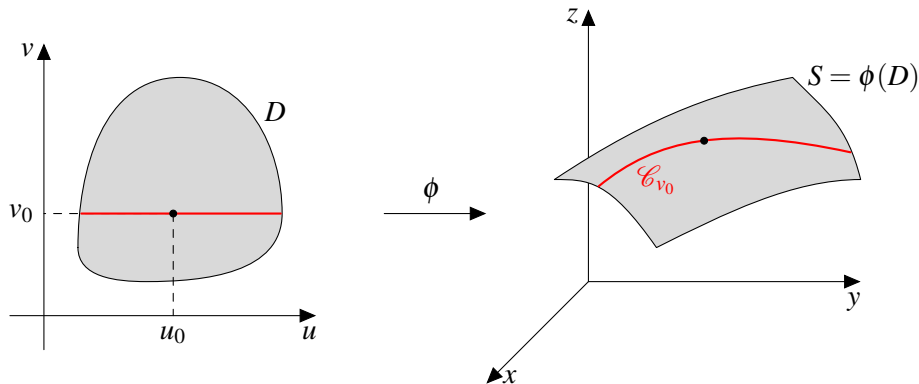
Se ϕ for diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$,



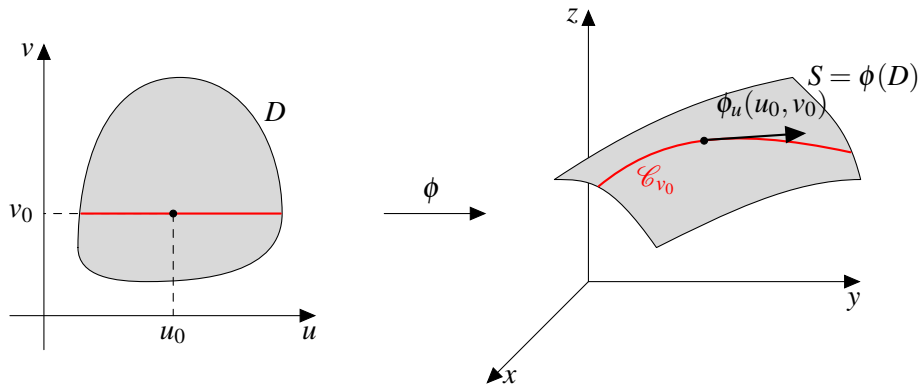
Se ϕ for diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$, fixando $v = v_0$,



Se ϕ for diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva diferenciável \mathcal{C}_{v_0} .



Se ϕ for diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva diferenciável \mathcal{C}_{v_0} .



Concluindo, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva parametrizada por

$$\gamma(u) = \phi(u, v_0).$$

Concluindo, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva parametrizada por

$$\gamma(u) = \phi(u, v_0).$$

Logo se $\gamma'(u_0) = \phi_u(u_0, v_0) \neq 0$, então $\phi_u(u_0, v_0)$ é tangente à curva \mathcal{C}_{v_0} .

Concluindo, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva parametrizada por

$$\gamma(u) = \phi(u, v_0).$$

Logo se $\gamma'(u_0) = \phi_u(u_0, v_0) \neq 0$, então $\phi_u(u_0, v_0)$ é tangente à curva \mathcal{C}_{v_0} .

Analogamente, fixando $u = u_0$, obtemos um vetor $\phi_v(u_0, v_0)$ tangente à curva \mathcal{C}_{u_0} .

Concluindo, fixando $v = v_0$, obtemos uma curva parametrizada por

$$\gamma(u) = \phi(u, v_0).$$

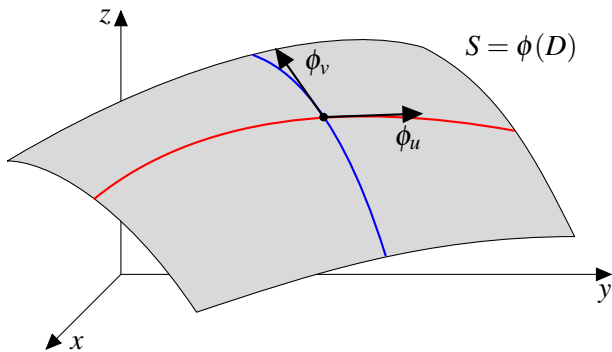
Logo se $\gamma'(u_0) = \phi_u(u_0, v_0) \neq 0$, então $\phi_u(u_0, v_0)$ é tangente à curva \mathcal{C}_{v_0} .

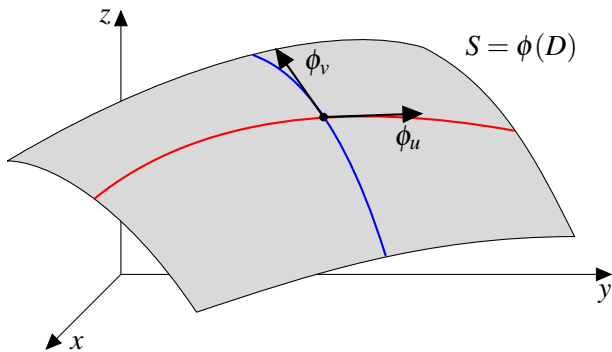
Analogamente, fixando $u = u_0$, obtemos um vetor $\phi_v(u_0, v_0)$ tangente à curva \mathcal{C}_{u_0} .

Sendo assim, o vetor

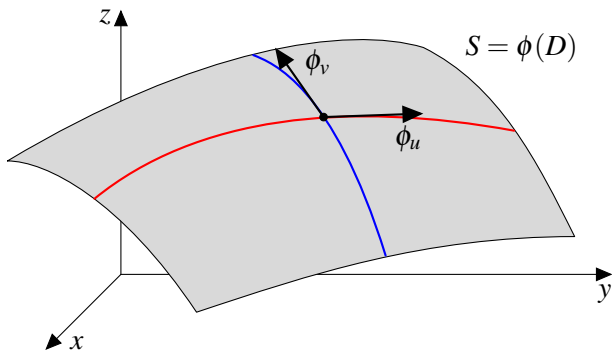
$$\vec{N} = \vec{N}(u_0, v_0) = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0) \neq 0$$

é normal à superfície S no ponto $\phi(u_0, v_0)$.





Vetor normal: $\vec{N} = \vec{N}(u_0, v_0) = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$

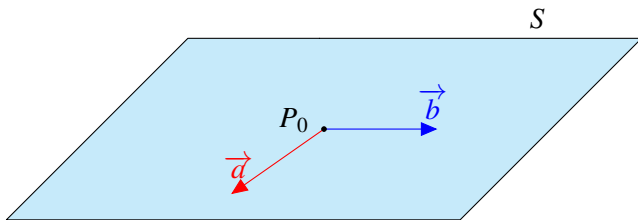


Vetor normal: $\vec{N} = \vec{N}(u_0, v_0) = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$

Equação do Plano Tangente: $[(x, y, z) - \phi(u_0, v_0)] \cdot \vec{N}(u_0, v_0) = 0$

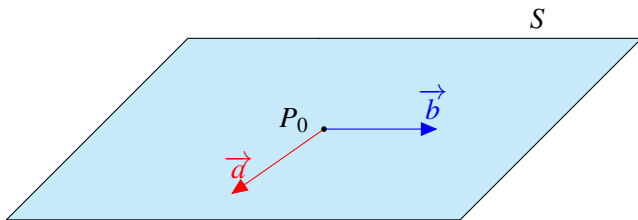
Plano S

Sejam $P_0 \in S$, \vec{a} e \vec{b} não paralelos contidos no plano S .



Plano S

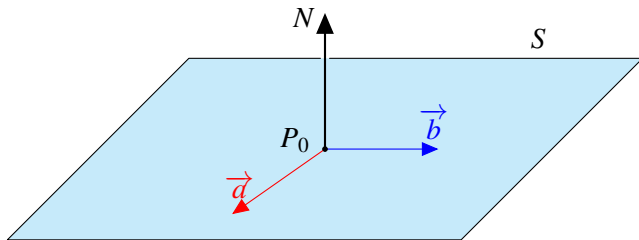
Sejam $P_0 \in S$, \vec{a} e \vec{b} não paralelos contidos no plano S .



Parametrização de S : $\phi(u, v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Plano S

Sejam $P_0 \in S$, \vec{a} e \vec{b} não paralelos contidos no plano S .



Parametrização de S : $\phi(u, v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Vetor Normal: $\vec{N} = \phi_u \times \phi_v = \vec{a} \times \vec{b}$

Gráfico de $z = f(x, y)$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 .

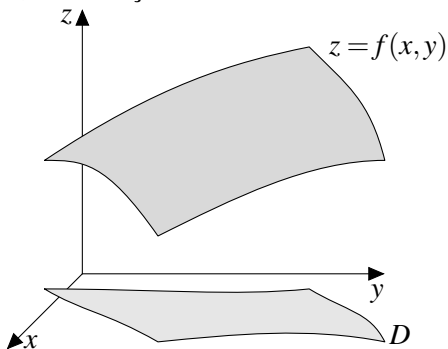
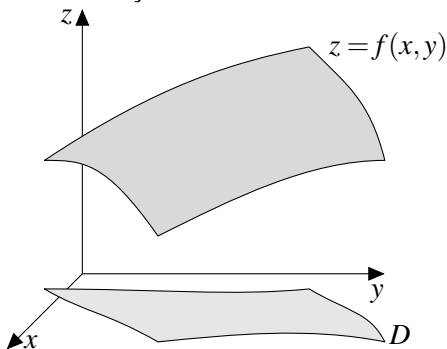


Gráfico de $z = f(x, y)$

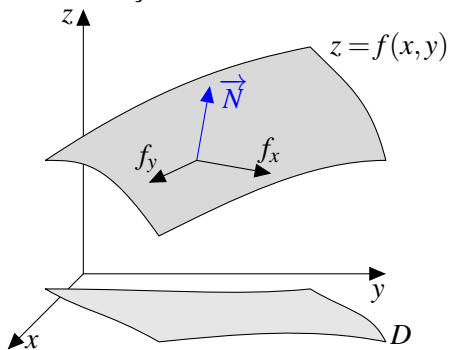
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 .



Parametrização de S : $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $(x, y) \in D$.

Gráfico de $z = f(x, y)$

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 .

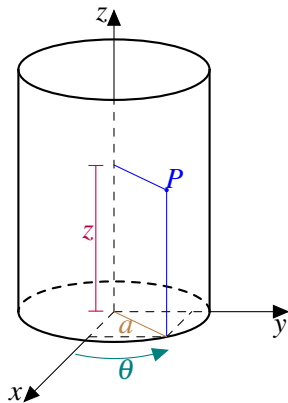


Parametrização de S : $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $(x, y) \in D$.

Vetor Normal: $\vec{N} = \phi_x \times \phi_y = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$

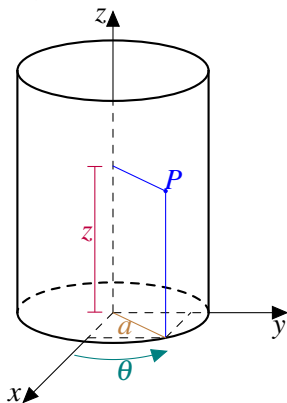
Cilindro

Seja S o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, com $a > 0$.



Cilindro

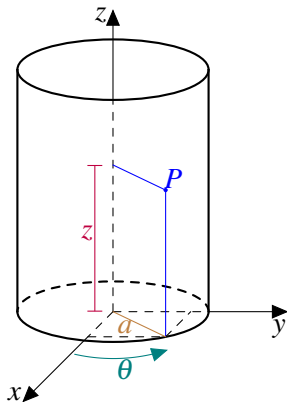
Seja S o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, com $a > 0$.



Parametrização de S : $\phi(\theta, z) = (a \cos(\theta), a \sin(\theta), z)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in \mathbb{R}$.

Cilindro

Seja S o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, com $a > 0$.

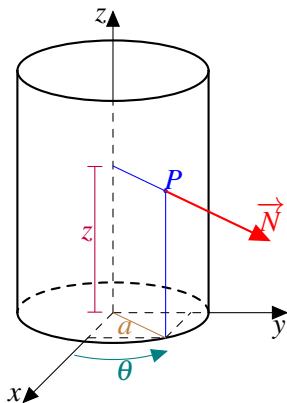


Parametrização de S : $\phi(\theta, z) = (a \cos(\theta), a \sin(\theta), z)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in \mathbb{R}$.

Vetor Normal: $\vec{N} = \phi_\theta \times \phi_z = (a \cos(\theta), a \sin(\theta), 0)$

Cilindro

Seja S o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, com $a > 0$.

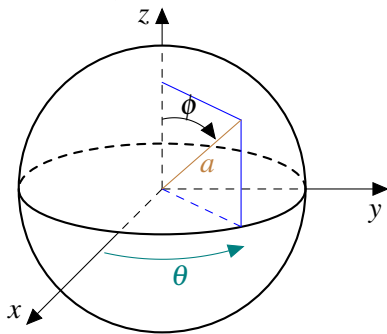


Parametrização de S : $\phi(\theta, z) = (a \cos(\theta), a \sin(\theta), z)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in \mathbb{R}$.

Vetor Normal: $\vec{N} = \phi_\theta \times \phi_z = a(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$

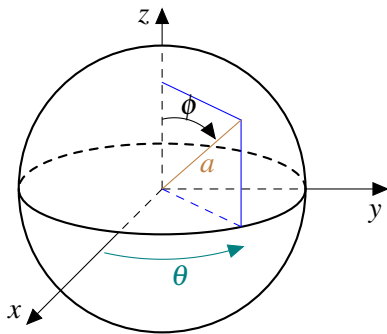
Superfície esférica

Seja S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.



Superfície esférica

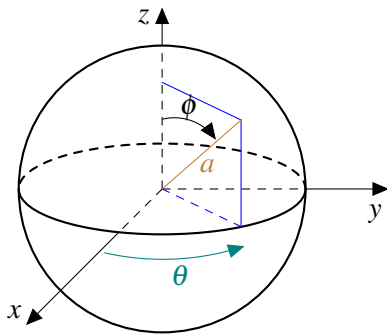
Seja S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.



Parametrização de S : $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Superfície esférica

Seja S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

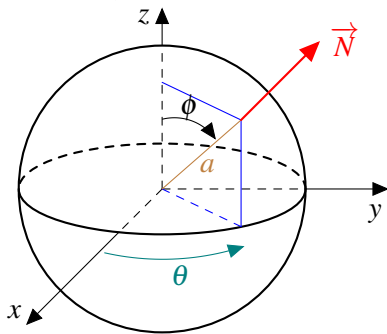


Parametrização de S : $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Vetor Normal: $\vec{N} = (a^2 \operatorname{sen}^2(\Phi) \cos(\theta), a^2 \operatorname{sen}^2(\Phi) \operatorname{sen}(\theta), a^2 \operatorname{sen}(\Phi) \cos(\Phi))$

Superfície esférica

Seja S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

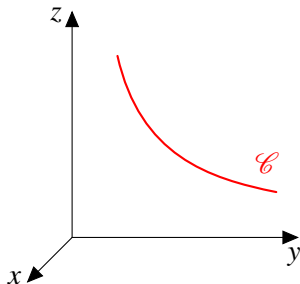


Parametrização de S : $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Vetor Normal: $\vec{N} = a^2 \operatorname{sen}(\Phi) (\operatorname{sen}(\Phi) \cos(\theta), \operatorname{sen}(\Phi) \operatorname{sen}(\theta), \cos(\Phi))$

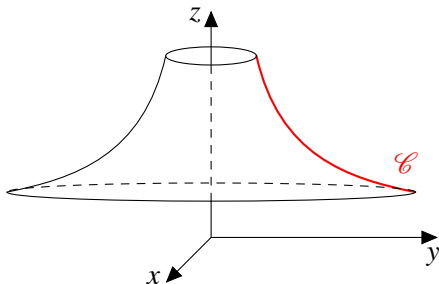
Superfície de revolução

Seja \mathcal{C} uma curva, definida por $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$ (suponha $y(t) \geq 0$). Seja S a superfície de revolução obtida ao girar a curva \mathcal{C} em torno do eixo z .



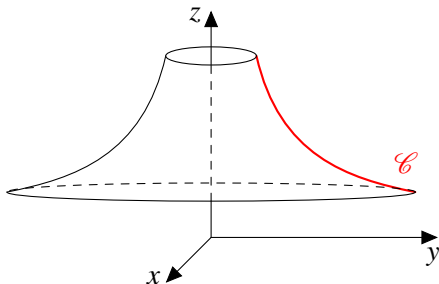
Superfície de revolução

Seja \mathcal{C} uma curva, definida por $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$ (suponha $y(t) \geq 0$). Seja S a superfície de revolução obtida ao girar a curva \mathcal{C} em torno do eixo z .



Superfície de revolução

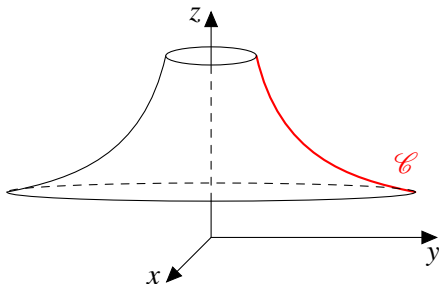
Seja \mathcal{C} uma curva, definida por $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$ (suponha $y(t) \geq 0$). Seja S a superfície de revolução obtida ao girar a curva \mathcal{C} em torno do eixo z .



Parametrização de S : $\phi(t, \theta) = (y(t) \cos(\theta), y(t) \sin(\theta), z(t))$, com $t \in [a, b]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Superfície de revolução

Seja \mathcal{C} uma curva, definida por $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$ (suponha $y(t) \geq 0$). Seja S a superfície de revolução obtida ao girar a curva \mathcal{C} em torno do eixo z .

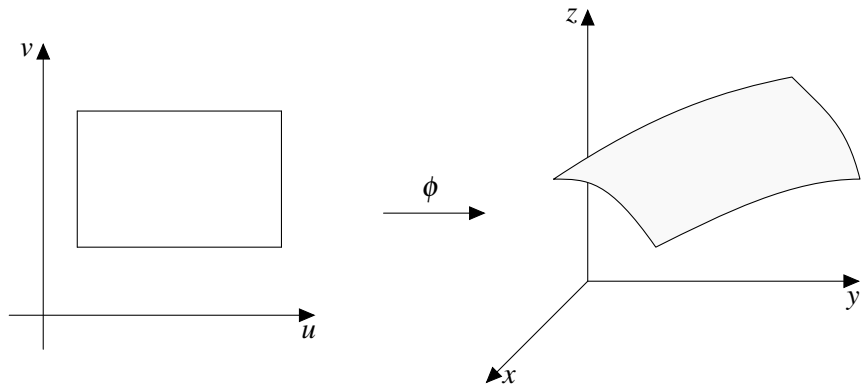


Parametrização de S : $\phi(t, \theta) = (y(t) \cos(\theta), y(t) \sin(\theta), z(t))$, com $t \in [a, b]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

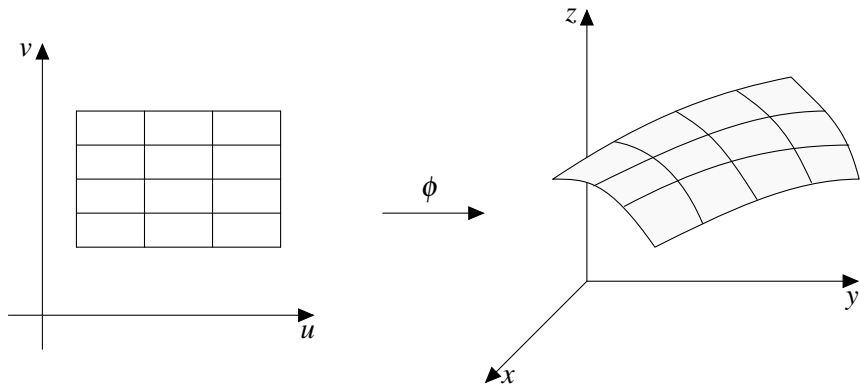
Analogamente podemos parametrizar superfícies de revolução obtidas pela rotação de curvas em torno de outros eixos.

Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

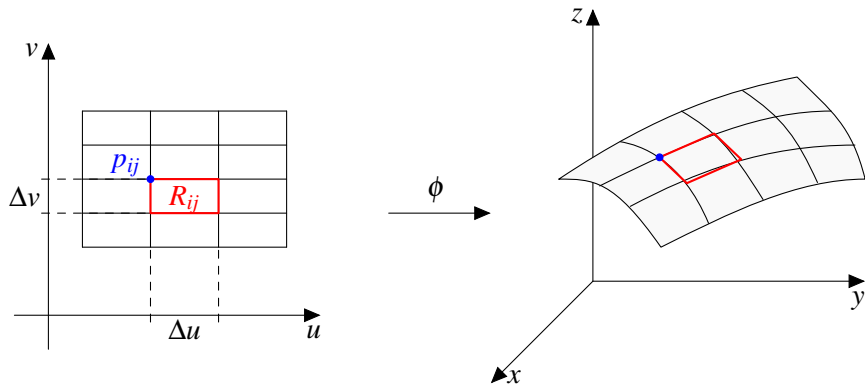
Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.



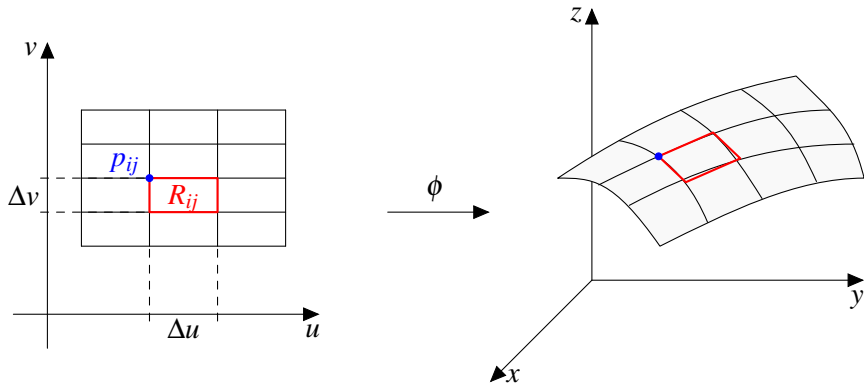
Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Cada pedacinho da superfície $S_{ij} = \phi(R_{ij})$ pode ser aproximada por um paralelogramo com lados $\phi_u(p_{ij})\Delta u$ e $\phi_v(p_{ij})\Delta v$. Logo

$$\text{Área}(S_{ij}) \cong \|(\phi_u(p_{ij})\Delta u) \times (\phi_v(p_{ij})\Delta v)\| = \|\phi_u(p_{ij}) \times \phi_v(p_{ij})\| \Delta u \Delta v$$

Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.
Vimos que:

$$\text{Área}(S_{ij}) \cong \|\phi_u(p_{ij}) \times \phi_v(p_{ij})\| \Delta u, \Delta v$$

Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.
Vimos que:

$$\text{Área}(S_{ij}) \cong \|\phi_u(p_{ij}) \times \phi_v(p_{ij})\| \Delta u, \Delta v$$

Definição

A área da superfície S é dada por

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

Seja S uma superfície regular parametrizada por $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.
Vimos que:

$$\text{Área}(S_{ij}) \cong \|\phi_u(p_{ij}) \times \phi_v(p_{ij})\| \Delta u, \Delta v$$

Definição

A área da superfície S é dada por

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

Observação: Para a definição estar correta, precisamos garantir que ϕ é injetiva, isto é, S é coberta uma única vez quando percorremos todos os parâmetros do domínio de ϕ .

Exemplo

Determine a área da superfície do gráfico $z = f(x, y)$ com $(x, y) \in D$.

Exemplo

Determine a área da superfície do gráfico $z = f(x, y)$ com $(x, y) \in D$.

Parametrização: $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $(x, y) \in D$.

Exemplo

Determine a área da superfície do gráfico $z = f(x, y)$ com $(x, y) \in D$.

Parametrização: $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $(x, y) \in D$.

Vetor Normal: $\vec{N} = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$

Exemplo

Determine a área da superfície do gráfico $z = f(x, y)$ com $(x, y) \in D$.

Parametrização: $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $(x, y) \in D$.

Vetor Normal: $\vec{N} = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$

Então,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dx \, dy$$

Exemplo

Determine a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

Exemplo

Determine a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

Parametrização: $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Exemplo

Determine a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

Parametrização: $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Vetor Normal: $\vec{N} = a \operatorname{sen}(\Phi) \phi(\theta, \Phi)$

Exemplo

Determine a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

Parametrização: $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Vetor Normal: $\vec{N} = a \operatorname{sen}(\Phi) \phi(\theta, \Phi)$

Então $\|\vec{N}\| = a^2 \operatorname{sen}(\Phi)$, logo

Exemplo

Determine a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

Parametrização: $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Vetor Normal: $\vec{N} = a \operatorname{sen}(\Phi) \phi(\theta, \Phi)$

Então $\|\vec{N}\| = a^2 \operatorname{sen}(\Phi)$, logo

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}(\Phi) d\Phi d\theta$$

Exemplo

Determine a área da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.

Parametrização: $\phi(\theta, \Phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\Phi), a \cos(\Phi))$,
com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Phi \in [0, \pi]$.

Vetor Normal: $\vec{N} = a \operatorname{sen}(\Phi) \phi(\theta, \Phi)$

Então $\|\vec{N}\| = a^2 \operatorname{sen}(\Phi)$, logo

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \operatorname{sen}(\Phi) d\Phi d\theta = 4\pi a^2$$

❶ Parametrize as superfícies:

❶ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \leq 1\}$

❷ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

❸ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$

❹ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 + \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\}$

❺ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2y \text{ e } 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$

1 Parametrize as superfícies:

1 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \leq 1\}$

2 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

3 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$

4 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 + \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\}$

5 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2y \text{ e } 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$

2 Calcule a área da superfície S obtida ao girar o segmento de reta de $(0, 1, 3)$ e $(0, 3, 1)$ em torno do eixo z .

❶ Parametrize as superfícies:

❶ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \leq 1\}$

❷ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

❸ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$

❹ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 + \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\}$

❺ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2y \text{ e } 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$

❷ Calcule a área da superfície S obtida ao girar o segmento de reta de $(0, 1, 3)$ e $(0, 3, 1)$ em torno do eixo z .

❸ Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x - 2)^2 + 4y^2 \leq 1$.

Integral de Superfície de Campo Escalar

Integral de Superfície de Campo Escalar

Definição

Definimos a integral de superfície de um campo escalar contínuo $f(x, y, z)$ sobre uma superfície S , parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, como:

Integral de Superfície de Campo Escalar

Definição

Definimos a integral de superfície de um campo escalar contínuo $f(x, y, z)$ sobre uma superfície S , parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, como:

$$\iint_S f dS = \iint_S f(x, y, z) dS =$$

Integral de Superfície de Campo Escalar

Definição

Definimos a integral de superfície de um campo escalar contínuo $f(x, y, z)$ sobre uma superfície S , parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, como:

$$\iint_S f dS = \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\phi(u, v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}_{dS} du dv$$

Integral de Superfície de Campo Escalar

Definição

Definimos a integral de superfície de um campo escalar contínuo $f(x, y, z)$ sobre uma superfície S , parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, como:

$$\iint_S f \, dS = \iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\phi(u, v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}_{dS} \, du \, dv$$

onde $dS = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv$ é o elemento de área.

Observações:

- ❶ Se $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, então

$$\iint_S f \, dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f \, dS.$$

Observações:

- ❶ Se $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, então

$$\iint_S f \, dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f \, dS.$$

- ❷ Se $f(x, y, z) = 1$ em S , então

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_S dS = A(S).$$

Seja S uma chapa delgada, formando uma superfície no espaço \mathbb{R}^3 , com densidade $\delta(x, y, z)$.

Seja S uma chapa delgada, formando uma superfície no espaço \mathbb{R}^3 , com densidade $\delta(x, y, z)$.

Massa

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS$$

Seja S uma chapa delgada, formando uma superfície no espaço \mathbb{R}^3 , com densidade $\delta(x, y, z)$.

Massa

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS$$

Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo E é dado por:

$$I_E = \iint_S r^2(x, y, z) \delta(x, y, z) dS$$

onde $r(x, y, z)$ é a distância de (x, y, z) ao eixo E .

Centro de massa

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x \delta(x, y, z) dS,$$

Centro de massa

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x \delta(x, y, z) dS,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y \delta(x, y, z) dS$$

Centro de massa

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x \delta(x, y, z) dS,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y \delta(x, y, z) dS$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iint_S z \delta(x, y, z) dS$$

- 1 Calcule $\iint_S z dS$, onde S é a superfície $x = y + 2z^2$, com $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

- 1 Calcule $\iint_S z dS$, onde S é a superfície $x = y + 2z^2$, com $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.
- 2 Calcule $\iint_S (z + x^2 y) dS$, onde S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$, no primeiro octante.

- 1 Calcule $\iint_S z dS$, onde S é a superfície $x = y + 2z^2$, com $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.
- 2 Calcule $\iint_S (z + x^2 y) dS$, onde S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$, no primeiro octante.
- 3 Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = y^2$.

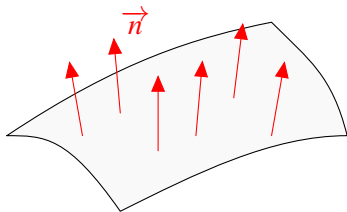
- 1 Calcule $\iint_S z dS$, onde S é a superfície $x = y + 2z^2$, com $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.
- 2 Calcule $\iint_S (z + x^2 y) dS$, onde S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$, no primeiro octante.
- 3 Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = y^2$.
- 4 Uma lâmina superficial S tem a forma de um cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ e limitado pelo plano xy . Em cada ponto de S a densidade é proporcional à distância entre o ponto e o eixo z . Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S .

Definição

Uma superfície S é orientável se for possível definir um campo de vetores unitários normais a S , que varie continuamente sobre S .

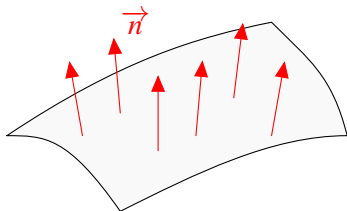
Definição

Uma superfície S é orientável se for possível definir um campo de vetores unitários normais a S , que varie continuamente sobre S .



Definição

Uma superfície S é orientável se for possível definir um campo de vetores unitários normais a S , que varie continuamente sobre S .

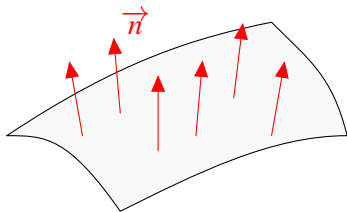


Observações:

- Uma superfície orientável tem duas orientações possíveis, ou seja, tem dois lados.

Definição

Uma superfície S é orientável se for possível definir um campo de vetores unitários normais a S , que varie continuamente sobre S .



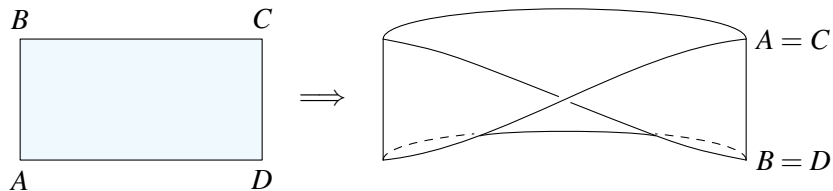
Observações:

- Uma superfície orientável tem duas orientações possíveis, ou seja, tem dois lados.
- Há superfícies que têm um lado só como, por exemplo, a fita de Möbius, que é um exemplo de uma superfície não orientável.

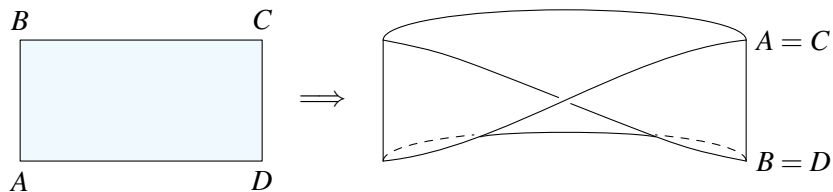
Fita de Möbius



Fita de Möbius



Fita de Möbius



Esta superfície não é orientável.

Definição

Uma superfície é fechada se divide o espaço \mathbb{R}^3 em dois subconjuntos.

Definição

Uma superfície é fechada se divide o espaço \mathbb{R}^3 em dois subconjuntos.

Observação: Superfícies fechadas orientáveis têm duas orientações “naturais”, determinadas pela normal “exterior” e pela normal “interior”.

Definição

Uma superfície é fechada se divide o espaço \mathbb{R}^3 em dois subconjuntos.

Observação: Superfícies fechadas orientáveis têm duas orientações “naturais”, determinadas pela normal “exterior” e pela normal “interior”.

Exemplos de superfícies orientáveis

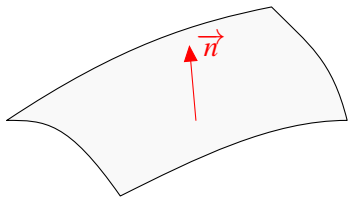
- Esfera
- Cone
- Elipsóide
- Parabolóide
- Hiperbolóide
- Toro
- ...

Definição

Seja S uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários \vec{n} . Dizemos que o bordo de S , ∂S , está orientado positivamente se, ao caminhar ao longo de ∂S , com a cabeça no sentido de \vec{n} , tivermos S à nossa esquerda.

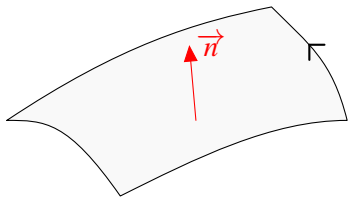
Definição

Seja S uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários \vec{n} . Dizemos que o bordo de S , ∂S , está orientado positivamente se, ao caminhar ao longo de ∂S , com a cabeça no sentido de \vec{n} , tivermos S à nossa esquerda.



Definição

Seja S uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários \vec{n} . Dizemos que o bordo de S , ∂S , está orientado positivamente se, ao caminhar ao longo de ∂S , com a cabeça no sentido de \vec{n} , tivermos S à nossa esquerda.



Observação: Uma regra prática para orientar ∂S é a conhecida “regra da mão direita” com polegar no sentido de \vec{n} .

Definição

Seja S uma superfície regular orientável.

Definição

Seja S uma superfície regular orientável. Seja \vec{n} uma orientação de S .

Definição

Seja S uma superfície regular orientável. Seja \vec{n} uma orientação de S . Seja \vec{F} um campo vetorial contínuo definido em um aberto contendo S . A integral de superfície de \vec{F} através de S ou o fluxo Φ de \vec{F} através de S é a integral de superfície do campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$:

Definição

Seja S uma superfície regular orientável. Seja \vec{n} uma orientação de S . Seja \vec{F} um campo vetorial contínuo definido em um aberto contendo S . A integral de superfície de \vec{F} através de S ou o fluxo Φ de \vec{F} através de S é a integral de superfície do campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Definição

Seja S uma superfície regular orientável. Seja \vec{n} uma orientação de S . Seja \vec{F} um campo vetorial contínuo definido em um aberto contendo S . A integral de superfície de \vec{F} através de S ou o fluxo Φ de \vec{F} através de S é a integral de superfície do campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Observação: Se \vec{F} representa o campo de velocidades de um fluido, essa integral fornece o volume do fluido que atravessa S em uma unidade de tempo, na direção de \vec{n} .

Se S é parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, e

Se S é parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, e

$$\vec{n} = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

então

Se S é parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, e

$$\vec{n} = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

então

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Se S é parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, e

$$\vec{n} = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

então

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u, v)) \cdot \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \cdot \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv$$

Se S é parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, e

$$\vec{n} = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

então

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u, v)) \cdot \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \cdot \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_D \vec{F}(\phi(u, v)) \cdot (\phi_u \times \phi_v) \, du \, dv \end{aligned}$$

Se S é parametrizada por $\phi(u, v)$, com $(u, v) \in D$, e

$$\vec{n} = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

então

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u, v)) \cdot \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \cdot \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_D \vec{F}(\phi(u, v)) \cdot (\phi_u \times \phi_v) \, du \, dv \end{aligned}$$

Observação: A integral de superfície de um campo escalar não depende da orientação, mas a integral de superfície de um campo vetorial depende. Exatamente como acontece com as integrais de linha.

- 1 Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (xze^y, -xze^y, z)$ através da superfície $x + y + z = 1$, no primeiro octante, considerando \vec{n} apontando para baixo.

- 1 Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (xze^y, -xze^y, z)$ através da superfície $x + y + z = 1$, no primeiro octante, considerando \vec{n} apontando para baixo.
- 2 Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2, x, x)$, através da superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga o ponto $(4, 1, 0)$ a $(2, 4, 0)$ em torno do eixo x , onde o vetor \vec{n} satisfaz $\vec{n} \cdot \vec{i} \geq 0$.

- 1 Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (xze^y, -xze^y, z)$ através da superfície $x + y + z = 1$, no primeiro octante, considerando \vec{n} apontando para baixo.
- 2 Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2, x, x)$, através da superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga o ponto $(4, 1, 0)$ a $(2, 4, 0)$ em torno do eixo x , onde o vetor \vec{n} satisfaz $\vec{n} \cdot \vec{i} \geq 0$.
- 3 Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, através da superfície S , parte do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, limitado pelo plano $z = 0$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com vetor normal apontando para fora de S .

O teorema seguinte estabelece uma relação entre uma integral tripla sobre uma região sólida $W \subset \mathbb{R}^3$ e uma integral de superfície sobre a fronteira de W .

O teorema seguinte estabelece uma relação entre uma integral tripla sobre uma região sólida $W \subset \mathbb{R}^3$ e uma integral de superfície sobre a fronteira de W .

Teorema

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, cuja fronteira $\partial W = S$ está orientada positivamente com \vec{n} exterior a W .

O teorema seguinte estabelece uma relação entre uma integral tripla sobre uma região sólida $W \subset \mathbb{R}^3$ e uma integral de superfície sobre a fronteira de W .

Teorema

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, cuja fronteira $\partial W = S$ está orientada positivamente com \vec{n} exterior a W . Seja \vec{F} um campo vetorial de classe C^1 em um aberto U contendo W .

O teorema seguinte estabelece uma relação entre uma integral tripla sobre uma região sólida $W \subset \mathbb{R}^3$ e uma integral de superfície sobre a fronteira de W .

Teorema

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, cuja fronteira $\partial W = S$ está orientada positivamente com \vec{n} exterior a W . Seja \vec{F} um campo vetorial de classe C^1 em um aberto U contendo W . Então,

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz.$$

O teorema seguinte estabelece uma relação entre uma integral tripla sobre uma região sólida $W \subset \mathbb{R}^3$ e uma integral de superfície sobre a fronteira de W .

Teorema

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, cuja fronteira $\partial W = S$ está orientada positivamente com \vec{n} exterior a W . Seja \vec{F} um campo vetorial de classe C^1 em um aberto U contendo W . Então,

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz.$$

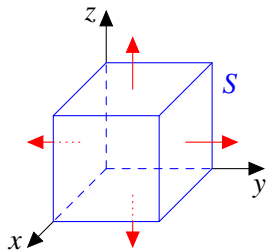
O Teorema de Gauss, ou Teorema da divergência permite calcular fluxos através de superfícies fechadas.

Exemplo 1:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \operatorname{cos} y, yz^2)$ através da superfície S que é a caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

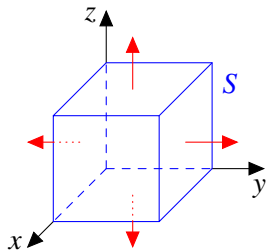
Exemplo 1:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, yz^2)$ através da superfície S que é a caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.



Exemplo 1:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, yz^2)$ através da superfície S que é a caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

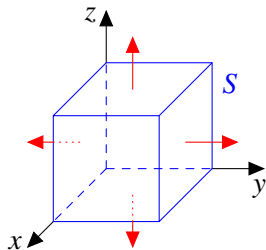


Consideremos o sólido W definido por:

- $0 \leq x \leq 1$,
- $0 \leq y \leq 1$,
- e $0 \leq z \leq 1$.

Exemplo 1:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, yz^2)$ através da superfície S que é a caixa delimitada pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ e $z = 1$.



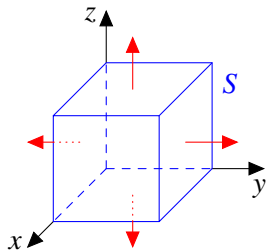
Consideremos o sólido W definido por:

- $0 \leq x \leq 1,$
- $0 \leq y \leq 1,$
- e $0 \leq z \leq 1.$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

Exemplo 1:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, yz^2)$ através da superfície S que é a caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.



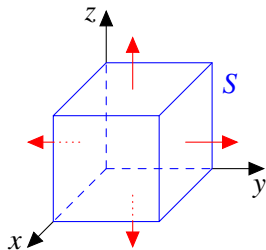
Consideremos o sólido W definido por:

- $0 \leq x \leq 1$,
- $0 \leq y \leq 1$,
- e $0 \leq z \leq 1$.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + 2yz \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

Exemplo 1:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, yz^2)$ através da superfície S que é a caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.



Consideremos o sólido W definido por:

- $0 \leq x \leq 1$,
- $0 \leq y \leq 1$,
- e $0 \leq z \leq 1$.

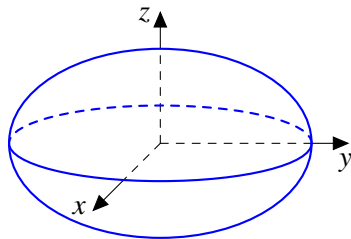
$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + 2yz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 2:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xy \operatorname{sen} z, \cos(xz), y \cos z)$ através da superfície S definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

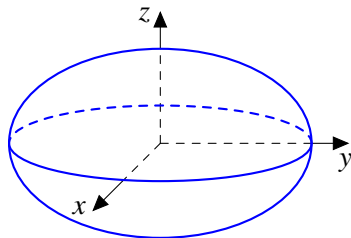
Exemplo 2:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xy \operatorname{sen} z, \cos(xz), y \cos z)$ através da superfície S definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.



Exemplo 2:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xy \operatorname{sen} z, \cos(xz), y \cos z)$ através da superfície S definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.



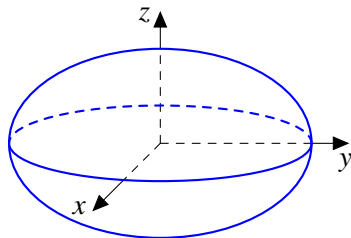
Consideremos o sólido W definido por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

Exemplo 2:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xy \operatorname{sen} z, \cos(xz), y \cos z)$ através da superfície S definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.



Consideremos o sólido W definido por:

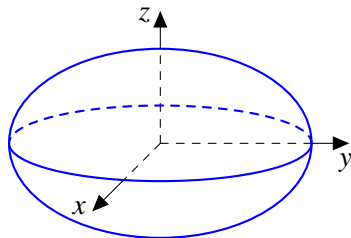
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

Exemplo 2:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xy \operatorname{sen} z, \cos(xz), y \cos z)$ através da superfície S definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.



Consideremos o sólido W definido por:

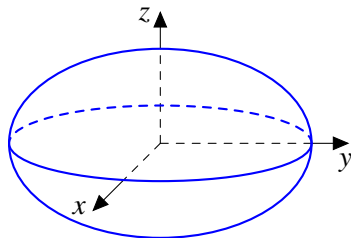
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_W y \operatorname{sen} z - y \operatorname{sen} z \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

Exemplo 2:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xy \operatorname{sen} z, \cos(xz), y \cos z)$ através da superfície S definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.



Consideremos o sólido W definido por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

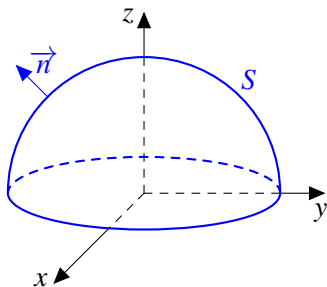
$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ &= \iiint_W y \operatorname{sen} z - y \operatorname{sen} z \, dx \, dy \, dz = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 3:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, \frac{y^3}{3} + \tan z, x^2z + y^2)$ através da superfície S definida pela metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

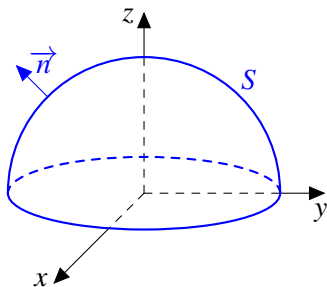
Exemplo 3:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, \frac{y^3}{3} + \tan z, x^2z + y^2)$ através da superfície S definida pela metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Exemplo 3:

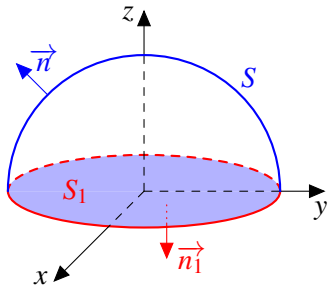
Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, \frac{y^3}{3} + \tan z, x^2z + y^2)$ através da superfície S definida pela metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



ATENÇÃO: A superfície S não delimita um sólido em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 3:

Calcule o fluxo exterior de $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, \frac{y^3}{3} + \tan z, x^2z + y^2)$ através da superfície S definida pela metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



ATENÇÃO: A superfície S não delimita um sólido em \mathbb{R}^3 . Para podermos aplicar o Teorema de Gauss, temos que “fechar” a superfície.

Exemplo 3 (continuação)

Calculando $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ pela definição:

Exemplo 3 (continuação)

Calculando $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ pela definição:

Parametrização de S_1 :

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \text{ onde } (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Exemplo 3 (continuação)

Calculando $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ pela definição:

Parametrização de S_1 :

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \text{ onde } (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vetor Normal exterior a S_1 : $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$

Exemplo 3 (continuação)

Calculando $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ pela definição:

Parametrização de S_1 :

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \text{ onde } (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vetor Normal exterior a S_1 : $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS =$$

Exemplo 3 (continuação)

Calculando $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ pela definição:

Parametrização de S_1 :

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \text{ onde } (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vetor Normal exterior a S_1 : $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_D \left(0, \frac{y^3}{3}, y^2\right) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy$$

Exemplo 3 (continuação)

Calculando $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ pela definição:

Parametrização de S_1 :

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \text{ onde } (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vetor Normal exterior a S_1 : $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_D \left(0, \frac{y^3}{3}, y^2\right) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = -\frac{\pi}{4}$$

Exemplo 3 (continuação)

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$.

Exemplo 3 (continuação)

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$.

Logo, pelo Teorema de Gauss:

Exemplo 3 (continuação)

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$.

Logo, pelo Teorema de Gauss:

$$\iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

Exemplo 3 (continuação)

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$.

Logo, pelo Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

Exemplo 3 (continuação)

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$.

Logo, pelo Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS - \frac{\pi}{4} &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

Exemplo 3 (continuação)

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$.

Logo, pelo Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_W x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS - \frac{\pi}{4} &= \frac{2\pi}{5} \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \frac{13\pi}{20} \end{aligned}$$

O teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema de Green, em dimensão maior.

O teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema de Green, em dimensão maior.

Teorema

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe C^1 em U .

O teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema de Green, em dimensão maior.

Teorema

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe C^1 em U . Seja $S \subset U$ uma superfície regular por parte, orientada pelo campo normal unitário \vec{n} .

O teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema de Green, em dimensão maior.

Teorema

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe C^1 em U . Seja $S \subset U$ uma superfície regular por parte, orientada pelo campo normal unitário \vec{n} . Seja ∂S o bordo de S com a orientação induzida pela orientação de S (pela regra da mão direita).

O teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema de Green, em dimensão maior.

Teorema

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe C^1 em U . Seja $S \subset U$ uma superfície regular por parte, orientada pelo campo normal unitário \vec{n} . Seja ∂S o bordo de S com a orientação induzida pela orientação de S (pela regra da mão direita). Então,

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Observações

Observações

- Se a superfície é plana, o Teorema de Stokes coincide com o Teorema de Green.

Observações

- Se a superfície é plana, o Teorema de Stokes coincide com o Teorema de Green.

- Dizemos que $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é a circulação de \vec{F} e $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ é o fluxo do rotacional de \vec{F} .

Observações

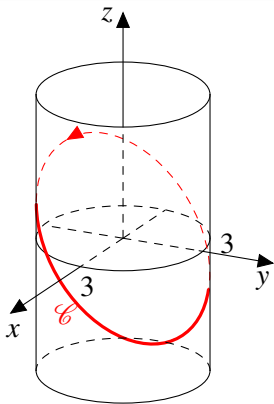
- Se a superfície é plana, o Teorema de Stokes coincide com o Teorema de Green.

- Dizemos que $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é a circulação de \vec{F} e $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ é o fluxo do rotacional de \vec{F} .

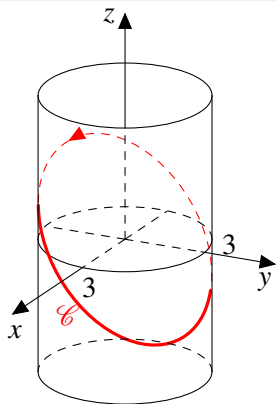
- Como consequência do teorema de Stokes, obtemos que o Teorema das 4 equivalências, também é válido para conjuntos simplesmente conexos em \mathbb{R}^3 .

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.

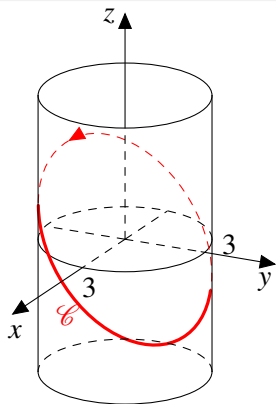


Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.



A curva \mathcal{C} é o bordo da superfície S parametrizada por

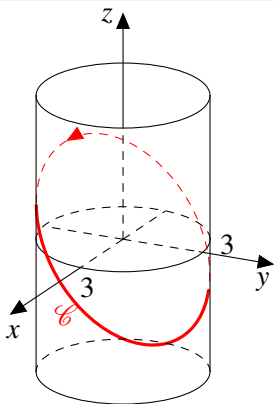
Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.



A curva \mathcal{C} é o bordo da superfície S parametrizada por

$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.

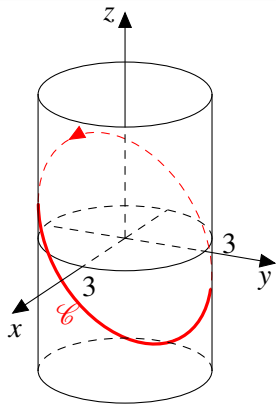


A curva \mathcal{C} é o bordo da superfície S parametrizada por

$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

$$(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.



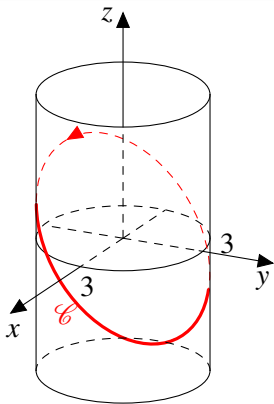
A curva \mathcal{C} é o bordo da superfície S parametrizada por

$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

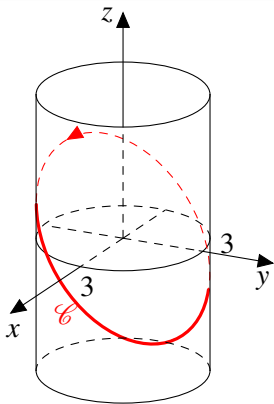
$$(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

$$\text{Logo } \text{rot } \vec{F}(\phi(x, y)) = (0, x^2, y^2).$$

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.

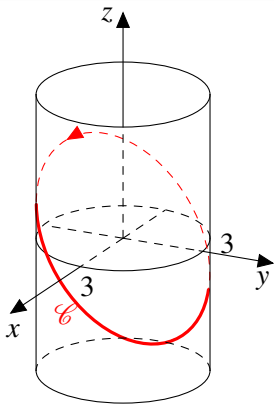


Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.



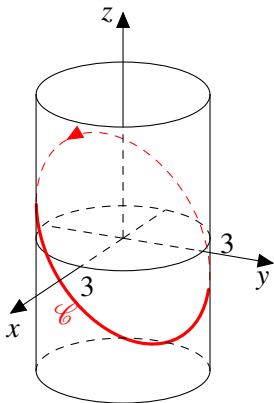
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.



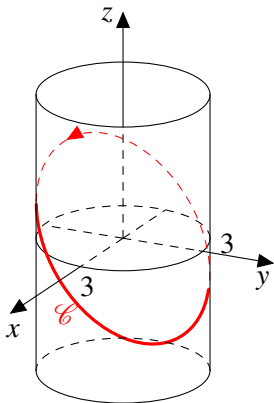
$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D (0, x^2, y^2) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.



$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\
 &= \iint_D (0, x^2, y^2) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \, dr \, d\theta
 \end{aligned}$$

Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \mathcal{C} é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com orientação no sentido anti-horário quando vista de cima e $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2, z^2)$.



$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\
 &= \iint_D (0, x^2, y^2) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{81\pi}{2}
 \end{aligned}$$

- 1 Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, z, x)$ ao longo do triângulo T com vértices $\{(1, 0, 0), (0, 0, 3), (0, 1, 0)\}$ percorrido nessa ordem.

- 1 Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, z, x)$ ao longo do triângulo T com vértices $\{(1, 0, 0), (0, 0, 3), (0, 1, 0)\}$ percorrido nessa ordem.
- 2 Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças F sobre uma partícula que se move ao longo da curva $\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4 - 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, sendo $F(x, y, z) = (z + y^2, e^{y^2} + 1, \ln(z^2 + 1) + y)$.

- 1 Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, z, x)$ ao longo do triângulo T com vértices $\{(1, 0, 0), (0, 0, 3), (0, 1, 0)\}$ percorrido nessa ordem.
- 2 Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças F sobre uma partícula que se move ao longo da curva $\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4 - 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, sendo $F(x, y, z) = (z + y^2, e^{y^2} + 1, \ln(z^2 + 1) + y)$.
- 3 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_{\mathcal{C}} y dx + z dy + x dz$, onde \mathcal{C} é a curva fechada obtida pela interseção do plano $x + y = 2$ com a esfera $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$. Indique a orientação escolhida.

- 4 Usando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = (-2y^3, 2x^3, 3z^2)$ sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

- 4 Usando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = (-2y^3, 2x^3, 3z^2)$ sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.
- 5 Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\}$, orientada com a normal \vec{n} com terceira coordenada negativa. Seja $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo de F através da superfície S , com direção \vec{n} :

- 4 Usando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = (-2y^3, 2x^3, 3z^2)$ sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.
- 5 Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\}$, orientada com a normal \vec{n} com terceira coordenada negativa. Seja $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo de F através da superfície S , com direção \vec{n} :
- 1 Pela definição.

- 4 Usando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = (-2y^3, 2x^3, 3z^2)$ sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.
- 5 Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\}$, orientada com a normal \vec{n} com terceira coordenada negativa. Seja $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo de F através da superfície S , com direção \vec{n} :
- 1 Pela definição.
 - 2 Pelo teorema de Gauss.

- 4 Usando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = (-2y^3, 2x^3, 3z^2)$ sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.
- 5 Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\}$, orientada com a normal \vec{n} com terceira coordenada negativa. Seja $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo de F através da superfície S , com direção \vec{n} :
- 1 Pela definição.
 - 2 Pelo teorema de Gauss.
 - 3 Pelo teorema de Stokes.