Análise Real

Exercícios

1 Números Reais

1. Mostre por indução que $n < 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.
3. Prove que o conjunto dos números primos é infinito.
4. Construa de forma explícita uma bijeção entre $(0, 1)$ e $(0, 1) \cap \mathbb{N}$.
5. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$. Mostre que existe algum número irracional no intervalo $]x, y[$.
6. Prove por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$:
$$2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$
7. Sejam x um número irracional e y um número racional quaisquer. Escolha, justificando, a opção correta:

   (a) x^2 é racional. (b) $\dfrac{y}{x}$ é irracional.
   (c) $\sqrt{x}$ é irracional. (d) não se verifica nenhum dos casos anteriores.

8. Sejam x e y números irracionais quaisquer. Escolha, justificando, a opção correta:

   (a) $x + y$ é irracional. (b) xy é irracional.
   (c) $x^2 + y^2$ é irracional. (d) não se verifica nenhum dos casos anteriores.

9. Prove que é verdadeira ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação:

   Se A e B são conjuntos de $\mathbb{R}$ limitados e tais que $A \cap B \neq \emptyset$, então $\sup(A \cap B) = \min \sup A, \sup B$.

10. O ínfimo do conjunto $\left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 3\right\}$:

    (a) é $\sqrt{3}$. (b) não existe.
    (c) é 0. (d) é um número racional maior que $\sqrt{3}$.

11. Seja $a = \sup X$. Prove que se $a \notin X$ então para todo $\epsilon > 0$, o conjuntoo $(a - \epsilon, a) \cap X$ é infinito.

2 Sequências de números reais

1. Mostre que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots 1/n$ não é convergente.
2. Mostre que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n$ converge.

3. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente tal que o seu limite é $x \in \mathbb{R}$. Então a sequência definida por $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ converge e tem x como seu limite.

4. Considere as sequências $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ definidas por $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (2)^{-n}$. Indique, justificando, a(s) opção(ões) correta(s):

   (a) $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{2}$ é convergente (b) $\sum_{i=1}^{\infty} 2b_n$ é divergente

   (c) $\sum_{i=1}^{\infty} a_n b_n$ é divergente (d) $\sum_{i=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente

5. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$

   (a) Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n^2 > 2$ e que $(x_n)_n$ é monótona decrescente.

   (b) Justifique que existe $\lim x_n$ e determine-o.

6. Seja $(x_n)_n$ uma sequência real.

   (a) Mostre que se as subsequências $(x_{2n})_n$ e $(x_{2n-1})_n$ são convergentes para o mesmo número real a, então $(x_n)_n$ converge para a.

   (b) Mostre que se as subsequências $(x_{2n})_n$, $(x_{2n-1})_n$ e $(x_{3n})_n$ são convergentes, então $(x_n)_n$ é convergente.

   (c) Mostre que se $(x_n)_n$ é convergente para um número real a, e se $x_{2n} > 0$ e $x_{2n-1} < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a = 0$.

7. Suponha que $x_n < M$ e $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

8. Seja $(x_n)_n$ uma sequência real e seja $r \in (0,1)$. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $|a_{n+1} - a_n| < r^n$. Mostre que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy.

3 Séries de números reais

1. A série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2n}(n+1)$:

   (a) é absolutamente convergente. (b) é condicionalmente convergente.

   (c) é divergente. (d) Não satisfaz nenhuma das condições anteriores.

2. Mostre que não existe nenhum número real α tal que a série $\sum_{i=1}^{\infty} n^{\alpha(\alpha+2)}$ converge.

4 Topologia de $\mathbb{R}$

1. Determine o conjunto dos pontos de acumulação de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (c) $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que $\overline{\mathbb{R}\backslash X} = \mathbb{R}\backslash \text{int}X$ e $\text{int}(\mathbb{R}\backslash X) = \mathbb{R}\backslash\overline{X}$.

3. Definimos a fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ com sendo o conjunto dado por $\text{fr}(X) = \overline{X} - \text{int}(X)$. Determine $\text{fr}(\mathbb{Z})$ e $\text{fr}(\mathbb{Q})$.

4. Sejam $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $A = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Determine $\text{fr}(A \cup B)$.

5. Prove que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se para todo $a \in A$ e toda a sequência (x_n) com $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n > n_0$.

6. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um aberto e $F \subset \mathbb{R}$ um fechado. Mostre que $A - F$ é aberto.

7. Seja A um conjunto enumerável. Prove que $\text{int}A = \emptyset$.

5 Limites e continuidade de funções

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x^3 + 3$. Encontre $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(0)| < \frac{1}{2}$, para qualquer x tal que $|x| < \delta$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2 - x$. Encontre $\delta > 0$ tal que $|f(x)| < \frac{1}{5}$, para qualquer x tal que $|x - 1| < \delta$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

   Encontre $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(2)| < \frac{1}{10}$, para qualquer x tal que $|x - 2| < \delta$.

4. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de X e $f, g : X \to \mathbb{R}$.
   (a) Não existindo $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, poderão existir $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ ou $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$?
   (b) Existindo $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$, existirá sempre $\lim_{x\to a} g(x)$?
   (c) Existindo $\lim_{x\to a} f(x)$ e não existindo $\lim_{x\to a} g(x)$, poderá existir $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$?
   (d) Existindo $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$, poderá não existir $\lim_{x\to a} g(x)$?
   (e) Se para todo $x \in X$ temos $f(x) < g(x)$, ter-se-á necessariamente $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, no caso de existirem os referidos limites?

5. Prove usando a definição que $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{2}{3}$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

   Diga para que pontos $a \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e determine esses limites.

7. Demonstre que existe algum número real x tal que $\text{sen}(x) = x - 1$.

8. Mostre que existe algum $\rho > 0$ tal que

$$|x - 1| < \rho \Rightarrow \left|\frac{\cos(\pi x)}{x^2 - 2} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

9. Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $x \in [a, b]$, existe $\epsilon > 0$ tal que f restrita a $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap [a, b]$ é limitada. Prove que existe um $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$.

10. Justifique se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:

    Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e A é aberto, então $f(A)$ é aberto.

11. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $A \subset \mathbb{R}$ um aberto. Mostre que $f^{-1}(A)$ é um aberto.

12. Justifique se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:

    A função $f(x) = \dfrac{sen(x^2 + 1)}{x}$ não é uniformemente contínua em $[\pi, 5\pi]$.

13. Seja $S = \{x \in [a, b] : f(x) \leq l\}$ com f contínua em $\mathbb{R}$ e $f(a) < l < f(b)$.

    (a) Prove que S é não-vazio.

    (b) Prove que S é limitado superiormente.

    (c) Defina $c = \sup S$. Prove que $f(c) = l$. (Sugestão: Mostre inicialmente que $f(c) \leq l$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10$. Mostre que:

    (a) f é limitada;

    (b) f é uniformemente contínua.

6 Derivadas

1. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = xg(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se g for contínua em zero, então f é derivável em zero e $f'(0) = g(0)$.

2. Deduza do teorema de Lagrange que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $|\text{sen}(x)| \leq |x|$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável.

    (a) Prove que

    $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$$

    .

    (b) Mostre que o limite do item anterior pode existir sem que f seja derivável.