

Cálculo III - A

Maria João Resende

www.professores.uff.br/mjoao

2014-2

Provas

1ª VE	17 de setembro de 2014	Peso 2
2ª VE	26 de novembro de 2014	Peso 3
VR	1 de dezembro de 2014	
VS	8 de dezembro de 2014	

Provas

1ª VE	17 de setembro de 2014	Peso 2
2ª VE	26 de novembro de 2014	Peso 3
VR	1 de dezembro de 2014	
VS	8 de dezembro de 2014	

Observações

Se os alunos faltarem a uma das duas primeiras provas, poderão fazer a prova de 2ª Chamada (VR). A nota da VR terá o peso correspondente à prova que está substituindo.

Serão aprovados os alunos com média final igual ou superior a 6,0. Os alunos que tiverem média final entre 4,0 e 5,9, poderão fazer a VS e serão aprovados caso obtenham nota igual ou superior a 6,0 na VS.

Bibliografia Básica:

- **Rioco Barreto, Maria Lúcia Menezes.** *Cálculo III A - Módulos*, disponível no site.
- **STEWART, James.** *Cálculo*, vol 2.
- **ANTON, Howard.** *Cálculo, um novo horizonte*, vol 2.
- **GUIDORIZZI, Hamilton L.** *Um Curso de Cálculo*, vol 2 e 3.

Listas de Exercícios:

Utilizaremos as listas de exercícios disponíveis pelo departamento.

ATENÇÃO: Os exercícios disponíveis nos módulos, são de nível básico.

Programa da disciplina

● Integrais múltiplas

- ▶ Integral dupla. Definição e propriedades
- ▶ Integral repetida. Teorema de Fubini
- ▶ Mudança de variáveis na integral dupla
- ▶ Aplicações: área, volume, massa, centro de massa e momento de inércia
- ▶ Integrais triplas
- ▶ Redução da integral tripla à integral dupla
- ▶ Mudança de variáveis na integral tripla
- ▶ Aplicações: volume, massa, centro de massa e momento de inércia

Programa da disciplina

- Campos vetoriais e operadores diferenciais
 - ▶ Rotacional
 - ▶ Divergente
 - ▶ Laplaciano

- Curvas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3
 - ▶ Parametrizações de curvas
 - ▶ Aplicações ao movimento
 - ▶ Comprimento de arco

Programa da disciplina

- Integrais de linha
 - ▶ Integral de linha de função escalar
 - ▶ Integral de linha de campo vetorial
 - ▶ Campos conservativos
 - ▶ Integral de linha de um campo conservativo
 - ▶ Independência do caminho de integração. Existência de função potencial
 - ▶ Condições necessárias e suficientes para um campo vetorial ser conservativo
 - ▶ Conjunto simplesmente conexo
 - ▶ Teorema de Green

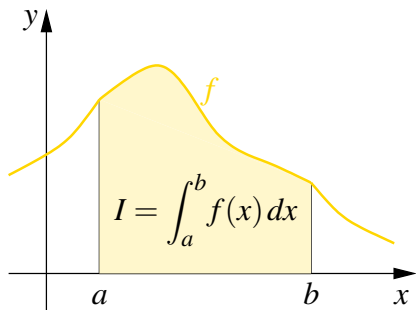
Programa da disciplina

- Superfície
 - ▶ Parametrização de superfícies
 - ▶ Plano tangente
 - ▶ Área de superfície

- Integrais de superfície
 - ▶ Integral de superfície de função escalar
 - ▶ Integral de superfície de função vetorial
 - ▶ Teorema de Stokes
 - ▶ Teorema de Gauss
 - ▶ Aplicações

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

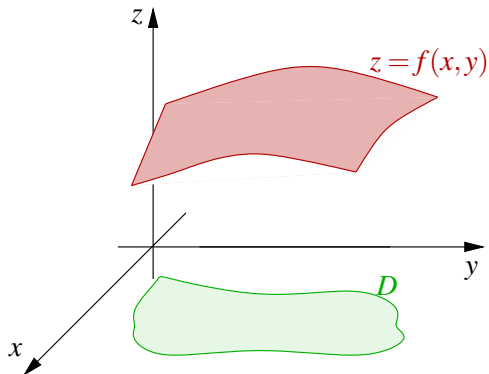
Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.



$I =$ área da região R delimitada pelo gráfico de f , o eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

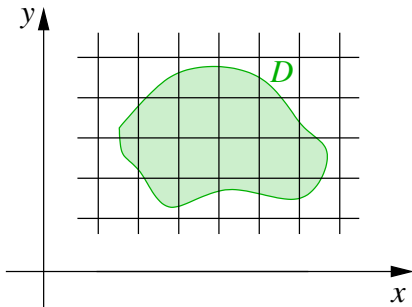
Definição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^2$.



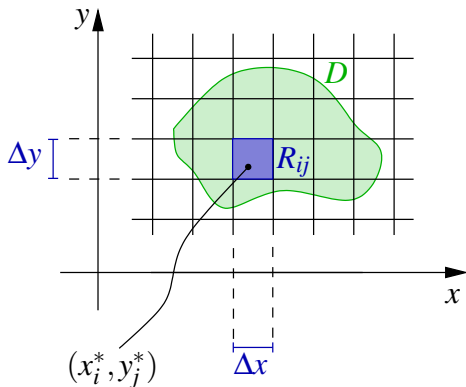
Definição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^2$.



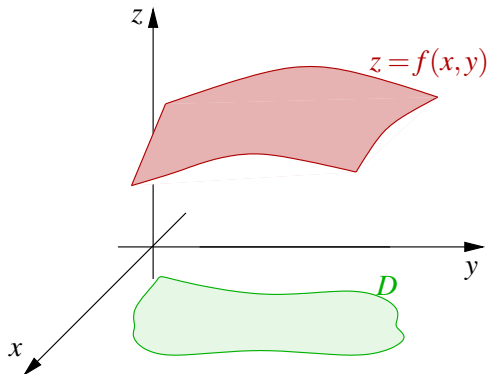
Definição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^2$.



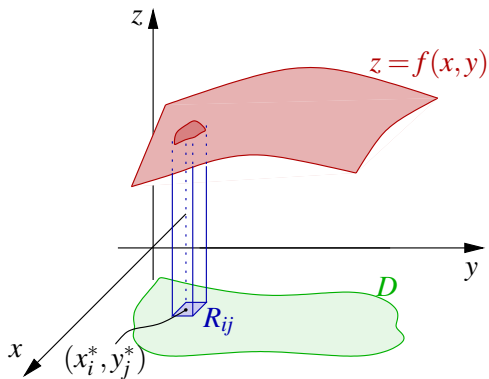
Definição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^2$.



Definição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^2$.



Assim,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i, j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y.$$

Assim,

$$\iint_D f(x,y)dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y.$$

A integral de f sobre a região D denota-se por:

$$\iint_D f(x,y)dx dy$$

Assim,

$$\iint_D f(x,y)dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y.$$

A integral de f sobre a região D denota-se por:

$$\iint_D f(x,y)dx dy$$

ou

$$\iint_D f(x,y)dA$$

Assim,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y.$$

A integral de f sobre a região D denota-se por:

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

ou

$$\iint_D f(x,y) dA$$

ou

$$\iint_D f dA$$

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante.

Propriedades da Integral Dupla

$$\textcircled{1} \quad \iint_D f + g \, dA = \iint_D f \, dA + \iint_D g \, dA;$$

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante.

Propriedades da Integral Dupla

$$\textcircled{1} \quad \iint_D f + g \, dA = \iint_D f \, dA + \iint_D g \, dA;$$

$$\textcircled{2} \quad \iint_D cf \, dA = c \iint_D f \, dA;$$

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante.

Propriedades da Integral Dupla

$$\textcircled{1} \quad \iint_D f + g \, dA = \iint_D f \, dA + \iint_D g \, dA;$$

$$\textcircled{2} \quad \iint_D cf \, dA = c \iint_D f \, dA;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Se } D = D_1 \cup D_2 \text{ e } D_1 \cap D_2 \text{ tem conteúdo nulo, então}$$
$$\iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA.$$

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

Observações

- 1 Consideremos o sólido S abaixo do gráfico de f e acima do conjunto D . Então o volume de S é dado por

$$V(S) = \iint_D f \, dA$$

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

Observações

- 1 Consideremos o sólido S abaixo do gráfico de f e acima do conjunto D . Então o volume de S é dado por

$$V(S) = \iint_D f \, dA$$

- 2 $\iint_D 1 \, dA = \text{área}(D)$.

Teorema de Fubini

Teorema de Fubini

Teorema

Consideremos o retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$. Se a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então

Teorema de Fubini

Teorema

Consideremos o retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$. Se a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

Teorema de Fubini

Teorema

Consideremos o retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$. Se a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy \end{aligned}$$

Teorema de Fubini

Teorema

Consideremos o retângulo $D = [a, b] \times [c, d]$. Se a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy\end{aligned}$$

Notação: Podemos usar a notação acima sem o parênteses.

Exemplos:

- 1 Calcule a integral iterada $\int_1^2 \int_1^2 ye^{xy} dx dy$.

Exemplos:

1 Calcule a integral iterada $\int_1^2 \int_1^2 ye^{xy} dx dy$.

2 Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \text{ e } 0 \leq z \leq 16 - x^2 - y^2\}.$$

Exemplos:

1 Calcule a integral iterada $\int_1^2 \int_1^2 ye^{xy} dx dy$.

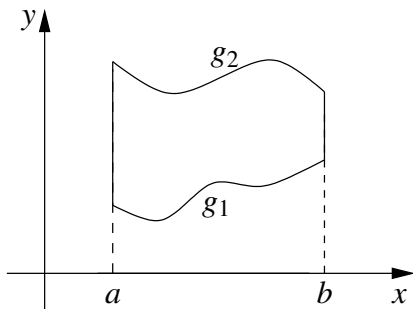
2 Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \text{ e } 0 \leq z \leq 16 - x^2 - y^2\}.$$

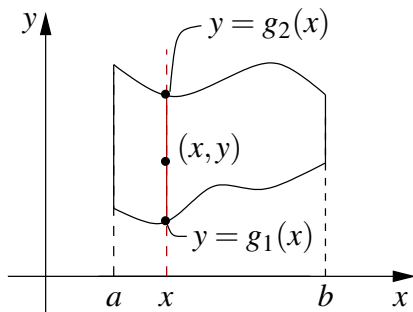
3 Calcule $\iint_R \sqrt{1 - x^2} dA$, onde $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas de equação $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$.

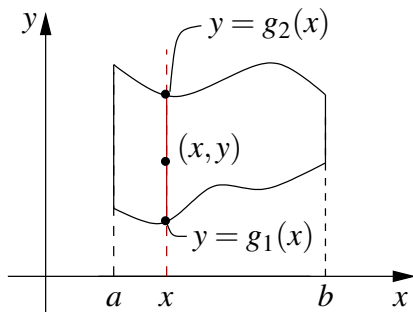
Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas de equação $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$.



Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas de equação $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$.



Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelas curvas de equação $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$.

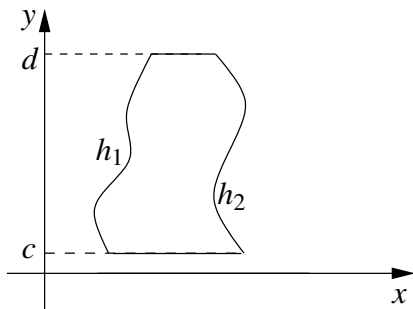


Então

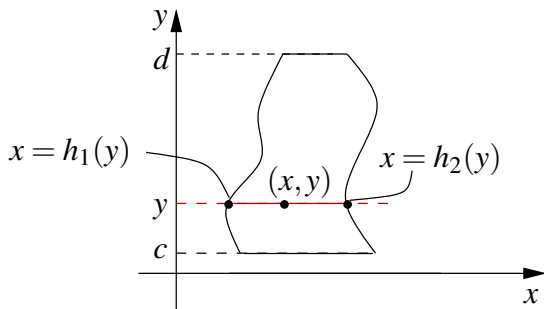
$$\iint_D f \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $y = c$ e $y = d$ e pelas curvas de equação $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$.

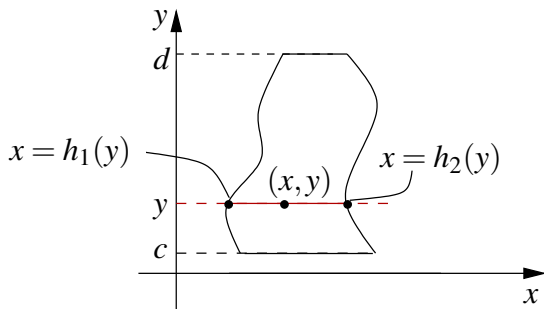
Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $y = c$ e $y = d$ e pelas curvas de equação $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$.



Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $y = c$ e $y = d$ e pelas curvas de equação $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$.



Suponhamos que D é uma região como na figura, limitada pelas retas $y = c$ e $y = d$ e pelas curvas de equação $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$.



Então

$$\iint_D f \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

Exemplos:

- 1 Esboce a região de integração e calcule a integral $\iint_D y \sin x \, dx \, dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \pi/2 \text{ e } 0 \leq y \leq \cos x\}$.

Exemplos:

- ① Esboce a região de integração e calcule a integral $\iint_D y \sin x \, dx \, dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \pi/2 \text{ e } 0 \leq y \leq \cos x\}$.

- ② Esboce a região de integração e inverta a ordem das integrais iteradas:

① $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx,$

② $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy,$

③ $\int_0^1 \int_x^{3x} f(x, y) \, dy \, dx.$

Exemplos:

- 3 Encontre o volume do sólido W acima do plano xy e limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $z = 0$, $x = 0$ e $x - y = 2$.

Exemplos:

- 3 Encontre o volume do sólido W acima do plano xy e limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $z = 0$, $x = 0$ e $x - y = 2$.

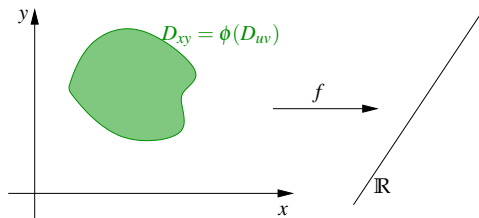
- 4 Calcule as seguintes integrais:

1 $\iint_D \cos(y^3) dx dy$, onde D é limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$

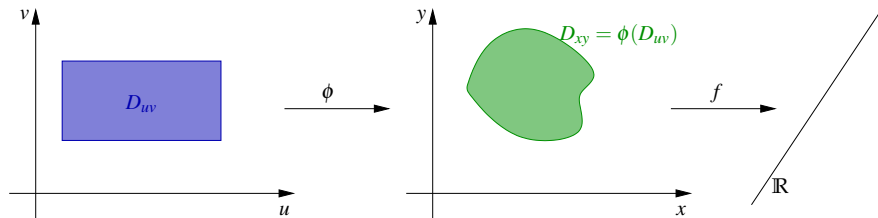
2 $\int_1^4 \int_{\frac{\ln y}{2}}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx dy$

3 $\int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} e^{x^3} dx dy + \int_1^4 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^1 e^{x^3} dx dy$

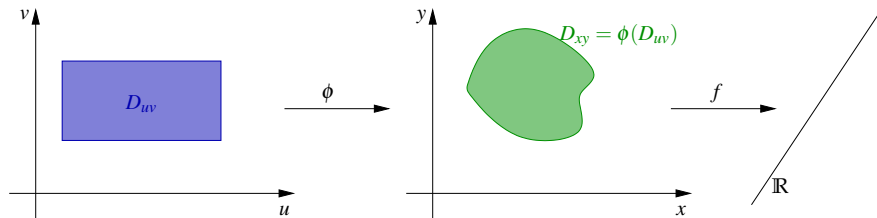
Mudança de Variáveis



Mudança de Variáveis



Mudança de Variáveis



Uma mudança de variáveis em \mathbb{R}^2 é uma função

$$\begin{aligned} \phi : D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longrightarrow (x, y) = \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

de classe C^1 e injetiva no interior de D_{uv} .

Suponhamos que o Jacobiano de ϕ é diferente de 0, ou seja:

$$J = J\phi(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Suponhamos que o Jacobiano de ϕ é diferente de 0, ou seja:

$$J = J\phi(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Prova-se que

$$dx dy = |J| du dv$$

Suponhamos que o Jacobiano de ϕ é diferente de 0, ou seja:

$$J = J\phi(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Prova-se que

$$dx dy = |J| du dv$$

Então,

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

Observação

Pelo teorema da função inversa, o Jacobiano de ϕ^{-1} é dado por

$$J\phi^{-1}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Observação

Pelo teorema da função inversa, o Jacobiano de ϕ^{-1} é dado por

$$J\phi^{-1}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = (J\phi(u, v))^{-1} = \frac{1}{J\phi(u, v)}$$

Observação

Pelo teorema da função inversa, o Jacobiano de ϕ^{-1} é dado por

$$J\phi^{-1}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = (J\phi(u, v))^{-1} = \frac{1}{J\phi(u, v)}$$

Mudança de Variáveis

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(\phi(u, v)) |J\phi| du dv$$

Exemplo:

Considere a região

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq x + 1 \text{ e } -x + 1 \leq y \leq -x + 2\}$ e calcule

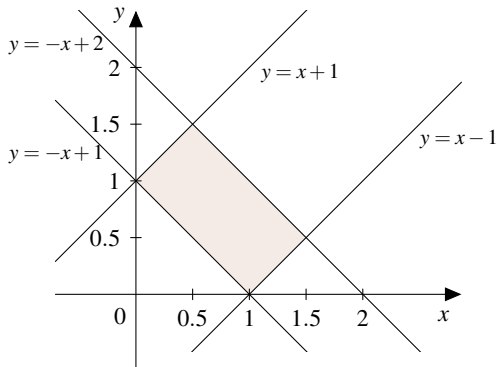
$$\iint_D y^2 - x^2 dx dy.$$

Exemplo:

Considere a região

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq x + 1 \text{ e } -x + 1 \leq y \leq -x + 2\}$ e calcule

$$\iint_D y^2 - x^2 \, dx \, dy.$$



Mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

onde $u \in [1, 2]$ e $v \in [-1, 1]$.

Mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

onde $u \in [1, 2]$ e $v \in [-1, 1]$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

onde $u \in [1, 2]$ e $v \in [-1, 1]$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

onde $u \in [1, 2]$ e $v \in [-1, 1]$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Então

$$\iint_D y^2 - x^2 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{-1}^1 -uv|J| \, dv \, du$$

Mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

onde $u \in [1, 2]$ e $v \in [-1, 1]$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Então

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 - x^2 \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_{-1}^1 -uv|J| \, dv \, du \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-1}^1 uv \, dv \, du \end{aligned}$$

Mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

onde $u \in [1, 2]$ e $v \in [-1, 1]$.

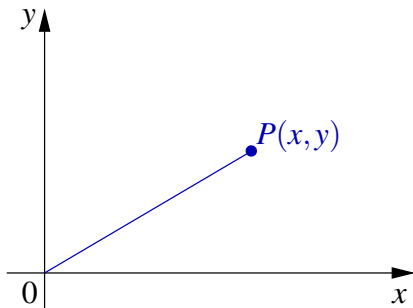
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Então

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 - x^2 \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_{-1}^1 -uv|J| \, dv \, du \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-1}^1 uv \, dv \, du \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 0 \, du = 0 \end{aligned}$$

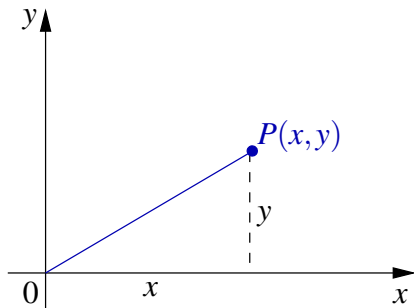
Coordenadas Polares

Seja P um ponto do plano.



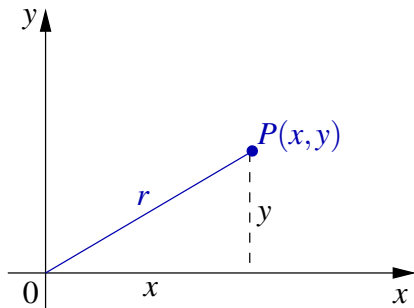
Coordenadas Polares

Seja P um ponto do plano.



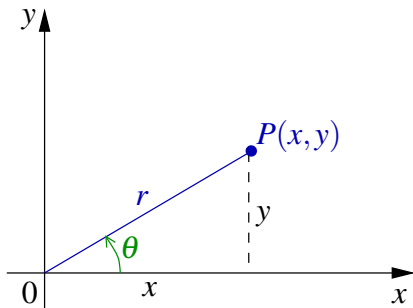
Coordenadas Polares

Seja P um ponto do plano.



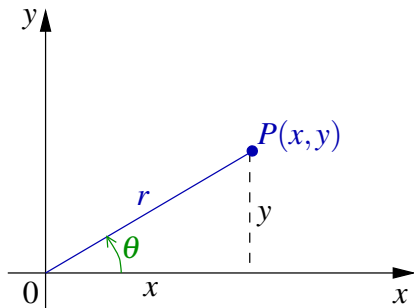
Coordenadas Polares

Seja P um ponto do plano.



Coordenadas Polares

Seja P um ponto do plano.



$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \text{ sen}(\theta) \end{cases}$$

Coordenadas Polares

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)),$$

Coordenadas Polares

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

onde $r \geq 0$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Coordenadas Polares

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

onde $r \geq 0$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Coordenadas Polares

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

onde $r \geq 0$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

Coordenadas Polares

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

onde $r \geq 0$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

Coordenadas Polares

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)),$$

onde $r \geq 0$ e $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta = r$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

Observações

- O termo $dx dy$ não é substituído por $dr d\theta$, mas por $r dr d\theta$.

Observações

- O termo $dx dy$ não é substituído por $dr d\theta$, mas por $r dr d\theta$.
- A área de D , em coordenadas polares, é dada por

$$A(D) = \iint_D dx dy$$

Observações

- O termo $dx dy$ não é substituído por $dr d\theta$, mas por $r dr d\theta$.
- A área de D , em coordenadas polares, é dada por

$$A(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D_{r\theta}} r dr d\theta.$$

Exemplos

- 1 Calcule o volume do sólido W limitado inferiormente pela região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x \geq 0\}$ e superiormente pela superfície $z = x^2 + y^2$.

Exemplos

- 1 Calcule o volume do sólido W limitado inferiormente pela região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x \geq 0\}$ e superiormente pela superfície $z = x^2 + y^2$.

2 Calcule $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$.

Exemplos

- 1 Calcule o volume do sólido W limitado inferiormente pela região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x \geq 0\}$ e superiormente pela superfície $z = x^2 + y^2$.

2 Calcule $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$.

- 3 Calcule a área da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } y \leq \sqrt{3}x\}.$$

Exemplos

- 1 Calcule o volume do sólido W limitado inferiormente pela região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x \geq 0\}$ e superiormente pela superfície $z = x^2 + y^2$.

2 Calcule $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$.

- 3 Calcule a área da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } y \leq \sqrt{3}x\}.$$

- 4 Calcule o volume do sólido

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \text{ e } 1 \leq z \leq 12 - 3x - 4y\}.$$

Aplicações físicas

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma lâmina plana delgada, com densidade (massa por unidade de área) dada pela função $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Aplicações físicas

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma lâmina plana delgada, com densidade (massa por unidade de área) dada pela função $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Massa

$$M = \iint_D \delta(x, y) dA$$

Aplicações físicas

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma lâmina plana delgada, com densidade (massa por unidade de área) dada pela função $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Massa

$$M = \iint_D \delta(x, y) dA$$

Se $\delta(x, y)$ for constante, dizemos que a lâmina é homogênea.

Centro de massa

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \delta(x, y) dA \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \delta(x, y) dA$$

Centro de massa

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \delta(x, y) dA \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \delta(x, y) dA$$

Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo E é dado por:

$$I_E = \iint_D r^2(x, y) \delta(x, y) dx dy$$

onde $r(x, y)$ é a distância de (x, y) ao eixo E .

Momento de Inércia em relação aos eixos

$$I_x = \iint_D y^2(x,y) \delta(x,y) dx dy$$

Momento de Inércia em relação aos eixos

$$I_x = \iint_D y^2(x,y) \delta(x,y) dx dy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2(x,y) \delta(x,y) dx dy$$

Momento de Inércia em relação aos eixos

$$I_x = \iint_D y^2(x,y) \delta(x,y) dx dy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2(x,y) \delta(x,y) dx dy$$

Momento de Inércia polar

$$I_O = I_x + I_y$$

Momento de Inércia em relação aos eixos

$$I_x = \iint_D y^2(x,y) \delta(x,y) dx dy \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2(x,y) \delta(x,y) dx dy$$

Momento de Inércia polar

$$I_O = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x,y) dx dy$$

Exemplos

- 1 Calcule a massa de uma placa com a forma da região

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2 \text{ e } x \geq 0\}$, sabendo que a densidade de massa em cada ponto é dada por $\delta(x, y) = x + 2y$.

Exemplos

- 1 Calcule a massa de uma placa com a forma da região
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2 \text{ e } x \geq 0\}$, sabendo que a densidade de massa em cada ponto é dada por $\delta(x, y) = x + 2y$.
- 2 Calcule a massa de uma placa homogênea que tem o formato de um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos(2\theta)$.

Exemplos

- 1 Calcule a massa de uma placa com a forma da região
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2 \text{ e } x \geq 0\}$, sabendo que a densidade de massa em cada ponto é dada por $\delta(x, y) = x + 2y$.
- 2 Calcule a massa de uma placa homogênea que tem o formato de um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos(2\theta)$.
- 3 A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.

Exemplos

- 1 Calcule a massa de uma placa com a forma da região
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2 \text{ e } x \geq 0\}$, sabendo que a densidade de massa em cada ponto é dada por $\delta(x, y) = x + 2y$.
- 2 Calcule a massa de uma placa homogênea que tem o formato de um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos(2\theta)$.
- 3 A densidade em qualquer ponto de uma lâmina semicircular é proporcional à distância ao centro do círculo. Determine o centro de massa da lâmina.
- 4 Calcule o momento de inércia polar de uma placa homogênea com a forma do disco $x^2 + y^2 = 2x$.

- 5 Calcule a integral $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, onde D é a região determinada pelas condições $x^2+y^2 \leq 1$ e $x+y \geq 1$.

- 5 Calcule a integral $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, onde D é a região determinada pelas condições $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x + y \geq 1$.
- 6 Determine o volume do sólido S onde:
- 1 S está no primeiro octante e é limitado por $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

- 5 Calcule a integral $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, onde D é a região determinada pelas condições $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x + y \geq 1$.
- 6 Determine o volume do sólido S onde:
- 1 S está no primeiro octante e é limitado por $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.
 - 2 S é limitado por $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e por $z = 2$.

- 5 Calcule a integral $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, onde D é a região determinada pelas condições $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x + y \geq 1$.
- 6 Determine o volume do sólido S onde:
- 1 S está no primeiro octante e é limitado por $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.
 - 2 S é limitado por $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e por $z = 2$.
 - 3 S está acima da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e no interior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- 5 Calcule a integral $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, onde D é a região determinada pelas condições $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x + y \geq 1$.
- 6 Determine o volume do sólido S onde:
- 1 S está no primeiro octante e é limitado por $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.
 - 2 S é limitado por $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e por $z = 2$.
 - 3 S está acima da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e no interior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - 4 S está no interior de $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e no exterior de $x^2 + y^2 = 4$.

Integral tripla

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, onde W é uma região sólida (fechada e limitada).

Integral tripla

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, onde W é uma região sólida (fechada e limitada).

A integral tripla de f sobre a região W denota-se por:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$$

Integral tripla

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, onde W é uma região sólida (fechada e limitada).

A integral tripla de f sobre a região W denota-se por:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$$

ou

$$\iiint_W f(x, y, z) dV$$

Integral tripla

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, onde W é uma região sólida (fechada e limitada).

A integral tripla de f sobre a região W denota-se por:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$$

ou

$$\iiint_W f(x, y, z) dV$$

ou

$$\iiint_W f dV$$

Observações

❶ Se $f(x,y,z) = 1$ em W , então $\iiint_W dx dy dz = V(W)$.

Observações

❶ Se $f(x, y, z) = 1$ em W , então $\iiint_W dx dy dz = V(W)$.

❷
$$\iiint_W (f + g) dV = \iiint_W f dV + \iiint_W g dV$$

Observações

❶ Se $f(x, y, z) = 1$ em W , então $\iiint_W dx dy dz = V(W)$.

❷ $\iiint_W (f + g) dV = \iiint_W f dV + \iiint_W g dV$

❸ $\iiint_W kf dV = k \iiint_W f dV, k \in \mathbb{R}$

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, com densidade (massa por unidade de volume) dada pela função $\delta : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, com densidade (massa por unidade de volume) dada pela função $\delta : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Massa

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) dV$$

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, com densidade (massa por unidade de volume) dada pela função $\delta : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Massa

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) dV$$

Centro de massa

O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_W x \delta(x, y, z) dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_W y \delta(x, y, z) dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_W z \delta(x, y, z) dV$$

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um um sólido, com densidade (massa por unidade de volume) dada pela função $\delta : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo E é dado por:

$$I_E = \iiint_W r^2(x, y, z) \delta(x, y, z) dx dy dz$$

onde $r(x, y, z)$ é a distância de (x, y, z) ao eixo E .

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_2 \text{ e } y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_2 \text{ e } y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

$$\iiint_{W_2} f(x, y, z) dV = \iint_{D_2} \left[\int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_2 \text{ e } y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

$$\iiint_{W_2} f(x, y, z) dV = \iint_{D_2} \left[\int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

$$W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_3 \text{ e } x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\}$$

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

$$\iiint_{W_1} f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_2 \text{ e } y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

$$\iiint_{W_2} f(x, y, z) dV = \iint_{D_2} \left[\int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

$$W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_3 \text{ e } x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\}$$

$$\iiint_{W_3} f(x, y, z) dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

Exemplos

- 1 Escreva as seis integrais triplas que descrevem o volume do sólido que está no primeiro octante limitado pelos planos coordenados e pelo plano $2x + y + 3z = 6$.

Exemplos

- 1 Escreva as seis integrais triplas que descrevem o volume do sólido que está no primeiro octante limitado pelos planos coordenados e pelo plano $2x + y + 3z = 6$.

- 2 Considere a integral iterada $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dz dx$. Reescreva a integral nas ordens $dy dx dz$ e $dz dx dy$.

Mudança de Variáveis

Temos um resultado similar à mudança de variáveis em integral dupla.

Mudança de Variáveis

Temos um resultado similar à mudança de variáveis em integral dupla.

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| \, du \, dv \, dw$$

onde

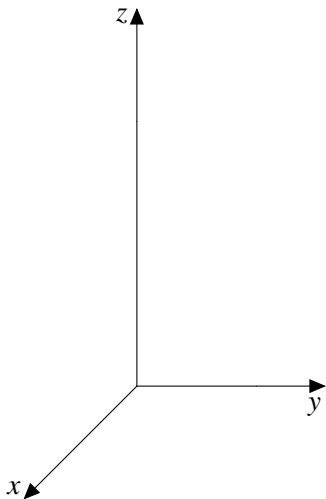
$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

é o jacobiano da mudança de variáveis

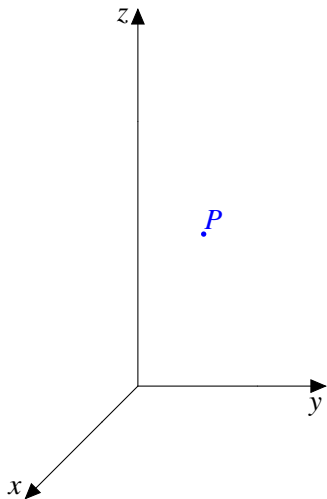
$$\phi(u, v, w) = (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

$$\text{e } W = \phi(W_{u,v,w})$$

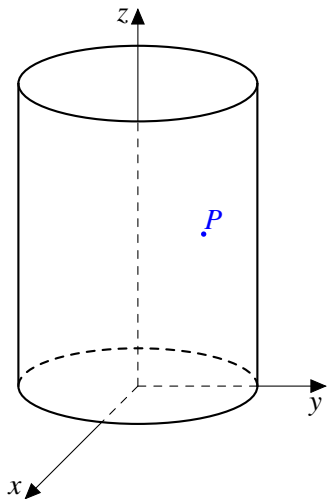
Coordenadas Cilíndricas



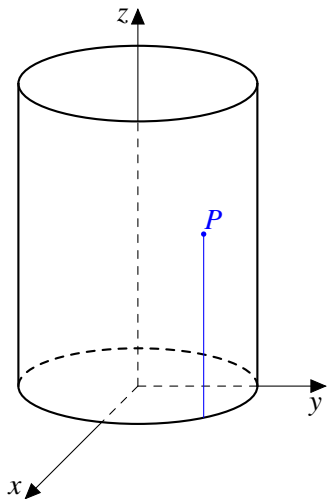
Coordenadas Cilíndricas



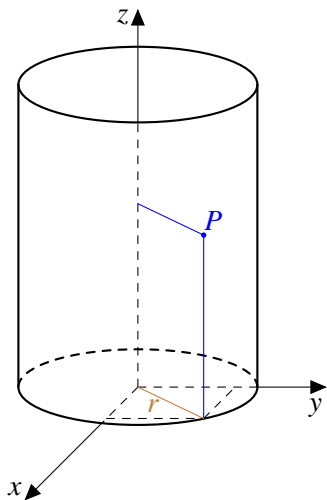
Coordenadas Cilíndricas



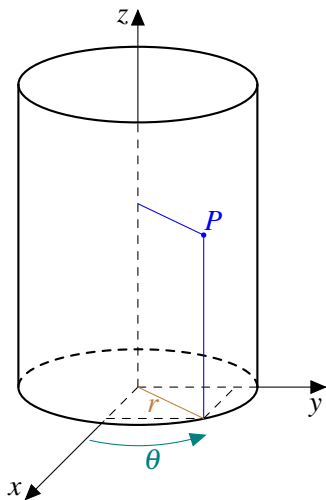
Coordenadas Cilíndricas



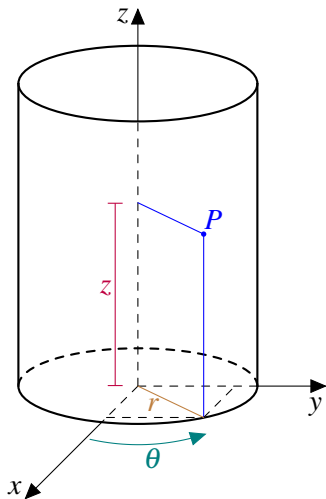
Coordenadas Cilíndricas



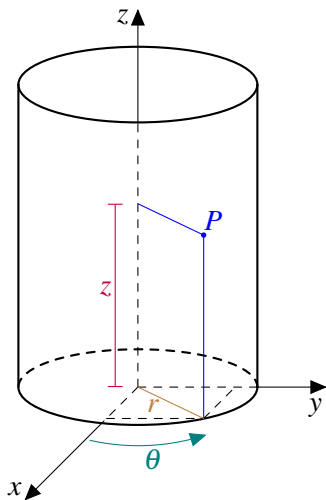
Coordenadas Cilíndricas



Coordenadas Cilíndricas



Coordenadas Cilíndricas



$$\phi(r, \theta, z) : \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z),$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z),$$

onde $r \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.

Coordenadas Cilíndricas

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z),$$

onde $r \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z),$$

onde $r \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z),$$

onde $r \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z),$$

onde $r \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr \, d\theta \, dz$$

Exemplos

- 1 Calcule $\iiint_W x^2 + y^2 + 2z \, dx \, dy \, dz$, onde W é o sólido acima do plano xy , no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e abaixo do parabolóide $z = 25 - x^2 - y^2$.

Exemplos

- 1 Calcule $\iiint_W x^2 + y^2 + 2z \, dx \, dy \, dz$, onde W é o sólido acima do plano xy , no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e abaixo do parabolóide $z = 25 - x^2 - y^2$.
- 2 Determine a massa da região limitada pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 0$, com densidade dada por $\delta(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exemplos

- 1 Calcule $\iiint_W x^2 + y^2 + 2z \, dx \, dy \, dz$, onde W é o sólido acima do plano xy , no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e abaixo do parabolóide $z = 25 - x^2 - y^2$.

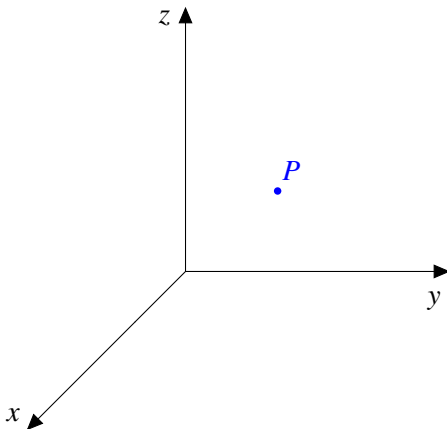
- 2 Determine a massa da região limitada pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 0$, com densidade dada por $\delta(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

- 3 Exprima em coordenadas cartesianas a integral

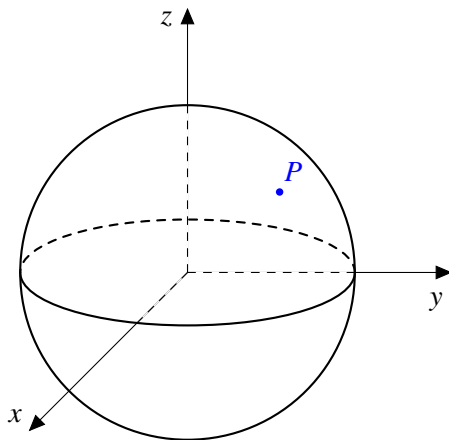
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}}^1 \int_{2r\cos\theta}^{2+r\operatorname{sen}\theta} (2r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)z \, dz \, dr \, d\theta$$

que está dada em coordenadas cilíndricas.

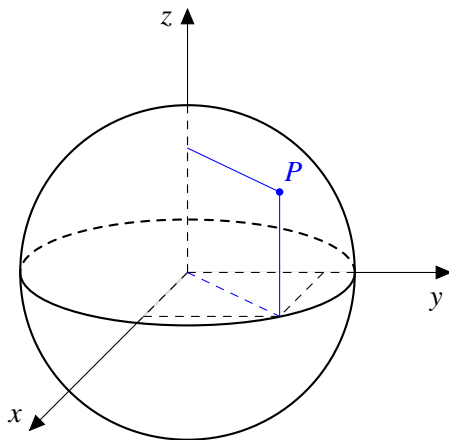
Coordenadas Esféricas



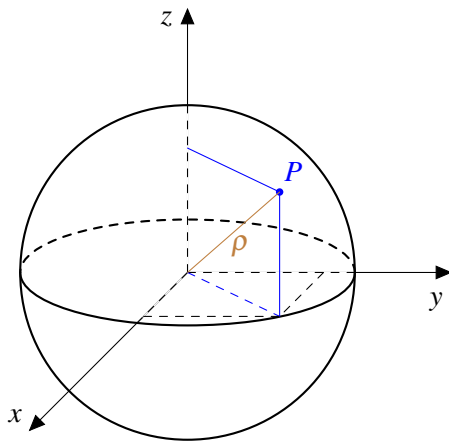
Coordenadas Esféricas



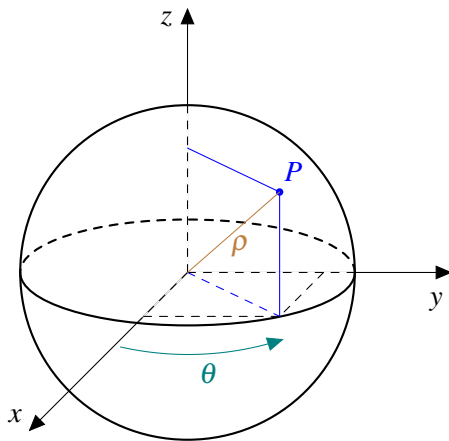
Coordenadas Esféricas



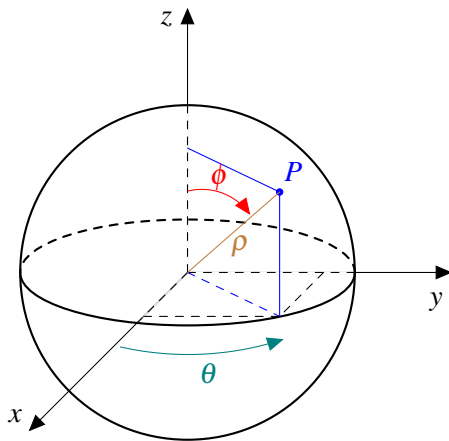
Coordenadas Esféricas



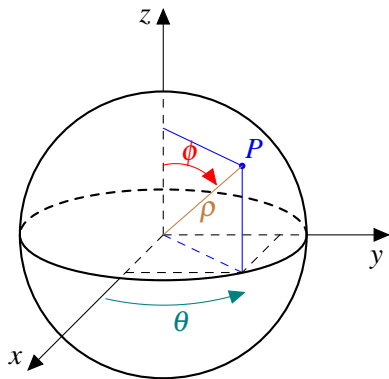
Coordenadas Esféricas



Coordenadas Esféricas



Coordenadas Esféricas



$$\Phi(\rho, \theta, \phi) : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

Coordenadas Esféricas

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \cos(\phi)),$$

Coordenadas Esféricas

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \cos(\phi)),$$

onde $\rho \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \pi]$.

Coordenadas Esféricas

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \cos(\phi)),$$

onde $\rho \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \pi]$.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}$$

Coordenadas Esféricas

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \cos(\phi)),$$

onde $\rho \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \pi]$.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & -\rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\rho \operatorname{sen}(\phi) \end{vmatrix}$$

Coordenadas Esféricas

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \cos(\phi)),$$

onde $\rho \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & -\rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\rho \operatorname{sen}(\phi) \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \rho \cos(\phi)),$$

onde $\rho \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $\phi \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & -\rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) & \rho \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\rho \operatorname{sen}(\phi) \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \end{aligned}$$

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W_{\rho\theta\phi}} f(\Phi(\rho, \theta, \phi)) \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Exemplos

- 1 Calcule a massa do sólido acima do plano $z = 0$ e limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sendo a densidade descrita pela função $\delta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.

Exemplos

- 1 Calcule a massa do sólido acima do plano $z = 0$ e limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sendo a densidade descrita pela função $\delta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.
- 2 Exprima em coordenadas retangulares a integral

$$\int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho^5 \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) d\rho d\phi d\theta.$$

Exemplos

- 1 Calcule a massa do sólido acima do plano $z = 0$ e limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sendo a densidade descrita pela função $\delta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.

- 2 Exprima em coordenadas retangulares a integral

$$\int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho^5 \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) d\rho d\phi d\theta.$$

- 3 Calcule o volume do sólido definido por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \text{ e } y \geq 0\}.$$

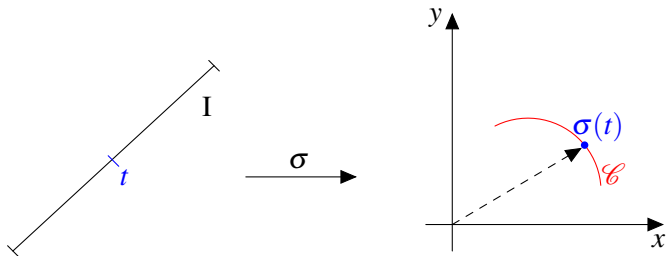
Parametrização de curvas

Parametrização de curvas

Parametrizar uma curva é descrever a curva como sendo a imagem de uma função vetorial de uma variável real.

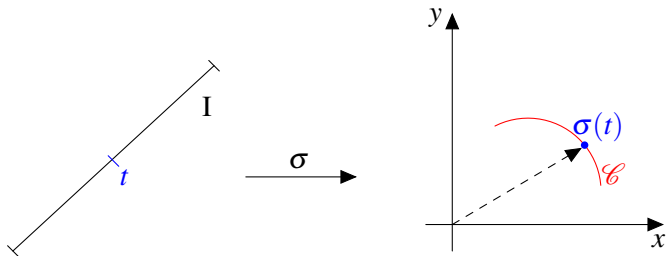
Parametrização de curvas

Parametrizar uma curva é descrever a curva como sendo a imagem de uma função vetorial de uma variável real.



Parametrização de curvas

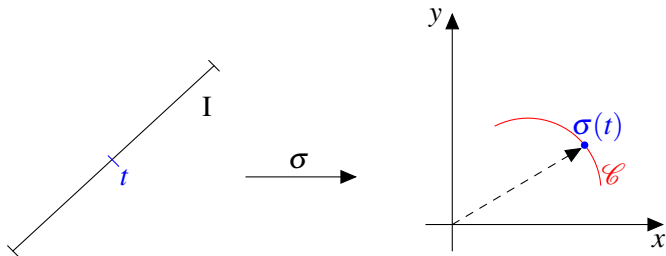
Parametrizar uma curva é descrever a curva como sendo a imagem de uma função vetorial de uma variável real.



- $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Parametrização de curvas

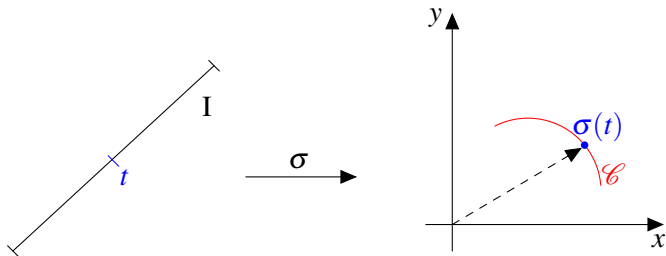
Parametrizar uma curva é descrever a curva como sendo a imagem de uma função vetorial de uma variável real.



- $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- I é um intervalo

Parametrização de curvas

Parametrizar uma curva é descrever a curva como sendo a imagem de uma função vetorial de uma variável real.



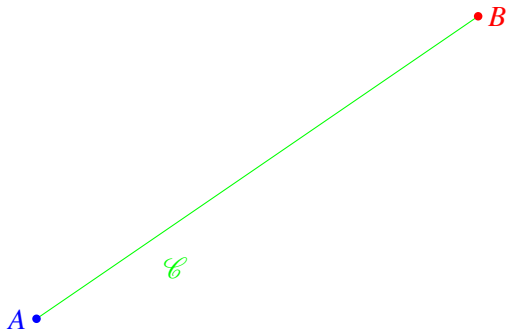
- $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- I é um intervalo
- $\sigma(I) = \mathcal{C}$

Segmento de reta

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Parametrize o segmento de reta com extremidade inicial A e final B .

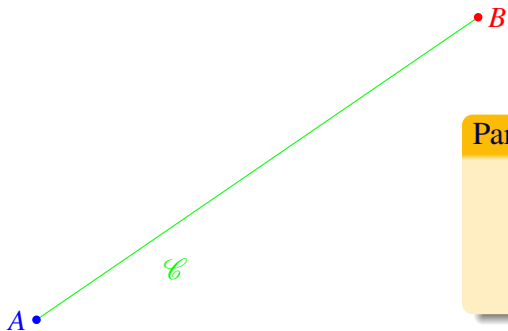
Segmento de reta

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Parametrize o segmento de reta com extremidade inicial A e final B .



Segmento de reta

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Parametrize o segmento de reta com extremidade inicial A e final B .

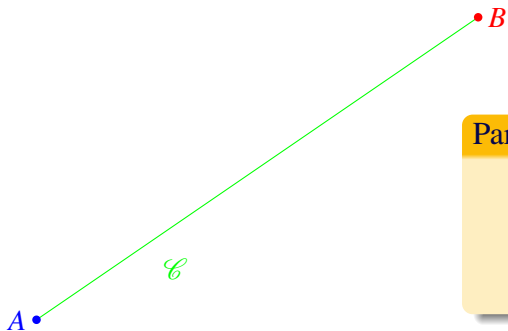


Parametrização

$$\sigma(t) = A + t(B - A)$$

Segmento de reta

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Parametrize o segmento de reta com extremidade inicial A e final B .



Parametrização

$$\sigma(t) = A + t(B - A)$$

$$t \in [0, 1]$$

Gráfico de função

Seja \mathcal{C} o gráfico da função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Gráfico de função

Seja \mathcal{C} o gráfico da função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

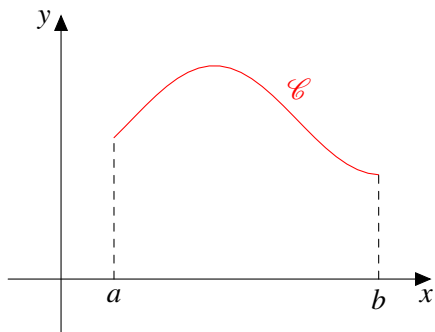


Gráfico de função

Seja \mathcal{C} o gráfico da função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

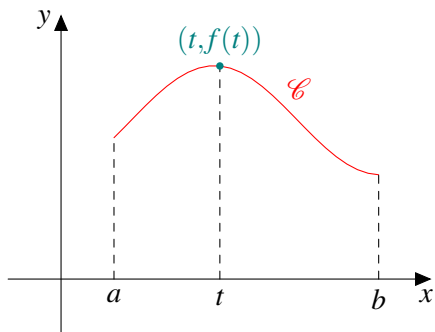
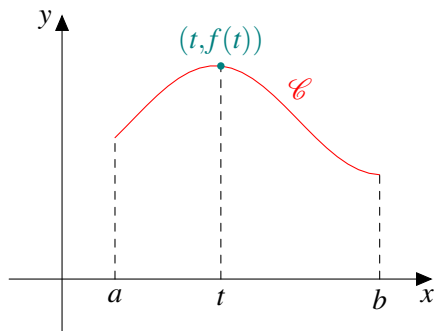


Gráfico de função

Seja \mathcal{C} o gráfico da função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

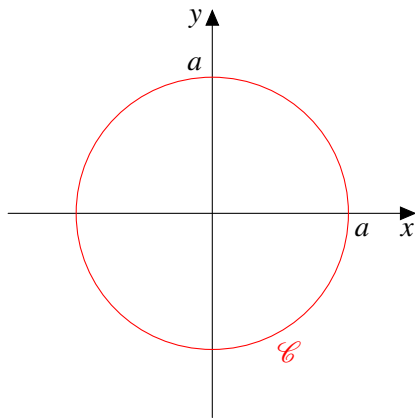


Parametrização

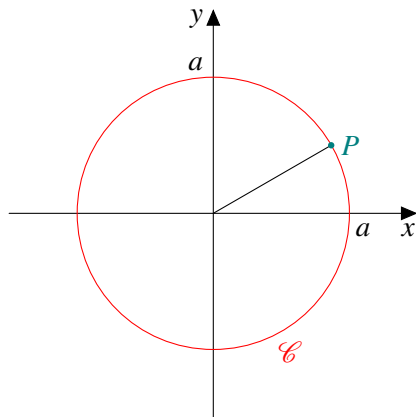
$$\sigma(t) = (t, f(t))$$

$$t \in I = [a, b]$$

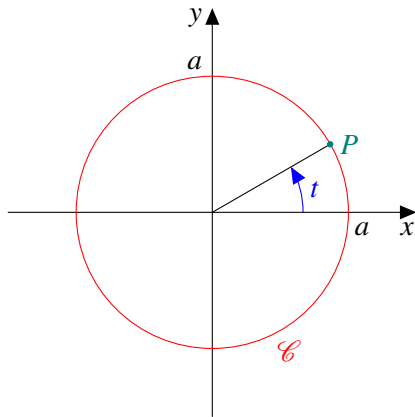
Circunferência



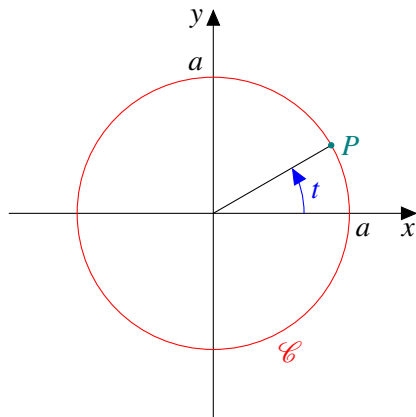
Circunferência



Circunferência



Circunferência

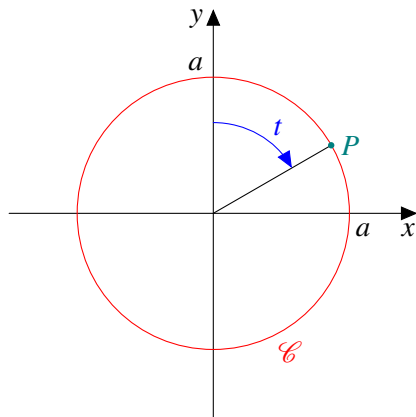


$$x^2 + y^2 = a^2$$

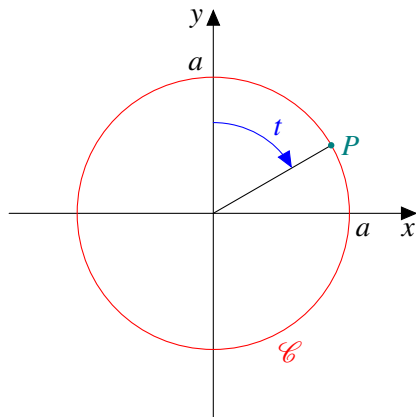
$$\sigma_1(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Circunferência



Circunferência



$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\sigma_2(t) = (a \operatorname{sen}(t), a \operatorname{cos}(t))$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Circunferências

Seja $a > 0$. Consideremos a circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

Circunferências

Seja $a > 0$. Consideremos a circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

Sentido anti-horário

$$\sigma_1(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + a \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Circunferências

Seja $a > 0$. Consideremos a circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

Sentido anti-horário

$$\sigma_1(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + a \sen(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Sentido horário

$$\sigma_2(t) = (x_0 + a \sen(t), y_0 + a \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Elipses

Sejam $a, b > 0$. Consideremos a elipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Elipses

Sejam $a, b > 0$. Consideremos a elipse

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Sentido anti-horário

$$\sigma_1(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \operatorname{sen}(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Elipses

Sejam $a, b > 0$. Consideremos a elipse

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Sentido anti-horário

$$\sigma_1(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \operatorname{sen}(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Sentido horário

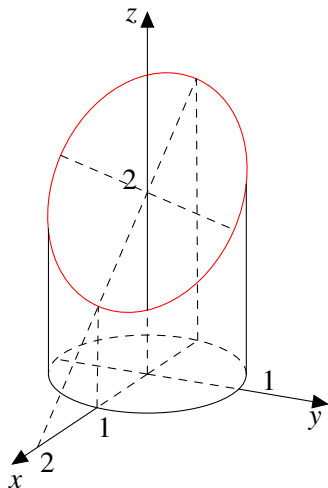
$$\sigma_2(t) = (x_0 + a \operatorname{sen}(t), y_0 + b \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Interseção de duas superfícies

Seja \mathcal{C} a curva de interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e do plano $x + z = 2$.

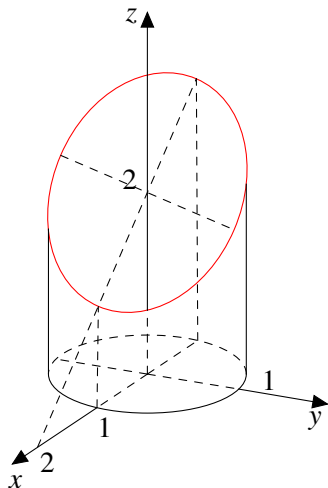
Interseção de duas superfícies

Seja \mathcal{C} a curva de interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e do plano $x + z = 2$.



Interseção de duas superfícies

Seja \mathcal{C} a curva de interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e do plano $x + z = 2$.



Parametrização

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), 2 - \cos(t))$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Exercícios

- 1 Esboce a curva \mathcal{C} parametrizada por $\sigma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, com $t \in [0, 4\pi]$ e sendo $a > 0$ e $b > 0$.

Exercícios

- 1 Esboce a curva \mathcal{C} parametrizada por $\sigma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, com $t \in [0, 4\pi]$ e sendo $a > 0$ e $b > 0$.
- 2 Determine uma parametrização da curva de interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$.

Exercícios

- 1 Esboce a curva \mathcal{C} parametrizada por $\sigma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, com $t \in [0, 4\pi]$ e sendo $a > 0$ e $b > 0$.
- 2 Determine uma parametrização da curva de interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$.
- 3 Parametrize a curva $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

Exercícios

- 1 Esboce a curva \mathcal{C} parametrizada por $\sigma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, com $t \in [0, 4\pi]$ e sendo $a > 0$ e $b > 0$.
- 2 Determine uma parametrização da curva de interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$.
- 3 Parametrize a curva $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$
- 4 Parametrize a curva contida no primeiro octante, obtida pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$.

Definição

Um campo escalar em \mathbb{R}^n é uma função real de n variáveis reais, ou seja, é uma função do tipo:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow f(X), \end{aligned}$$

onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definição

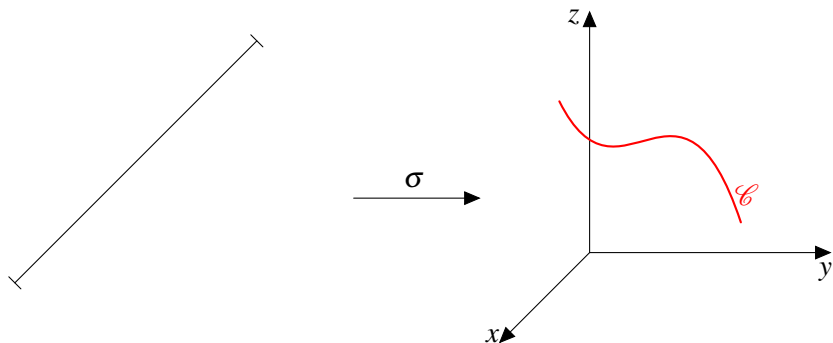
Um campo escalar em \mathbb{R}^n é uma função real de n variáveis reais, ou seja, é uma função do tipo:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow f(X), \end{aligned}$$

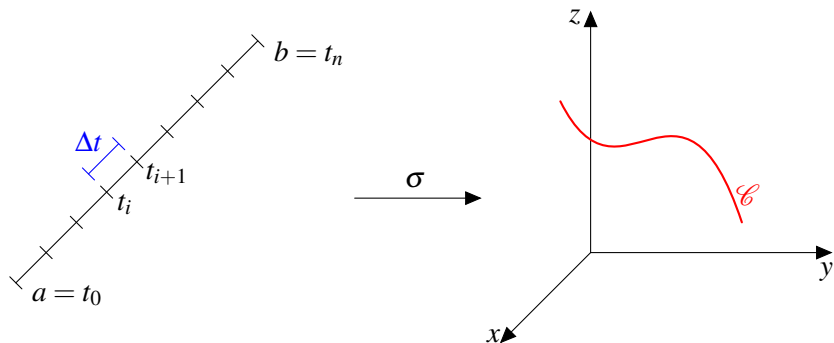
onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Vamos considerar apenas campos escalares em \mathbb{R}^2 ou em \mathbb{R}^3 .

Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva \mathcal{C} de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.

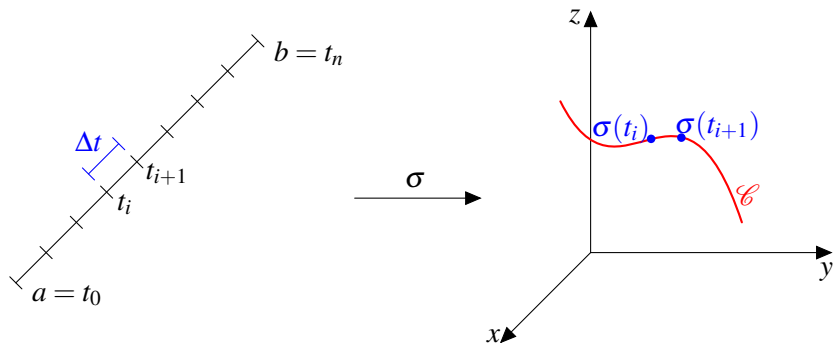


Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva \mathcal{C} de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.



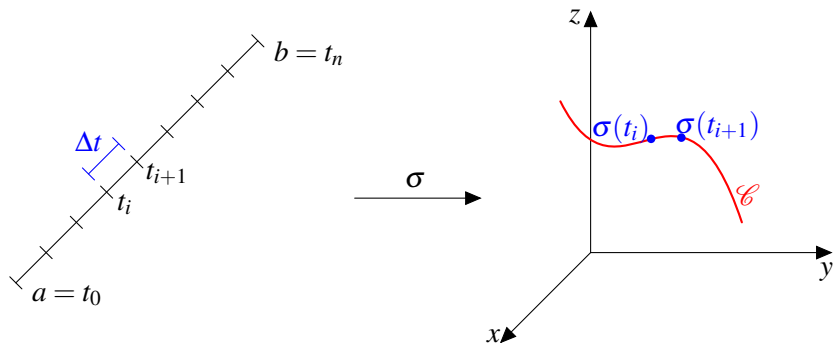
Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos I_i com comprimentos $\Delta t = \frac{b-a}{n}$.

Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva \mathcal{C} de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.



Então a curva fica dividida em n subarcs de comprimentos $\Delta s_i \simeq \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$ para algum $t_i^* \in I_i$.

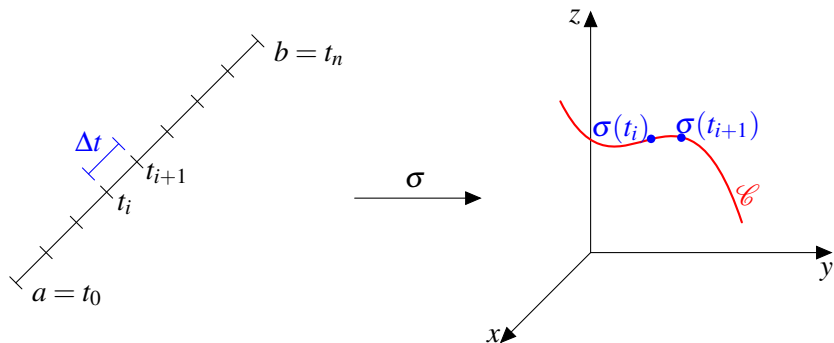
Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva \mathcal{C} de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.



Fazendo a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t,$$

Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva \mathcal{C} de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in [a, b]$.



Definimos a integral de linha de f sobre \mathcal{C}

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\sigma(t_i^{**})) \|\sigma'(t_i^*)\| \Delta t$$

se o limite existir.

Observações

- ① Se f é uma função contínua, então o limite anterior existe, ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt,$$

onde $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de \mathcal{C} .

Observações

- ① Se f é uma função contínua, então o limite anterior existe, ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt,$$

onde $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de \mathcal{C} .

- ② Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definimos $\int_{\mathcal{C}} f ds$ analogamente.

Observações

- ❶ Se f é uma função contínua, então o limite anterior existe, ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt,$$

onde $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de \mathcal{C} .

- ❷ Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definimos $\int_{\mathcal{C}} f ds$ analogamente.

- ❸ Se f é constante igual a 1, então

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}} ds = \text{comprimento de } \mathcal{C}.$$

Observações

- ④ A integral de linha de um campo escalar f não depende da parametrização nem de sua orientação, ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}^+} f ds = \int_{\mathcal{C}^-} f ds$$

onde \mathcal{C}^+ e \mathcal{C}^- são orientações opostas de \mathcal{C} .

Observações

- 4 A integral de linha de um campo escalar f não depende da parametrização nem de sua orientação, ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}^+} f ds = \int_{\mathcal{C}^-} f ds$$

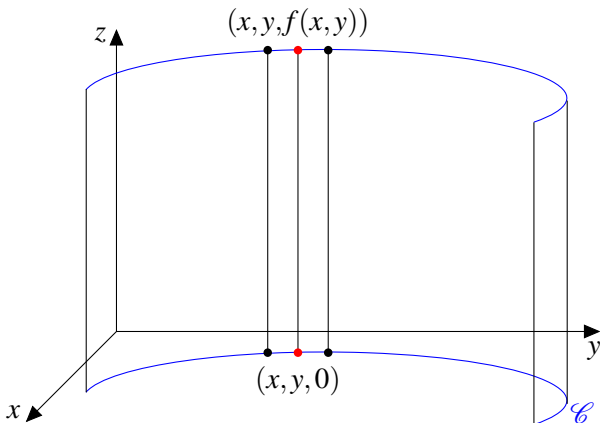
onde \mathcal{C}^+ e \mathcal{C}^- são orientações opostas de \mathcal{C} .

- 5 Se \mathcal{C} é uma curva C^1 por partes, com $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ então

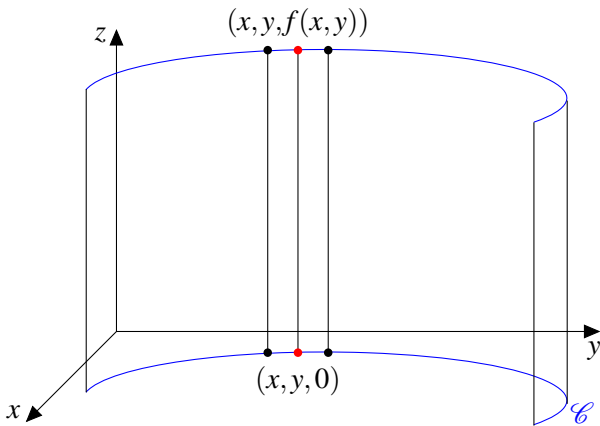
$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} f ds.$$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y) \geq 0$.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y) \geq 0$.



Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y) \geq 0$.



$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \text{área da superfície cilíndrica abaixo do gráfico de } f \text{ cuja base é a curva } \mathcal{C}.$

Seja \mathcal{C} um arame contido no plano \mathbb{R}^2 , com densidade dada pela função $\delta : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja \mathcal{C} um arame contido no plano \mathbb{R}^2 , com densidade dada pela função $\delta : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Massa

$$M = \int_{\mathcal{C}} \delta(x, y) ds$$

Seja \mathcal{C} um arame contido no plano \mathbb{R}^2 , com densidade dada pela função $\delta : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Massa

$$M = \int_{\mathcal{C}} \delta(x, y) ds$$

Centro de massa

O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} x \delta(x, y) ds \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} y \delta(x, y) ds$$

Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo E é dado por:

$$I_E = \int_{\mathcal{C}} r^2(x, y) \delta(x, y) ds$$

onde $r(x, y)$ é a distância de (x, y) ao eixo E .

Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo E é dado por:

$$I_E = \int_{\mathcal{C}} r^2(x, y) \delta(x, y) ds$$

onde $r(x, y)$ é a distância de (x, y) ao eixo E .

Analogamente, definimos a massa, o centro de massa e momento de inércia de um arame contido em \mathbb{R}^3 .

- 1 Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ a curva obtida pela interseção do cilindro elíptico $x^2 + 2y^2 = 2$ com o plano $z + y = 10$, satisfazendo $x \leq 0$. Calcule $\int_{\mathcal{C}} x^2 ds$.

- 1 Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ a curva obtida pela interseção do cilindro elíptico $x^2 + 2y^2 = 2$ com o plano $z + y = 10$, satisfazendo $x \leq 0$. Calcule $\int_{\mathcal{C}} x^2 ds$.
- 2 Calcule a integral de linha $\int_{\mathcal{C}} xy^4 ds$ onde \mathcal{C} é a metade direita da circunferência $x^2 + y^2 = 16$.

- 1 Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ a curva obtida pela interseção do cilindro elíptico $x^2 + 2y^2 = 2$ com o plano $z + y = 10$, satisfazendo $x \leq 0$. Calcule $\int_{\mathcal{C}} x^2 ds$.
- 2 Calcule a integral de linha $\int_{\mathcal{C}} xy^4 ds$ onde \mathcal{C} é a metade direita da circunferência $x^2 + y^2 = 16$.
- 3 Seja \mathcal{C} o arame delgado que une o ponto $(0, 0, 0)$ ao ponto $(1, 1, 1)$, cuja forma é dada pela interseção do cilindro parabólico $y - x^2 = 0$ e do plano $y - z = 0$. Calcule a massa do arame se a densidade é dada por $\rho(x, y, z) = x$.