



Departamento de Matemática Aplicada
2ª VE de Cálculo II - B
2013-1 - Turma F1 - 01/08/2013
Prof. Maria João Resende

Nome: _____

| Questão | Valor | Nota |
|--------------|-------------|------|
| 1ª | 2,0 | |
| 2ª | 2,0 | |
| 3ª | 2,0 | |
| 4ª | 2,0 | |
| 5ª | 2,0 | |
| Total | 10,0 | |

Instruções: Não é permitido sair da sala durante a prova. Não é permitido o uso de calculadora. O celular deve estar desligado e guardado. Cada resposta deverá ter devidamente identificado o número da questão à qual se refere. As respostas sem uma justificativa correta serão desconsideradas.

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$, onde $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário.

(b) Determine a direção, segundo a qual a taxa de variação de f em $(2, 1)$ é máxima.

2. Justifique se a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ admite máximo e mínimo no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Caso admita, determine-os.

3. Seja $F(x, y) = (3x + y^2 - 6, -2xy)$ uma função e considere $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável tal que

$$DH(0, 6) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 10 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } DH(-1, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a expressão da função afim que melhor aproxima F numa vizinhança do ponto $(-1, 3)$.

(b) Determine $D(H \circ F)(-1, 3)$.

4. Considere a função $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Mostre que, para todo ponto X_0 , exceto $X_0 = (0, 0)$, a restrição de F a algum conjunto aberto contendo X_0 tem uma inversa.

(b) Mostre que, se não restringirmos o domínio, F não tem inversa.

5. Considere a equação $x - z = \arctan(yz)$. Mostre que a equação define uma função implícita $z = f(x, y)$ numa vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$ e determine o vetor gradiente de f em $(0, 0)$.